

一类关联不确定离散系统的分散保性能控制*

陈国定, 俞立, 杨马英

(浙江工业大学 信息工程学院, 杭州 310032)

摘要: 结合一个给定的二次型性能指标, 研究一类关联不确定离散大系统的分散保性能状态反馈控制器设计问题. 采用线性矩阵不等式处理方法, 导出了分散控制器存在的条件, 并给出了一组分散保性能控制器的参数化表示, 据此, 通过建立和求解一个凸优化问题给出了使得闭环性能指标的上界最小化的最优分散保性能控制器设计方法.

关键词: 关联系统; 分散控制; 保性能控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Decentralized guaranteed cost control of a class of interconnected uncertain discrete-time systems

CHEN Guo-ding, YU Li, YANG Ma-ying

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

Abstract: This paper focuses on the design problem of decentralized guaranteed cost state feedback controllers for a class of interconnected uncertain discrete-time systems and a given quadratic cost function. By using the linear matrix inequality (LMI) approach, sufficient conditions for the existence of the decentralized controllers are derived, and a parametrized characterization of a set of decentralized guaranteed cost controllers (if they exist) is provided. Furthermore, a convex optimization problem is formulated to select the optimal decentralized guaranteed cost controller which minimizes the upper bound of the closed-loop cost function.

Key words: interconnected systems; decentralized control; guaranteed cost control; LMI

1 引言(Introduction)

近年来, 结合一个二次型性能指标, 对具有参数不确定性系统的保性能控制问题得到了越来越多的研究, 其目的是设计一个控制器, 使得对所有允许的不确定性, 闭环系统不仅是稳定的, 而且闭环性能指标值不超过某个确定的上界. 基于 Riccati 方程方法和线性矩阵不等式方法, 发表了一系列保性能控制器的设计方法^[1~7]. 另一方面, 随着系统的复杂化和控制所涉及领域的不断扩大, 关联系统控制方法的研究也日益受到人们的重视. 特别的, 基于经济性和可靠性方面的考虑, 分散控制是大系统的一种十分有效的控制方法. 由于系统的复杂性, 系统的不确定性更是不可避免, 针对关联不确定系统的鲁棒分散控制问题, 近年来也提出了一系列有效方法^[8,9]. 但结合二次型性能指标, 对关联不确定系统的分散保性能控制问题还少有研究结果报道.

本文针对一类具有参数不确定性和非线性关联方式的关联离散系统, 结合一个二次型性能指标, 研究其分散保性能状态反馈控制器的设计问题. 采用线性矩阵不等式处理方法, 导出了分散保性能控制器的存在条件和设计方法.

2 问题的描述(Problem description)

考虑由以下 N 个子系统组成的关联系统:

$$x_i(k+1) = (A_i + \Delta A_i)x_i(k) + (B_i + \Delta B_i)u_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij})g_{ij}(x_j), \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, N$, 其中 $x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 和 $u_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 分别是第 i 个子系统的状态向量和控制输入, A_i, B_i 和 G_{ij} 是具有适当维数的实常数矩阵, $g_{ij}(x_j) \in \mathbb{R}^{l_{ij}}$ 是未知的非线性向量函数, 表示第 i 个子系统和第 j 个子系统之间的关联, $\Delta A_i, \Delta B_i$ 和 ΔG_{ij} 是反映系统中参数不确定性的未知实矩阵, 它们可以是时变的.

* 基金项目: 国家自然科学基金(69974036)和浙江省自然科学基金(601072)资助项目.

收稿日期: 2000-09-11; 收修改稿日期: 2001-07-02.

本文考虑的参数不确定矩阵 $\Delta A_i, \Delta B_i$ 和 ΔG_{ij} 假定是范数有界的, 并具有以下的形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_i & \Delta G_{i1} & \Delta G_{i2} & \cdots & \Delta G_{iN} \end{bmatrix} = H_i F_i \begin{bmatrix} E_{1i} & E_{2i} & N_{i1} & N_{i2} & \cdots & N_{iN} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, N$, 其中 $F_i \in \mathbb{R}^{\alpha_i \times \beta_i}$ 是满足 $F_i^T F_i \leq I_{\beta_i}$ 的未知实矩阵, $H_i, E_{1i}, E_{2i}, N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{iN}$ 是适当维数的已知实矩阵. 子系统之间的关联可以是复杂未知和非线性的, 但假定满足以下的关系式:

$$\|g_{ij}(x_j)\| \leq \|W_{ij} x_j\|, \quad (3)$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$, 其中 W_{ij} 是已知的实常数矩阵.

系统(1)的性能指标定义成:

$$J = \sum_{i=1}^N \sum_k [x_i'(k) Q_i x_i(k) + u_i'(k) R_i u_i(k)], \quad (4)$$

其中 $Q_i = Q_i^T > 0, R_i = R_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, N$, 是给定的加权矩阵.

假定每个子系统的状态都是可以直接测量得到的, 则本文的目的是确定一个分散状态反馈控制器

$$u_i(k) = K_i x_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

使得对所有允许的参数不确定性, 闭环复合系统是渐近稳定的, 且闭环性能指标值不超过某个确定的上界. 为此我们首先给出以下的定义.

定义 1 对系统(1)和性能指标(4), 如果存在一组矩阵 K_i 和一组正定矩阵 $P_i, i = 1, 2, \dots, N$, 使得对所有非零的 $x = [x_1' \ x_2' \ \cdots \ x_N']^T$ 和所有允许的不确定性,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \{ [(A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i) K_i) x_i(k) + \\ & \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij}) g_{ij}(x_j)]' P_i \cdot \\ & [(A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i) K_i) x_i(k) + \\ & \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij}) g_{ij}(x_j)] - \\ & x_i'(k) P_i x_i(k) + x_i'(k) (Q_i + K_i^T R_i K_i) x_i(k) \} < 0, \end{aligned} \quad (6)$$

则分散控制器 $u_i(k) = K_i x_i(k), i = 1, 2, \dots, N$, 称为是系统(1)和性能指标(4)的一个具有性能矩阵 P_i 的分散保性能控制器.

以下定理揭示了分散保性能控制器的作用.

定理 1 如果 $u_i(k) = K_i x_i(k), i = 1, 2, \dots, N$, 是系统(1)和性能指标(4)的一个具有性能矩阵 P_i 的分散保性能控制器, 则对所有允许的参数不确定性, 相应的闭环系统是渐近稳定的, 且闭环性能指

标满足

$$J \leq \sum_{i=1}^N x_i'(0) P_i x_i(0). \quad (7)$$

其中 $x_i(0)$ 是第 i 个子系统的初始状态, $i = 1, 2, \dots, N$.

证 在定理条件下, 在系统(1)中应用控制器 $u_i(k) = K_i x_i(k), i = 1, 2, \dots, N$, 得到的闭环系统是

$$x_i(k+1) = (A_{ci} + \Delta A_{ci}) x_i(k) + \sum_{j=1}^N (G_{ij} + \Delta G_{ij}) g_{ij}(x_j). \quad (8)$$

其中

$$A_{ci} = A_i + B_i K_i, \Delta A_{ci} = H_i F_i E_{ci},$$

$$E_{ci} = E_{1i} + E_{2i} K_i.$$

定义

$$V(k) = \sum_{i=1}^N x_i'(k) P_i x_i(k),$$

利用不等式(6), 沿系统(8)的任意轨线, $V(k)$ 的前向一阶差分 $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ 满足

$$\Delta V(k) < - \sum_{i=1}^N x_i'(k) (Q_i + K_i^T R_i K_i) x_i(k) < 0. \quad (9)$$

因此, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 系统(8)是渐近稳定的.

进而, 从不等式(9)得到

$$\sum_{i=1}^N x_i'(k) (Q_i + K_i^T R_i K_i) x_i(k) < - \Delta V(k).$$

在上式两边对 k 从 $k = 0$ 到 $k = \infty$ 求和, 利用系统的稳定性, 可得

$$J \leq V(0) = \sum_{i=1}^N x_i'(0) P_i x_i(0),$$

定理得证.

注意到定理 1 中给出的闭环性能指标的上界依赖初始条件 $x_i(0)$. 然而在许多实际问题中, 系统的初始状态很难精确确定, 但可以认为是有界的. 本文假定第 i 个子系统的初始状态是任意的, 但在子集 $S_i = \{x_i(0) \in \mathbb{R}^{n_i} : x_i(0) = U_i v_i, v_i^T v_i \leq 1\}$ 中, 其中 U_i 是一个已知的常数矩阵. 这样, 从式(7)可以得到

$$J \leq \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(U_i^T P_i U_i),$$

其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵 $(\cdot)$ 的最大特征值.

3 主要结论(Main results)

以下定理给出了系统(1)和性能指标(4)存在一个分散保性能控制器的条件和确定分散保性能控制器的方法.

定理 2 对系统(1)和性能指标(4), 如果存在

正常数 ε_i , 正定矩阵 V_i 和矩阵 T_i , 使得以下的矩阵不等式成立,

$$\begin{bmatrix} -V_i + \varepsilon_i H_{1i} H_{1i}' & A_i V_i + B_i T_i & G_i & 0 & 0 & 0 \\ * & -V_i & 0 & V_i E_{1i}' + T_i E_{2i}' & V_i \tilde{Q}_i' & T_i' \\ * & * & -I & N_i & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_i I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & -R_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

则系统(1)和性能指标(4)存在分散保性能控制器, 且 $u_i(k) = T_i V_i^{-1} x_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, N$, 是系统(1)和性能指标(4)的一个具有性能矩阵 V_i^{-1} 的分散保性能控制器, 相应的闭环系统性能指标满足

$$J \leq \sum_{i=1}^N \lambda_{\max}(U_i' V_i^{-1} U_i), \quad (11)$$

其中 * 代表由式(10)左边矩阵的对称性得到的矩阵块,

$$G_i = [G_{i1} \quad G_{i2} \quad \cdots \quad G_{iN}],$$

$$N_i = [N_{i1} \quad N_{i2} \quad \cdots \quad N_{iN}],$$

$$\tilde{Q}_i' \tilde{Q}_i = \bar{Q}_i = Q_i + \sum_{j=1}^N W_{ji}' W_{ji}.$$

证 略.

式(10)是一个关于变量 ε_i , V_i 和 T_i 的线性矩阵不等式, 因此, 可以利用现有的求解线性矩阵不等式的方法来求解线性矩阵不等式(10). 根据式(10)的可行性来判断系统(1)和性能指标(4)的分散保性能控制器的存在性. 在式(10)可行的情况下, 定理 2 用线性矩阵不等式(10)的可行解给出了一组分散保性能控制器的参数化表示. 利用这一性质可以进一步求解使得式(11)给出的闭环性能指标上界最小化的最优分散保性能控制器.

注意到对给定的 $\lambda_i > 0$, $\lambda_{\max}(U_i' V_i^{-1} U_i) < \lambda_i$, 当且仅当

$$\lambda_i I - U_i' V_i^{-1} U_i > 0,$$

上式进一步等价于

$$\begin{bmatrix} -\lambda_i I & U_i' \\ U_i & V_i \end{bmatrix} < 0. \quad (12)$$

因此, 最优分散保性能控制器的设计问题可以列成以下的优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon_i, V_i, T_i} \bar{J} &= \sum_{i=1}^N \lambda_i, \\ \text{subject to 式(10), (12), } i &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

这是一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题, 因此可以利用 Matlab 的 LMI Toolbox 中的有关命令求解之.

4 结论(Conclusion)

本文研究了一类不确定关联离散系统的分散保性能控制问题, 采用线性矩阵不等式处理方法, 将分散保性能控制器的存在性和设计问题转化成求解一个线性矩阵不等式问题, 而后者可以应用现有的求解线性矩阵不等式的方法和软件解决. 所得到的分散控制器不仅保证闭环复合系统是鲁棒稳定的, 而且还保证闭环复合系统具有一定的性能.

参考文献(References)

- [1] Petersen I R, McFarlane D C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1994, 39(10): 1971 - 1977
- [2] Petersen I R, McFarlane D C, Rotea M A. Optimal guaranteed cost control of discrete-time uncertain linear systems [J]. Int. J. Robust Nonlinear Control, 1998, 8(9): 649 - 651
- [3] Yu Li, Wang Jingcheng, Chu Jian. Guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems [J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(3): 414 - 417 (in Chinese)
- [4] Yu Li. Optimal guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(5): 639 - 642 (in Chinese)
- [5] Yu Li, Chu Jian. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems [J]. Automatica, 1999, 35(6): 1155 - 1159
- [6] Guan X, Lin Z, Duan G. Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with delay [J]. IEE Proc. -Control Theory and Application, 1999, 146(6): 598 - 602
- [7] Mahmoud M S, Xie L. Guaranteed cost control of uncertain discrete systems with delays [J]. Int. J. Control, 2000, 73(2): 105 - 114
- [8] Chen Guoding, Yu Li. Decentralized stabilization of interconnected dynamical time-delay systems [J]. Control and Decision, 2000, 15(1): 92 - 94 (in Chinese)
- [9] Xie Yongfang, Gui Weihua, Wu Min. The Suboptimal design of decentralized H_2/H_∞ control based on linear matrix inequality [J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(2): 263 - 266 (in Chinese)
- [10] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. Int. J. Control, 1996, 63(4): 741 - 750

本文作者简介

陈国定 见本刊 2002 年第 2 期 246 页.

俞立 见本刊 2002 年第 2 期 246 页.

杨马英 见本刊 2002 年第 2 期 246 页.