第 19 卷第 6 期
2002 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.19 No.6
Dec. 2002

文章编号：1000－8152(2002)06－0879－06

# 多传感器分布式区间估计融合*

甘 宇，朱允民
（四川大学 数学学院，成都 610064）

**摘要**：考虑了对未知参数 $\theta$ 的多传感器分布式区间估计融合问题.建立了一种最优区间估计融合模型——凸线性组合融合，并给出搜索最优权系数的 Gauss-Seidel 迭代算法，另外，给出了一种近似的区间估计融合，它能减少大量的计算量，并且在某些情况下可以达到最优的估计性能.最后采用计算机数值模拟，用以上方法得到的融合区间估计均优于每个传感器的区间估计的性能.

**关键词**：区间估计；枢轴量；多传感器区间估计融合；线性无偏最小方差估计

**中图分类号**：O212.1　　　**文献标识码**：A

# Multisensor distributed interval estimation fusion

GAN Yu, ZHU Yun-min
(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

**Abstract**: This paper deals with multisensor statistical interval estimation fusion for the purpose of estimation of a parameter $\theta$. A multisensor optimal convex linear fusion model for interval estimation fusion is established. A Gauss-Seidel iteration computation method for searching for the fusion weights is suggested. In particular, we suggest convex combination minimum variance fusion that reduces huge computation of fusion and yields approximately optimal estimate performance generally, moreover, may achieves exactly optimal performance in some cases. The above results are supported by simulations.

**Key words**: interval estimation; pivotal quantity; multisensor interval estimation fusion; linear unbiased minimum variance estimation

## 1 引言(Introduction)

近年来，多传感器技术得到了广泛的应用，从航空到国防，机器人到自动系统控制领域，许多系统采用了多传感器来监测和控制系统的过程.估计融合，即对估计的数据融合，其目的就是如何在一定的通讯量、计算量等条件限制下，最好的利用包含在若干数据集中的有用信息，这些数据集是对一个未知参数 $\theta$ 或者过程 $\theta_t$ 的估计.通常这些数据集来源于若干个数据源(如多传感器).

估计融合有着非常广泛的应用，因为许多问题都涉及到来自同样系统的多个抽样 $\{X_1,\cdots,X_l\}$，其中 $X_i$ 是一个向量，来自于 $l$ 个传感器.比如，目标跟踪，对动态系统的状态估计，包括滤波、预测等.对估计融合的研究已经有二十年了，并且获得了许多成果[1~3]，但是这些成果主要集中在点估计融合方面，而在区间估计融合方面几乎没有什么结果.

事实上，在某些实际应用中，人们可能对在一个给定的概率下寻找未知参数 $\theta$ 的一个覆盖区间比求解参数 $\theta$ 的一个估计值更感兴趣.例如，在导弹系统中，可能只要在给定的概率下，得到导弹在爆炸时对目标所形成的有效覆盖区域，而不一定需要使导弹准确命中目标.

在多传感器系统中，我们则需要研究如何在通讯量的限制下将传感器对参数的区间估计的有关统计量传输到融合中心，并在一定的融合规则下，得到比各传感器更优的区间估计.因此我们考虑了统计区间估计融合问题.这里的区间，可以推广到高维空间成为区域，但为了论述方便，我们在本文中只限于讨论区间估计.其基本思想、框架和处理方法是可以向高维空间推广的.

## 2 区间估计融合的模型(The model of interval estimation fusion)

对于一个多传感器分布式系统，设有 $l$ 个传感器，在这里我们将每个传感器称为一个分站，第 $i$ 分站的观测数据为 $X_i$，为了论述方便，我们设系统只有一个未知参数 $\theta$，每个分站选择一个合适的统计量

* 基金项目：国家自然科学基金(60074017)和国家攀登计划(970211017)资助项目.
收稿日期：2001－06－14；收修改稿日期：2002－03－18.

$T_i(X_i)$(通常为一个良好的点估计),然后计算参数 $\theta$ 在置信系数 $\alpha$ 的区间估计.对于每个分站,我们得到参数 $\theta$ 的估计区间,那么如何利用各个分站对参数 $\theta$ 的区间估计信息,通过数据融合来得到参数 $\theta$ 的一个最好的区间估计?这正是区间估计融合所研究的问题.

对于分布式区间估计融合,每个分站只传输分站区间估计中观测数据的统计量 $T_i(X_i)$ 到融合中心,因此分布式系统对信道的要求较小,并且分布式系统的生存性更高.

我们所建立的区间估计融合与传统的点估计融合有一定的区别.每个分站不是传输它们所估计的参数 $\theta$ 的区间到融合中心,因为在区间估计中置信区间的两个端点都可以表示为统计量的函数,因此传输置信区间的端点和传输统计量实际上是一样的.现在的问题就是融合中心如何建立一个基于 $\{T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l)\}$ 的好的统计量并在一定的优化准则下得到参数 $\theta$ 的最优区间估计.

很明显,一个最优区间估计融合一般不仅依赖于融合中心的准则而且依赖于条件分布 $F(X_1,\cdots,X_l\mid\theta)$ 和分站统计量 $\{T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l)\}$.设所有分站的统计量 $\{T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l)\}$ 都是参数的无偏估计,一般地 $g(T_i(X_i))(i\leqslant l)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计(即 $Eg(T_i(X_i)) = E\theta$,定义 $g(T_i)$ 为 $T_i$). 例如

**例 1** 设 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是独立同分布,服从均匀分布 $(0,\theta)$. 统计量 $T(X)=\max\{x_1,\cdots,x_n\}$,我们知道 $\frac{n+1}{n}T(X)$ 是 $\theta$ 的无偏估计(见文[4]中320页的例7.3.5).

为了得到第 $i$ 分站的参数 $\theta$ 的区间估计,我们通常采用枢轴量的方法去计算参数 $\theta$ 的置信区间.设第 $i$ 分站的统计量 $T_i(X_i)$ 的枢轴量为 $S(T_i(X_i),\theta)$,利用枢轴量 $S(T_i(X_i),\theta)$,得到在给定的准则下的参数 $\theta$ 的一个估计区间 $[\hat\theta_L^i(T_i(X_i)),\hat\theta_U^i(T_i(X_i))]$.

在分布式系统中,分站将 $T_i(X_i)$ 传到融合中心 $F$,记为 $T(X)=[T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l)]'$,然后在融合中心计算融合后的最优区间估计.但是融合中心的区间估计比分站的区间估计要困难的多.其原因主要在于构造融合数据 $T(X)$ 的枢轴量比较困难.

在最优区间估计融合中,我们主要考虑最常用的奈曼准则(见文[5]):在给定区间覆盖概率的条件下最小化未知参数的估计区间长度.

$$\min\{c:\inf_\theta P_\theta(\theta\in[\hat\theta_L(T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l)),\ \hat\theta_U(T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l))])=\mathrm{const},\ c=\hat\theta_U-\hat\theta_L\}. \tag{1}$$

## 3 最优线性融合(Optimal linear fusion)

由于最优融合依赖于 $T(X)=[T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l)]'$ 的函数,但是对于最优融合函数并没有任何规定,因此在本文中融合中心的最优融合统计量 $T_f$ 限制为 $(T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l))$ 的线性函数,为了构造 $(T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l))$ 的枢轴量,我们可以选择一个关于 $T_i(X_i)$, $i\leqslant l$ 的线性函数,或者一个关于 $F_i(T_i(X_i)), i\leqslant l$ 的线性函数.但是 $T_i(X_i)$ 或者 $F_i(T_i(X_i))$ 必须是无偏估计,并且它们的分布函数必须是已知的.基于这个假设,我们可以将 $F_i(T_i(X_i))$ 记为 $T_i(X_i)$.

在实际问题中,人们常常假设各分站观测独立,从而容易得到各分站的联合分布,但是如果各分站的观测确有相关性,要得到严格的优化结果,则类似于多传感器分布决策理论,我们必须得到含有相关信息的各分站的联合分布.因此在本文中我们假设融合中心已知 $(T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l))$ 的联合分布函数.这里有两种方法构造关于 $(T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l))$ 的枢轴量:直接基于 $(T_1(X_1),T_2(X_2),\cdots,T_l(X_l))$ 联合分布和基于 $\{S(T_1(X_1),\theta),\cdots,S(T_l(X_l),\theta)\}$ 的联合分布函数,$S(T_i(X_i),\theta)$ 是第 $i$ 个传感器的枢轴量.

### 3.1 凸线性融合(Convex linear fusion)

设每个分站的统计量 $T_i(X_i)$ 的分布函数已知,并且 $T_i(X_i)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计.我们考虑融合后的统计量 $T$ 为下面的凸线性组合形式.

$$T_f(T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l))=\sum_{i=1}^{l}\omega_iT_i(X_i)=W'T.$$

为了保证 $T$ 的无偏性,有:$\sum_{i=1}^{l}\omega_i=1$. 这里

$$W=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_l).$$

为了得到统计区间估计,我们必须构造统计量 $T$ 的枢轴量 $S(T_f,\theta)$.

类似地,如果我们知道所有的分站枢轴量 $\{S(T_1(X_1),\theta),\cdots,S(T_l(X_l),\theta)\}$,我们可以利用这些枢轴量.因此,融合后的枢轴量可以是下面的凸组合形式:

$$S(S(T_1(X_1),\theta),\cdots,S(T_l(X_l),\theta))=\sum_{i=1}^{l}\omega_iS(T_i(X_i),\theta).$$

并且满足 $\sum_{i=1}^{l}\omega_i = 1, \omega_i \geqslant 0$.

为了保证融合后的 $S$ 关于 $\theta$ 具有单调性. 我们可能不能直接融合 $T_i$ 或者 $S_i$, 而是对它们的适当变换形式进行融合.(见数值模拟例子 3).

为了得到统计区间估计,我们计算统计量 $T_f$ 或者 $S$ 的分布函数,通常我们仅考虑连续的分布函数.

设 $\{T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l)\}$(或者 $\{S(T_1(X_1),\theta),\cdots,S(T_l(X_l),\theta)\}$) 有联合密度函数 $f(y_1,\cdots,y_l \mid \theta)$,求上述凸组合的密度函数 $f_T(t \mid \theta)$.

对于一般的联合密度函数,由求多维随机变量函数的分布函数的公式(见文[6]中的性质 35.1),我们有

$$f_T(t \mid \theta) = \frac{1}{|\omega_1|}\int f\Big(\frac{1}{\omega_1}t - \frac{\omega_2}{\omega_1}t_2 - \cdots - \frac{\omega_l}{\omega_1}t_1, t_2, \cdots, t_l \mid \theta\Big)\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_l. \tag{2}$$

特别地, 如果 $T_1(X_1),\cdots,T_l(X_l)$ 是相互独立的,融合的密度函数有下面的简单形式

$$f_T(t \mid \theta) = \frac{1}{|\omega_1|}\int f_{T_1}\Big(\frac{1}{\omega_1}t - \frac{\omega_2}{\omega_1}t_2 - \cdots - \frac{\omega_l}{\omega_1}t_l \mid \theta\Big)\cdot f_{T_2}(t_2 \mid \theta)\cdots f_{T_l}(t_l \mid \theta)\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_l. \tag{3}$$

现在我们得到了融合后的统计量 $T$ 的分布函数,还必须找到合适的枢轴量,才能利用枢轴量方法计算参数 $\theta$ 的置信区间. 确定了统计量 $T$ 的枢轴量后,最优融合的准则就转化为优化凸组合的权系数.

### 3.2　最优权系数的计算(Computation of optimal weights)

在区间估计融合中,一般不可能得到在优化准则(1)下的最优解 $(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_l)$ 的解析式. 因此,在优化准则(1)下,我们采用了一种 Gauss-Seidel 离散迭代算法来搜索最优权系数 $\{\omega_i\}_{i=1}^{l}$,即对 $l$ 个权系数 $\omega_i$ 逐个地进行优化.

基于分站统计量融合的算法为:

$$\min_{W^{k+1}}\{c:\inf_{\theta}P_\theta(\theta \in [\hat\theta_L(\sum_{j=1}^{i}\omega_j^{(k+1)}T_j(X_j) + \sum_{j=i+1}^{l}\omega_j^{(k)}T_j(X_j)),\ \hat\theta_U(\sum_{j=1}^{i}\omega_j^{(k+1)}T_j(X_j) + \sum_{j=i+1}^{l}\omega_j^{(k)}T_j(X_j))] = \alpha, c = \hat\theta_U - \hat\theta_L\}. \tag{4}$$

其中定义初始值 $W^0 = (\omega_1^{(0)},\cdots,\omega_l^{(0)})'$ 以及 $\alpha$ 为置信系数. 当我们考虑基于分站枢轴量的凸线性组合时,最优权系数必须是非负的.

显然,当 $k$ 趋近于无穷大时,上述迭代算法是单调的. 同时,它们有上界和下界. 因此这种迭代算法是收敛的. 该迭代算法的终止准则为以下两种情况:

$$\inf_{\theta}P_\theta(\theta \in [\hat\theta_L(\sum_{i=1}^{l}\omega_i^{(k+1)}T_i(X_i)),\ \hat\theta_U(\sum_{i=1}^{l}\omega_i^{(k+1)}T_i(X_i))]) - \inf_{\theta}P_\theta(\theta \in [\hat\theta_L(\sum_{i=1}^{l}\omega_i^{(k)}T_i(X_i)),\ \hat\theta_U(\sum_{i=1}^{l}\omega_i^{(k)}T_i(X_i))]) \leqslant \varepsilon, \tag{5}$$

或者 $c^{(k+1)} - c^{(k)} \leqslant \varepsilon$,其中 $c^{(j)}$ 是上述迭代算法在第 $j$ 步时的解

$$\operatorname{argmin}_{W^{(k)}}\{c^{(i)}:\inf_{\theta}P_\theta(\theta \in [\hat\theta_L(\sum_{i=1}^{l}\omega_i^{(j)}T_i(X_i)),\ \hat\theta_U(\sum_{i=1}^{l}\omega_i^{(j)}T_i(X_i))]) = \alpha, c^{(i)} = \hat\theta_U - \hat\theta_L\}. \tag{6}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是某个给定的容忍参数.

虽然上面的迭代算法便于计算机实现,它还是存在两方面的问题. 首先, Gauss-Seidel 迭代不能保证一定能得到全局最优解,该算法要依赖于初始值 $(\omega_1^{(0)},\cdots,\omega_l^{(0)})$. 其次,在多重积分计算时,该算法会导致极大的计算量.

上面我们建立了一般的区间估计融合的模型. 但在实际应用中,我们发现有时很难保证融合后的枢轴量 $T$ 关于参数 $\theta$ 具有单调性. 这样就不容易计算 $\theta$ 的置信区间.

由于上面的两方面的原因,下面我们给出了一个近似的区间估计融合,这个近似的区间估计融合可以得到近似的最优估计性能,并且能减少大量的计算量.

## 4　近似最优线性融合(Near optimal linear fusion)

我们知道 Chebyshev 不等式实际上就是一个近似的覆盖概率的区间估计

$$P(|\sum_{i=1}^{l}\omega_iT_i(X_i) - \theta| \leqslant c) \geqslant 1 - \frac{E(\sum_{i=1}^{l}\omega_iT_i(X_i) - \theta)^2}{c^2} \tag{7}$$

和

$$\{\theta: |\sum_{i=1}^{l}\omega_iT_i(X_i) - \theta| \leqslant c\} = \{\theta:\theta \in [\sum_{i=1}^{l}\omega_iT_i(X_i) - c, \sum_{i=1}^{l}\omega_iT_i(X_i) + c]\}. \tag{8}$$

于是由给定的置信系数和 $E(\sum_{i=1}^{l}\omega_i T_i(X_i)-\theta)^2$ 可以解出 $c$,从而得到覆盖区间且区间长度为 $2c$. 因此将区间估计的优化准则(1)实际上转化为下面的近似问题

$$\min_{\{\omega_i, i=1,\cdots,l\}} E(\sum_{i=1}^{l}\omega_i T_i(X_i)-\theta)^2. \tag{9}$$

事实上这是一个对参数 $\theta$ 的线性无偏最小方差估计(LMS),需要优化凸线性组合的权系数.如果上面的最小化问题存在一个解,并且这个解不依赖于参数 $\theta$,那么这个解就是近似的最优权系数.如果这个解不存在,我们可以将下面的优化问题的解作为近似的最优权系数.

$$\sup_{\theta}\min_{\{\omega_i, i=1,\cdots,l\}} E(\sum_{i=1}^{l}\omega_i T_i(X_i)-\theta)^2.$$

值得注意的是式(9)的解一般情况下不一定是式(1)的解.但是,当我们不知道区间估计融合中的统计量的分布信息而只知道它们的二阶矩时,由上面的不等式(7)确定的 LMS 解可以作为区间估计融合的一个很好的近似解.(至少,估计抽样的二阶矩比估计抽样的分布要容易).另外,对于某些概率分布,比如 Gauss 分布,LMS 解就是式(1)的精确解.因此求解最小化问题(9)是有意义的.幸运的是,在文[2,3]中我们已经解决了这个问题.下面我们给出所需要的结果.

设方差阵为

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \cdots & \delta_{1l}\\ & \cdots & \\ \delta_{l1} & \cdots & \delta_{ll}\end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中 $l$ 是区间估计融合中的传感器数目,并且

$$\delta_{ij}=E[(T_i(X_i)-\theta)(T_j(X_j)-\theta)].$$

我们重写 $\Sigma$ 为下面的形式

$$\Sigma=E(T-A'\theta)(T-A'\theta)'. \tag{11}$$

这里 $A$ 是一个 $l$ 维行向量 $(1\ \cdots\ 1)$.

因此线性无偏最小方差估计融合(LMS fusion)问题变为在线性等式约束下的一个矩阵二次最优化问题

$$W=\operatorname{argmin}E(W'T-\theta)^2=$$
$$\operatorname{argmin}W'E(T-A'\theta)(T-A'\theta)'W, \tag{12}$$

满足

$$AW=1. \tag{13}$$

等式(12)变换为

$$W=\arg\min_{AW=1}W'\Sigma W. \tag{14}$$

现在我们给出在没有任何假设下等式(14)的最优权系数的一般解(见文[2]中定理1),由这个方法,我们解决了在线性约束下的线性无偏最小方差估计问题.

**结论 1** 等式(14)的一般解为

$$W=\frac{1}{l}(1-(P\Sigma P)^{+}\Sigma)A'+PZ \tag{15}$$

和

$$E(W'T-\theta)^2=\frac{1}{l^2}A\Sigma(1-(P\Sigma P)^{+}\Sigma)A'. \tag{16}$$

其中 $P=I-\frac{1}{l}A'A$ 并且 $Z\in\mathbb{R}^l$ 是一个任意向量,它满足 $\Sigma^{\frac{1'}{2}}PZ=0$

我们已经证明虽然最优融合系数 $W$ 不唯一,但最优融合 $W'T$ 几乎处处唯一,可表示为

$$W'T=\frac{1}{l}A(I-(P\Sigma P)^{+})T. \tag{17}$$

因而可认为 $W=\frac{1}{l}A(I-(P\Sigma P)^{+}$ 是唯一的系数.

## 5 数值例子(Numerical examples)

在本节中,我们提供了4个区间估计例子:两个两传感器的例子和一个三传感器的例子.在两个两传感器的例子中,一个两传感器都服从均匀分布和一个两传感器分别服从高斯分布和均匀分布.这两个例子分别使用分站统计量融合和分站枢轴量融合.在三传感器的例子中,两个传感器服从高斯分布,一个传感器服从均匀分布.由于计算量太大,我们采用了近似最优线性融合方法.

**例 1** 设两个传感器观测数据来估计参数 $\theta$,第一个传感器观测数据为 $\{x_1,\cdots,x_{10}\}$,服从 $(0,\theta)$ 的均匀分布,它的统计量为 $T_1(X)=\max(x_1,\cdots,x_{10})$,我们知道 $\frac{11}{10}T_1(X)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计(见文[4]中320页的例7.3.5),并且 $\frac{11}{10}T_1(X)$ 的密度函数为 $f_{T_1}(t_1)=\left(\frac{10}{11}\right)^{10}10t_1^9/\theta^{10}, 0\leqslant t_1\leqslant\frac{11}{10}\theta$. 作变换 $S(T_1(X),\theta)=T_1(X)/\theta$,显然 $S(T_1(X),\theta)$ 可以作为 $T_1(X)$ 对参数 $\theta$ 的区间估计中的枢轴量.第二个传感器观测数据为 $\{y_1,\cdots,y_{10}\}$,服从 $(0,\beta\theta)$ 的均匀分布,其中 $\beta>0$,它的统计量为 $T_2(Y)=\max(y_1,\cdots,y_{10})$,$\frac{11}{10}T_2(Y)/\beta$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计,定义 $\frac{11}{10}T_2(Y)/\beta$ 为 $T_2(Y)$,$T_2(Y)$ 的密度函数为 $f_{T_2}(t_2)=\left(\frac{11}{10}\right)^{10}10t_2^9/\theta^{10}, 0\leqslant t_2\leqslant\frac{11}{10}\theta$. 作变换

$S(T_2(Y),\theta) = T_2(Y)/\theta$,显然 $S(T_2(Y),\theta)$ 可以作为 $T_2(Y)$ 对参数 $\theta$ 的区间估计中的枢轴量.设 $X$ 和 $Y$ 是相互独立.

我们采用分站枢轴量融合的方法,融合后的枢轴量为

$$W'T = \omega_1 S(T_1(X),\theta) + \omega_2 S(T_2(Y),\theta) = \omega_1 T_1(X)/\theta + \omega_2 T_2(Y)/\theta.$$

我们假设 $T_1(X)/\theta$ 和 $T_2(Y)/\theta$ 独立同分布,并且它们的密度函数已知,那么我们可以得到$(T_1(X)/\theta, T_2(Y)/\theta)$ 的联合密度函数.由公式(3),计算得到 $T$ 的密度函数.利用区间估计中枢轴量方法,我们计算得到参数 $\theta$ 在置信系数为 0.9 的置信区间,具体的抽样数据和结果如下:

设参数 $\theta = 2, \beta = 4$.

第一个传感器的观测数据为:

[0.8307, 0.6100, 1.7487, 0.0300, 1.5359, 1.9417, 1.9802, 1.5777, 0.8773, 0.9966].

第二个传感器的观测数据为:

[1.7117, 5.1479, 2.5603, 7.6808, 5.8131, 3.2956, 5.9565, 2.1436, 3.5194, 7.4670].

$\theta$ 的置信区间和最优加权系数(见表 1)为:

表 1 两个均匀分布传感器的区间融合

Table 1 Interval fusion for two uniform observation sensors

| | $\theta$ 的置信区间 | 最优的加权系数 |
|---|---|---|
| 凸线性融合 | $\theta \in [1.9502, 2.3383]$ | $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$ |
| 第一个分站 | $\theta \in [1.9802, 2.4783]$ | $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0$ |
| 第二个分站 | $\theta \in [1.9202, 2.4033]$ | $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1$ |

由于独立性, $S(T_1(X),\theta)$ 和 $S(T_2(Y),\theta)$ 是独立同分布的,因此融合后的权系数 $\omega_1 = \omega_2 = 0.5$.

**例 2** 设两个传感器观测数据,估计参数 $\theta \geqslant 0$.第一个传感器观测数据为$\{x_1,\cdots,x_{10}\}$,服从高斯分布 $N(\theta,1)$,它的统计量为 $T_1(X) = \sum_i x_i/10$, $T_1$ 服从分布 $N(\theta,1/10)$, 作变换 $S(T_1(X),\theta) = \sqrt{10}(T_1(X)-\theta)$, $S(T_1(X),\theta)$ 服从高斯分布 $N(0,1)$,显然 $S(T_1(X),\theta)$ 可以作为 $T_1$ 对参数 $\theta$ 的区间估计中的枢轴量.第二个传感器观测数据为$\{y_1,\cdots,y_{10}\}$,服从均匀分布$(0,\theta)$,它的统计量为 $T_2(Y) = \max(y_1,\cdots,y_{10})$, 我们知道 $T_2(Y)$ 的密度函数为 $f_{T_2}(t_2) = 10t_2^9/\theta^{10}, 0 \leqslant t_2 \leqslant \theta$.作变换 $S(T_2(Y),\theta) = T_2(Y)/\theta$,则 $S(T_2(Y),\theta)$ 可以作为 $T_2(Y)$ 对参数 $\theta$ 的区间估计中的枢轴量.并且假设 $X$ 和 $Y$ 是相互独立的.

但是我们发现如果采用分站枢轴量融合

$$S = \omega_1 S(T_1(X),\theta) + \omega_2 S(T_2(Y),\theta) = \omega_1\sqrt{10}(T_1(X)-\theta) + \omega_2 T_2(Y)/\theta.$$

$S$ 是$\theta$ 的非线性函数,在由 $S$ 的区间计算参数$\theta$ 的置信区间时,参数 $\theta$ 的置信区间是不唯一的.为避免这种情况,对分站枢轴量进行了适当的变换,并且要保证变换后的均值与 $S(T_1(X),\theta)$ 的均值相等,则有 $h(S(T_2(Y),\theta)) = \theta/T_2(Y) - 10/9$,利用概率论中求随机变量函数的密度函数的公式,可以得到 $h(S(T_2(Y),\theta))$ 的密度函数为 $f_h(t_2) = 10/(t_2 + 10/9)^{11}, t_2 \geqslant -1/9$.将 $h(S(T_2(Y),\theta))$ 作为第二个分站的枢轴量.重新定义分站枢轴量的融合形式为:

$$S = \omega_1 S(T_1(X),\theta) + \omega_2 h(S(T_2(Y),\theta)) = \omega_1\sqrt{10}(T_1(X)-\theta) + \omega_2(\theta/T_2(Y) - 10/9).$$

我们计算得到参数 $\theta$ 在置信系数为 0.9 的置信区间,具体的抽样数据和结果如下:

设参数 $\theta = 10$.

第一个传感器的观测数据为

[9.6001, 10.6900, 10.8156, 10.7119, 11.2902, 10.6686, 11.1908, 8.7975, 9.9802, 9.8433].

第二个传感器的观测数据为:

[0.1527, 7.4679, 4.4510, 9.3181, 4.6599, 4.1865, 8.4622, 5.2515, 2.0265, 6.7214].

$\theta$ 的置信区间和最优加权系数(见表 2)为:

表 2 一个服从高斯分布的传感器和一个服从均匀分布的传感器的区间融合

Table 2 Interval fusion for a uniform observation sensor and gaussian sensor

| | $\theta$ 的置信区间 | 最优的加权系数 |
|---|---|---|
| 凸线性融合 | $\theta \in [9.8896, 10.8313]$ | $\omega_1 = 0.991, \omega_2 = 0.009$ |
| 第一个分站 | $\theta \in [9.8244, 10.8933]$ | $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0$ |
| 第二个分站 | $\theta \in [9.3181, 11.1818]$ | $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1$ |

从计算结果可以看出,融合中心的区间估计要好于分站的区间估计,并且第一个分站的估计也要好于第二个分站的估计,这也是符合情理的.事实上,第一个分站统计量的方差为 1/10,第二个分站统计量的方差为 $\theta^2/120$,当 $\theta \geqslant \sqrt{12}$时,第二个分站统计量的方差要大于第一个分站统计量的方差.因此, $\omega_1 \geqslant \omega_2$.

**例 3** 设 3 个传感器观测数据,估计参数 $\theta \leq 11$.第一个传感器观测数据为 $\{x_1,\cdots,x_{10}\}$,服从均匀分布 $(0,\theta)$,它的统计量为 $T_1(X) = \max(x_1,\cdots,x_4)$,我们知道 $\frac{11}{10}T_1(X)$ 是参数 $\theta$ 的无偏估计,重新定义 $\frac{11}{10}T_1(X)$ 为 $T_1(X)$,则 $T_1(X)$ 的密度函数为 $f_{T_1}(t_1) = \left(\frac{10}{11}\right)^{10} 10t_1^9/\theta^{10}, 0 \leq t_1 \leq \frac{11}{10}\theta$.第二个传感器观测数据为 $\{y_1,\cdots,y_{10}\}$,服从高斯分布 $N(\theta,1)$,它的统计量为 $T_2(Y) = \sum_i y_i/10$, $T_2$ 服从分布 $N(\theta, 1/10)$.第三个传感器观测数据为 $\{z_1,\cdots,z_{10}\}$,服从高斯分布 $N(\theta,\beta^2/10)$,它的统计量为 $T_3(Z) = \sum_i z_i/10$, $T_3$ 服从分布 $N(\theta,\beta^2/10)$,并且假设 $X$, $Y$ 和 $Z$ 是相互独立的.

由于对三个分站进行融合,采用枢轴量方法,则计算量太大,因此我们采用近似区间估计融合的方法.经过简单的计算,我们得到 $E(T_1-\theta)^2 = \frac{\theta^2}{120}$.由于 $T_1$, $T_2$ 和 $T_3$ 相互独立,利用结论 1 有

$$\omega_1 = \frac{120}{\theta^2}\Big/\left(\frac{120}{\theta^2} + 10 + 10/\beta^2\right),$$

$$\omega_2 = 10\Big/\left(\frac{120}{\theta^2} + 10 + 10/\beta^2\right),$$

$$\omega_3 = \frac{10}{\beta^2}\Big/\left(\frac{120}{\theta^2} + 10 + 10/\beta^2\right),$$

$$E(\omega_1 T_1+\omega_2 T_2+\omega_3 T_3-\theta)^2 = \left(\frac{120}{\theta^2}+10+10/\beta^2\right)^{-1}.$$

因为 $\theta \leq 11$ 并且设参数 $\beta = 0.2$, 所以 $\sup_\theta \min E(\omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_3 T_3 - \theta)^2$ 的解为:

$$\omega_1 = 0.0038,\ \omega_2 = 0.0383,\ \omega_3 = 0.9579$$

$$E(\omega_1 T_1 + \omega_2 T_2 + \omega_2 T_3 - \theta)^2 = 0.0038.$$

根据以上结果和具体的抽样数据:

第一个传感器的观测数据为:

[2.9741, 0.4916, 6.9318, 6.5011, 9.8299, 5.5267, 4.0007, 1.9879, 6.2520, 7.3336].

第二个传感器的观测数据为:

[9.1095, 10.1391, 9.7639, 9.9245, 9.6414, 7.9224, 9.8565, 11.3933, 10.6518, 9.6229].

第三个传感器的观测数据为:

[9.8677, 10.0498, 9.9233, 9.8943, 10.0111, 10.2508, 9.4960, 10.1170, 9.7984, 10.1889].

$\theta$ 的置信区间和最优加权系数(见表 3)为:

表 3 一个服从均匀分布的传感器和两个高斯分布的传感器的区间融合

Table 3 Interval fusion for a uniform observation sensor and two gaussian sensors

| | $\theta$ 的置信区间 | 最优的加权系数 |
|---|---|---|
| 近似区间估计融合 | $\theta \in [9.7575, 10.1489]$ | $\omega_1 = 0.0038$, $\omega_2 = 0.0383$, $\omega_3 = 0.9579$ |
| 第一个分站 | $\theta \in [9.8299, 11.7959]$ | $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$ |
| 第二个分站 | $\theta \in [9.2681, 10.3369]$ | $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = 0$ |
| 第三个分站 | $\theta \in [9.7207, 10.1987]$ | $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 1$ |

在上面的例子中,置信系数为 0.9,但是事实上近似最优线性融合的置信系数可能大于 0.9.因此,为了得到更短的估计区间,这种方法适用于较多分站的情况.从上面的例子可以看出,融合中心的置信区间的长度要小于任何分站的置信区间长度.第三个分站的估计区间长度仅仅略差于融合中心,因为它的统计方差非常小($<\beta^2/10 \leq 0.0004$).

## 6 结论(Conclusion)

本文在估计融合的理论方面,建立了区间估计融合的基本模型.提出了一种最优区间估计融合——凸线性组合融合,并给出了相应的搜索最优加权系数的迭代算法.由于区间估计理论的关键在于构造合适的关于统计量和参数的枢轴量.我们发现在许多实际问题中,构造合适的枢轴量往往非常困难,因此区间估计理论本身在应用中就存在一定的局限性.本文中我们提出了两种方法来构造枢轴量,并将它们运用于区间估计融合.为了避免构造枢轴量的困难性和减少区间估计的计算量,我们还提出一种基于 Chebyshev 不等式的近似最优线性融合.它主要用于在没有一般方法去构造合适枢轴量时同样可以进行区间估计融合.

## 参考文献(References)

[1] Chong C Y, Mori S, Chang K C. Distributed multitarget multisensor tracking [A]. Bar-Shalom, ed. Multitarget-Multisensor Tracking: Advanced Applications [M]. Norwood, MA: Artech House, 1990

[2] Zhu Y M, Li X R. Best linear unbiased estimation fusion [A]. Proceedings of the International Conference on Multisource Information (Fusion'99) [C]. Sunnyvale, CA, 1999

[3] Li X R, Zhu Y M, Han C Z. Unified optimal linear estimation fusion [A]. The Proceedings of 2000 International Fusion Conference [C]. Paris, 2000

(下转第 891 页)

## 参考文献(References)

[1] Watanabe K, Nobuyama W, Kojima A. Recent advances in control of time delay systems – a tutorial review [A]. Procdings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control [C]. Kobe, Japan, 1996, 2, 2083 – 2089

[2] Zhong Q C. Time delay control and its applications [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 1999 (in Chinese)

[3] Liang C Y. Time delay filter theory and its applications [D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 1999 (in Chinese)

[4] Hara S, Yamamoto Y, Omata T, Nakano M. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1988, 33(7): 659 – 668

[5] Youcef-Toumi K, Ito O. A time delay controller for systems with unknown dynamics [J]. Journal of Dynamic Systems Measurement & Control-Transactions of the ASME, 1990, 22, 113 – 142

[6] Youcef-Toumi K, Ito O. Model reference control using time delay for nonlinear plants with unknown dynamics [A]. Proc. of IFAC World Congress [C]. Munich Germany, 1987

[7] Youcef-Toumi K, Kondo F. Time delay control [A]. Proc. of ACC [C]. Pittsburg, 1989, 1912 – 1917

[8] Song Jun-Gyu, Yoon Yong-San. Feedback control of four-wheel steering using time delay control [J]. International Journal of Vehicle Design, 1998, 19(3): 282 – 298

[9] Chang P H, Park B S, Park K C. Experimental study on improving hybrid position/force control of a robot using time delay control mechatronics [J]. Mechatronics, 1996, 6(8): 915 – 913

[10] Cheng Chi-Cheng, Chen Cheng-Yi. Controller design for an overhead crane system with uncertainty [J]. Control Engineering Practice, 1996, 4(5): 645 – 653

[11] Park J H, Kim Y M, Yim J G. Time-delay sliding mode control for a servo systen [A]. IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Machatronics [C]. NJ, USA: IEEE, P: scataway, 1997: 147

[12] Minnichelli R J, Anagnost J J, Desoer C A. An elementary proof of Kharitonov's stability theorem with extensions [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1989, 34(9): 995 – 998

### 本文作者简介

**钟庆昌** 见本刊 2002 年第 4 期第 504 页.

**谢剑英** 见本刊 2002 年第 2 期第 243 页.

---

(上接第 884 页)

[4] Casella G, Berger R L. Statistical Inference [M]. California: Wadsworth & Brooks/Cole, 1990

[5] Chen X R. Introduction to Mathematical Statistics [M]. Beijing: Science Press, 1981 (in Chinese)

[6] Port S C. Theoretical Probability for Applications [M]. Boston: John Wiley & Loninc., 1994

[7] Mao S S, Wang J L, Pu X L, et al. Advanced Mathematical Statistics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998 (in Chinese)

[8] Zhu Y M. Multisensor Decision and Estimation Fusion [M]. Hong Kong: Kluwer Academic Publishers, 2002 (in Chinese)

[9] Bar-Shalom Y. Multitarget-Multisensor Tracking: Advances and Applications [M]. Norwood, MA: Artech House, 1990 & 1992, Vol. 1 & 2

[10] Bar-Shalom. On the track-to-track correlation problem [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1981, 26(4): 571 – 572

[11] Bar-Shalom Y, Li X R. Multitarget-Multisensor Tarcking: Principle and Techniques [M]. Norwood, MA: Artech House, 1995

### 本文作者简介

**甘 宇** 1974 年生. 现为四川大学数学学院博士. 研究领域: 统计判决理论, 数据融合等. Email: ganyu712@yahoo.com.cn

**朱允民** 1944 年生. 现为四川大学数学学院博士生导师. 研究领域: 多传感器分布式数据融合, 估计理论等. Email: ymzhu@scu.edu.cn