文章编号：1000-8152(2002)06-0829-04

基于 LMI 的多模型鲁棒预测控制 *

李亚东，李少远
(上海交通大学 自动化研究所，上海 200030)

摘要：用线性矩阵不等式(LMI)方法研究多模型鲁棒预测控制，提出了状态反馈的综合方法，并分析了闭环系统的可行性，同时证明闭环系统渐近稳定.在此基础上，研究了带终端零状态的有限优化时域预测控制和无穷优化时域预测控制的性能，证明了两者在性能上的一致性.

关键词：预测控制；线性矩阵不等式；线性微分包系统；多模型；滚动时域
中图分类号：TP273　　　　**文献标识码**：A

LMI based multi-model robust predictive control

LI Ya-dong, LI Shao-yuan
(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: This paper studies multi-model robust predictive control using LMI, addresses synthesis method of state feedback, analyses the feasibility of close loop system and proves that the closed loop system is asymptotically stable. Also the differences between the finite optimization horizon predictive control with terminal zero state constraints and infinite optimization horizon predictive control are studied and the consistency of the two system's performance is proved.

Key words: predictive control; linear matrix inequality; linear differential inclusions; multi-model; receding horizon

1 引言(Introduction)

预测控制作为 70 年代后期在工业过程领域内发展起来的一类新型计算机控制算法，在生产过程控制中得到了广泛的应用.它是基于模型预测控制、滚动时域优化，并结合在线反馈校正的优化控制方法.目前，预测控制研究的一个主要缺陷是处理模型不确定性的能力不够[1]，而文[2]指出带有不确定的非线性时变系统可通过全局线性化的方法转化为线性微分包系统，因此分析在线性微分包框架下的预测控制的设计方法和性能成为一个研究热点.由于范围广泛的一系列控制理论及应用与综合问题，如鲁棒问题，非线性控制，H_∞ 问题等，能够转化为标准的线性矩阵不等式(LMI)问题，所以 LMI 成为分析和解决控制问题的一个有力工具.基于 LMI 的优化问题可以在多项式时间内解决，而且求解 LMI 问题的方法也在不断发展，如椭圆法和内点法等.同时 LMI 还支持在线优化，因而在许多需要在线优化的控制方法如预测控制中得到优先推广.文[1]将 LMI 方法引入预测控制，给出了无穷优化时域的鲁棒预测控制的综合方法，并分析了其性能.本文在运用 LMI 的基础上，以线性微分包系统中的典型环节多模型系统为例，研究了有限优化时域的带约束的预测控制方法，给出了状态反馈的设计方法，并分析了闭环系统的可行性，同时证明闭环系统渐近稳定.最后，分析了无穷优化时域预测控制和带有终端零状态约束的有限优化时域的预测控制的差别，证明了两者之间的等价性.

2 问题描述和基本假设(Problem description and basic assumption)

一般而言，预测控制的基本原理可概括为预测模型，滚动优化和反馈优化.而多模型预测控制的预测模型可描述为：

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) = Cx(k), \\ [A(k), B(k)] \in \Omega, \\ \Omega = Co\{[A_1 \quad B_1], [A_2 \quad B_2], \cdots, [A_L \quad B_L]\}. \end{cases} \tag{1}$$

鲁棒多模型预测控制的滚动优化指标表示为：

* 基金项目：国家自然科学基金(60074004)资助项目.
收稿日期：2000-06-12；收修改稿日期：2000-10-16.

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k+i|k),i=0,1,\cdots,m}\ \max\limits_{[A(k+i)B(k+i)]\in\Omega,i\geqslant 0} J(k),\\ J(k)=\sum\limits_{i=1}^{p}x(k+i\mid k)^{\mathrm T}Q_1x(k+i\mid k)+\\ \qquad\sum\limits_{i=1}^{m}u(k+i\mid k)^{\mathrm T}Ru(k+i\mid k).\end{cases}\tag{2}$$

其中：m 为控制时域，p 为优化时域，$Q_1>0,R>0$ 为权矩阵，$x(k+i\mid k)$ 表示在 k 时刻基于模型(1)的 $k+i$ 时刻的状态预测值，$u(k+i\mid k)$ 表示 k 时刻使滚动指标(2)优化的受控输入序列 $\{u(k\mid k),u(k+1\mid k),\cdots,u(k+m\mid k)\}$ 在 $k+i$ 时刻的值. 根据预测控制的特点，只有受控输入 $u(k\mid k)$ 施加到系统控制中，然后到下一时刻，重新计算优化问题得到不同的受控输入序列，这即是滚动优化.

假设 1 $u(k+i|k)=0,\ i>m.$

假设 2 $p\geqslant m.$

假设 3 $x(k|k)=x(k).$

根据预测控制的物理意义，假设 1 和假设 2 显然成立，而假设 3 会由于环境噪声以及模型误差的存在而通过反馈校正环节导致 $x(k|k)$和 $x(k)$的不一致，但这可以通过增加多模型的极点来解决，故假设 3 也是合理的.

终端零状态约束表示为：

$$x(k+i\mid k)=0,\ i>p.\tag{3}$$

输入和输出约束一般可通过欧氏范数或绝对值的上界来表示，用欧氏范数可表示为：

$$\begin{cases}\|u(k+i\mid k)\|_2\leqslant u_{\max},\\ \|y(k+i\mid k)\|_2\leqslant y_{\max}.\end{cases}\tag{4}$$

用绝对值可表示为：

$$\begin{cases}|u(k+i\mid k)|\leqslant u_{\max},\\ |y(k+i\mid k)|\leqslant y_{\max}.\end{cases}\tag{5}$$

3 基于 LMI 的状态反馈综合(LMI based state feedback synthesis)

引理 1 考虑一个二次函数 $V(x)=x^{\mathrm T}Px,P>0$，满足以下条件：

$$V(x(k+i+1\mid k))-V(x(k+i\mid k))\leqslant -[x(k+i\mid k)^{\mathrm T}Q_1x(k+i\mid k)+u(k+i\mid k)^{\mathrm T}Ru(k+i\mid k)],\tag{6}$$

则对于式(1)描述的满足三个假设条件的带有终端零状态约束系统，存在：

$$\max_{[A(k+i)B(k+i)]\in\Omega}J(k)\leqslant V(x(k\mid k)).\tag{7}$$

证 将式(6)从 $i=0$ 累加到 $i=p$，由于 $x(k+p+1\mid k)=0$ 和 $u(k+i\mid k)=0,i>m$，不等式左边为 $-V(x(k\mid k))$，右边为 $-J(k)$. 由引理 1 得证.

显然，$V(x(k\mid k))$就是 $J(k)$的上确界，在下面的讨论中，我们将最小化性能指标 $J(k)$ 转化为对 $V(x(k\mid k))$ 求最小. 先考虑无约束的情况.

定理 1 对于式(1)描述的满足三个假设条件的带有终端零状态约束系统，如果存在状态反馈 $u(k+i\mid k)=Fx(k+i\mid k)$ 使得 $V(x(k\mid k))$ 最小，则 $F=YQ^{-1},Q>0$，其中 Y,Q 是下述 LMI 问题的最优解.

$$\min_{\gamma,Q,Y}\gamma,\tag{8}$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{pmatrix}1 & x(k\mid k)^{\mathrm T}\\ x(k\mid k) & Q\end{pmatrix}\geqslant 0\tag{9}$$

和

$$\begin{pmatrix}Q & QA_j^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B_j^{\mathrm T} & QQ_1^{1/2} & Y^{\mathrm T}R^{1/2}\\ A_jQ+B_jY & Q & 0 & 0\\ QQ_1^{1/2} & 0 & \gamma I & 0\\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I\end{pmatrix}\geqslant 0,$$

$$j=1,2,\cdots,L.\tag{10}$$

证 最小化 $V(x(k\mid k))=x(k\mid k)^{\mathrm T}Px(k\mid k),P>0$ 等价于

$$\min_{\gamma,P}\gamma,$$

$$\text{subject to } x(k\mid k)^{\mathrm T}Px(k\mid k)\leqslant\gamma.$$

令 $Q=\gamma P^{-1}>0$，则根据 Schur 补定理可知，又可等价于

$$\min_{\gamma,Q}\gamma,$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{pmatrix}1 & x(k\mid k)^{\mathrm T}\\ x(k\mid k) & Q\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

将 $u(k+i\mid k)=Fx(k+i\mid k)$代入式(6)，令 $Y=FQ$，并根据 Schur 补定理得

$$\begin{pmatrix}Q & QA(k+i)^{\mathrm T}+Y^{\mathrm T}B(k+i)^{\mathrm T} & QQ_1^{1/2} & Y^{\mathrm T}R^{1/2}\\ A(k+i)Q+B(k+i)Y & Q & 0 & 0\\ Q_1^{1/2}Q & 0 & \gamma I & 0\\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I\end{pmatrix}\geqslant 0.\tag{11}$$

由于不等式(11)对于 $A(k+i), B(k+i)$ 是仿射的,由凸函数的性质知该不等式对于每一个极点都必须成立.故定理1得证.

对于形如式(4)或(5)的不等式约束都可转化为LMI问题,下面不加证明地给出结论.输入的欧氏范数型约束可转化为关于 Y 和 Q 的LMI:

$$\begin{pmatrix} u_{\max}^2 I & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{12}$$

输出的欧氏范数型约束可转化为关于 Y 和 Q 的LMI:

$$\begin{pmatrix} Q & (A_jQ+B_jY)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} \\ C(A_jQ+B_jY) & \gamma_{\max}^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,L. \tag{13}$$

输入的绝对值型约束可转化为关于 X, Y 和 Q 的LMI:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Q \end{pmatrix} \geqslant 0, \\ X_{jj} \leqslant u_{j,\max}^2,\ j = 1,2,\cdots,N_u.\end{gathered} \tag{14}$$

输出的绝对值型约束可转化为关于 X, Q 的LMI:

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} X & C \\ C^{\mathrm{T}} & Q^{-1} \end{pmatrix} \geqslant 0, \\ X_{jj} \leqslant \gamma_{j,\max}^2,\ j = 1,2,\cdots,N_y.\end{gathered} \tag{15}$$

定理2 对于式(1)描述的满足三个假设条件的带有终端零状态约束系统,同时存在式(4)和(5)所描述的输入,输出约束.如果存在状态反馈 $u(k+i \mid k) = Fx(k+i \mid k)$ 使得 $V(x(k \mid k))$ 最小,则 $F = YQ^{-1}, Q > 0$,其中 Y, Q 是下述LMI问题的最优解.

$$\min\{\gamma \mid \gamma, Q, Y, \text{式(12)} \sim (15)\ \text{中的变量}\},$$
$$\text{s.t.}\quad \text{式(9)},(10),(12) \sim (15).$$

4 闭环系统性能分析(Closed loop system performance analysis)

引理2 对于式(1)描述的满足三个假设条件的带有终端零状态约束系统,如果存在状态反馈 $u(k+i \mid k) = Fx(k+i \mid k)$ 使得 $V(x(k \mid k))$ 最小,则

$$\begin{gathered}x(k+i+1 \mid k)^{\mathrm{T}}Px(k+i+1 \mid k) < \\ x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}}Px(k+i \mid k),\ i \in [0, p-1].\end{gathered} \tag{16}$$

证 由定理1可知,式(6)成立.由于 $Q_1 > 0, R > 0$,所以

$$V(x(k+i+1 \mid k)) < V(x(k+i \mid k)),$$

故引理2得证.

定理3

定理2在 k 时刻的任何可行解,在 $t > k$ 时刻依然是可行解.

证 由定理2知,仅有式(9)与时刻 k 有关,因此,只要证明式(9)在 $t > k$ 时仍然成立即可.由于 $Q = \gamma P^{-1}$,根据引理2得

$$\begin{gathered}x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}}Q^{-1}x(k+i \mid k) < \\ x(k \mid k)^{\mathrm{T}}Q^{-1}x(k \mid k) \leqslant 1.\end{gathered}$$

而

$$\begin{aligned}&x(k+1 \mid k+1) = x(k+1) = \\ &(A(k)+B(k)F)x(k) = \\ &(A(k)+B(k)F)x(k \mid k) = x(k+1 \mid k).\end{aligned}$$

由此,定理3得证.

定理4 定理2所得的闭环系统渐近稳定.

证 要证明闭环系统渐近稳定,只要证明存在关于状态的正定Lyapunov二次函数,随着时刻的增长而单调递减.显然,可建立如下的Lyapunov函数:

$$V_k(x(k \mid k)) = x(k \mid k)^{\mathrm{T}}P_k x(k \mid k).$$

其中,P_k 是由定理2所得的 k 时刻的最优解,由凸规划的特性得 P_k 是唯一的.根据定理3知,P_k 是 $k+1$ 时刻优化问题的可行解,所以有

$$\begin{gathered}x(k+1 \mid k+1)^{\mathrm{T}}P_{k+1}x(k+1 \mid k+1) \leqslant \\ x(k+1 \mid k+1)^{\mathrm{T}}P_k x(k+1 \mid k+1).\end{gathered}$$

由引理2得

$$\begin{gathered}x(k+1 \mid k)^{\mathrm{T}}P_k x(k+1 \mid k) < \\ x(k \mid k)^{\mathrm{T}}P_k x(k \mid k),\ x(k \mid k) \neq 0.\end{gathered}$$

综上,并有 $x(k+1 \mid k) = x(k+1 \mid k+1)$,得

$$\begin{gathered}x(k+1 \mid k+1)^{\mathrm{T}}P_{k+1}x(k+1 \mid k+1) < \\ x(k \mid k)^{\mathrm{T}}P_k x(k \mid k),\ x(k \mid k) \neq 0.\end{gathered}$$

依次类推,定理4得证.

5 终端零状态有限时域优化与无穷时域优化的一致性(The consistency of zero-end constrained finite horizon optimization with infinite horizon optimization)

无穷时域优化问题的性能指标为:

$$\begin{cases}\min\limits_{u(k+i|k),\, i=0,1,\cdots,m}\ \max\limits_{[A(k+i)B(k+i)] \in \Omega,\, i \geqslant 0} J_\infty(k), \\ J_\infty(k) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x(k+i \mid k)^{\mathrm{T}}Q_1x(k+i \mid k) + \\ \qquad u(k+i \mid k)^{\mathrm{T}}Ru(k+i \mid k)).\end{cases} \tag{17}$$

定理5 对于式(1)描述的满足三个假设条件的系统而言,终端零状态有限优化时域目标函数和

无穷优化时域优化目标函数有一致的上确界.

证 只要证明满足式(6)的二次函数 $V(x)$ 也是式(17)所描述的性能指标 $J_\infty(k)$ 的上确界.因为 $x(\infty \mid k) = 0$[1],即 $J_\infty(k)$ 有界,并且 $V(x(\infty \mid k)) = 0$.将式(6)从 $i = 0$ 累加到 $i = \infty$,得到

$$J_\infty(k) \leqslant V(x(k \mid k)),$$

从而定理5得证.

定理6 对于式(1)描述的满足三个假设条件的系统而言,带有终端零状态有限优化时域预测和无穷优化时域的预测控制性质等价.

证 从以上各定理的推导过程可知,显然定理6的结论成立.

6 结语(Conclusion)

本文在使用LMI的基础上,提出了能保证闭环渐近稳定的状态反馈设计方法,并且只要初始存在可行解,则系统一直是可行的.同时在比较带有终端零状态约束的有限优化时域预测控制和无穷优化时域预测控制的性能,证明两者之间的一致性.在线性微分包系统的框架下,仍然有其他典型环节如有界线性微分包系统等值得研究.由于LMI有许多成熟的实时求解方法,本文将预测控制中的滚动优化转化为LMI问题,避免了以往非线性系统预测控制求解中的非线性规划问题,且具有较好的鲁棒性,是一种具有实时性的求解方法,便于在实际控制中应用.进一步地,如何利用LMI的分析方法和特性研究预测控制系统的可行性、鲁棒性以及其它性质,都将是值得探讨的方向.

参考文献(References)

[1] Kothare M V, Balakrishman V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. Automatica, 1996,32(10):1361 - 1379

[2] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM Studies in Applied Methematics, 1994

[3] Vanantwerp J G, Braatz R D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities [J]. J. Process Control, 2000,10(4):363 - 385

[4] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality [J]. Automatica, 2000,36(6):789 - 814

[5] Rawlings J B, Muske K R. The stability of constrained receding horizon control [J]. IEEE Trans. Automation Control, 1993,38(10):1512 - 1516

[6] Sutton G J, Bitmead R R. Robust stability theorems for nonlinear predictive control [A]. Proc. of 36th Conf. on Decision & Control [C]. San Diego, 1997,4886 - 4890

[7] Lee Y I, Kouvaritakis B. Linear matrix inequalities and polyhedral invariant sets in constrained robust predictive control [A]. Proc. of American Control Conference [C]. San Diego,1999,657 - 661

本文作者简介

李亚东 见本刊2002年第1期第145页.

李少远 见本刊2002年第1期第145页.