

l^1 鲁棒辨识: 一种递推插值方法*

李昇平

(汕头大学 机械电子工程系, 广东汕头 515063)

摘要: 针对 l^1 鲁棒辨识不能有效利用试验数据和进行在线辨识的问题, 提出了一种在线递推插值辨识方法. 用几何方法描述试验信息, 利用系统可行集与新的试验信息所构成的半空间的包含关系判断数据信息, 有效地利用了试验数据, 提高了辨识精度. 同时提出了一种新的计算辨识误差紧界的方法. 仿真结果表明了算法的有效性和可行性.

关键词: 鲁棒辨识; 模型集; 插值方法; 递推算法

中图分类号: O231.3

文献标识码: A

l^1 robust identification: a recursive interpolatory algorithm

LI Sheng-ping

(Department of Mechantronics Engineering, Shantou University, Guangdong Shantou 515063, China)

Abstract: This paper proposes an on-line recursive interpolatory algorithm for the l^1 robust identification problem. The new idea is to describe the experiment information and apirio information about system and noise by geometric approach. Then we can determine whether or not the new experiment data contains innovations by the containing relation of model set determined by old data and the set formed from new data, meanwhile, the uncertainty of model set is reduced by effectively using the innovations contained in new data. Thus, the identification algorithm proposed can effectively use the experiment data and improves the identification precision. Finally analysis of the proposed recursive algorithm is carried out and a simulation example is presented to demonstrate the effectiveness of the algorithm.

Key words: robust identification; model set; interpolatory algorithm; recursive algorithm

1 引言(Introduction)

鲁棒辨识是近年来发展起来的一种系统辨识方法, 现已成为系统辨识领域最为活跃的分支之一. 根据模型空间所赋范数不同构成不同的鲁棒辨识问题, 其中具有代表性的问题有 H_∞ 辨识问题和 l^1 辨识问题^[1~4]. H_∞ 辨识算法利用时域或频域数据映成 H_∞ 空间的模型集, 是一种与 H_∞ 控制相配合的辨识方法, 这方面的研究见文献[5]. l^1 辨识是一类与 H_∞ 辨识平行的鲁棒辨识问题, l^1 辨识的目的是把系统的先验信息和时域输入输出信息映成一个名义模型, 同时得到该名义模型对于真实系统的 l^1 范数误差界, 名义模型与误差界一起构成辨识模型集. 迄今, 对 l^1 鲁棒辨识问题已提出若干解决方法, 其中最为成熟的方法应为插值方法. 插值方法本质上是在系统先验信息和试验信息决定的可行模型集中确定一点的方法. 如果受辨系统为线性系统, 则插值问

题可归结为凸规划问题进行求解, 而凸规划问题存在有效求解方法. 插值方法的这种可计算性和业已证明的近似最优性^[3,6], 使之成为 l^1 辨识的最为有效的方法. 但现有的插值方法只能利用试验开始的若干输入输出信息, 所能利用的信息量取决于事先确定的名义 FIR 模型的阶数. 因此不能有效地适用于在线辨识, 并且由于不能利用足够多的输入输出信息而使得到的名义模型比较保守. 本文用半空间描述系统的输入输出信息和先验信息, 提出了一种递推插值算法, 不仅有效地克服了现有结果的缺陷, 而且算法简单便于实现.

2 问题描述(Problem formulation)

先引入本文将用到的记号. l_1 空间记为 $l_1 = \{h \mid \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty\}$; l_1 范数定义为 $\|h\|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |h(k)|$, $h \in l_1$ 表示稳定的线性时不变系统的

* 基金项目: 广东省自然科学基金(990795)和国家计委工业自动化产业化子项目资助项目.

收稿日期: 2000-02-17; 收修改稿日期: 2001-04-16.

脉冲响应序列,定义 $Bl_1(M) = \{h \in l_1 \mid \|h\|_1 \leq M\}$; 记空间 $l_\infty = \{y \mid \sup_{0 \leq k < \infty} |y(k)| < \infty\}$, l_∞ 范数定义为 $\|y\|_\infty = \sup_{0 \leq k < \infty} |y(k)|$; 记 T_{k-1} 为 k 维截断算子, 即对任意序列 h , $T_k h = \{h(i)\}_{i=0}^k$; 用 $\emptyset$ 表示空集.

考虑受辨系统为单变量离散时间系统, 其输入输出量测方程为:

$$y = h * u + d. \quad (1)$$

式中, u, y 为系统的输入输出, d 为量测噪声.

受辨系统和输入输出信息满足如下先验假设:

1) $h \in A$, 其中, A 取为子集

$$l_1(M, \rho) := \{h \in l_1 \mid |h(k)| \leq M\rho^{-k}, \forall k\}. \quad (2)$$

其中, $M > 0, \rho > 1$ 刻画了受辨系统脉冲响应序列的衰减情况.

2) $u \in l_\infty, y \in l_\infty, d \in Bl_\infty(\epsilon)$, 其中, $Bl_\infty(\epsilon) = \{d \in l_\infty \mid \sup_{0 \leq k < \infty} |d(k)| = \epsilon, \epsilon \geq 0\}$, 其中 ϵ 已知.

l^1 鲁棒辨识问题可叙述为: 构造辨识算法 φ , 使之对任意受辨系统 $h \in A$, 能利用 h 的输入和不精确输出信息 y 获得 h 的 N 阶 FIR 名义模型 $\varphi_N(y, u)$. 同时还要估计 φ 在最坏情况下可能产生的误差 $e_{N,\epsilon}(\varphi) := \sup_{\substack{h \in A \\ d \in Bl_\infty(\epsilon)}} \|\varphi_N(y, u) - h\|_1$ 的上

界, 并分析 $e_{N,\epsilon}(\varphi)$ 是否随着 N 趋于 ∞ 和 ϵ 趋于 0 而趋近于 0, 该性质成为鲁棒收敛性.

3 插值算法及误差界的确定 (Interpolatory algorithm and error bounds)

用 $S_N(A, y, \epsilon)$ 表示受辨系统的先验信息和输入输出信息决定的可行模型集. 显然, $S_N(A, y, \epsilon) = \{h \in A \mid \|T_{N-1}(y - h * u)\|_\infty \leq \epsilon\}$. 如果算法 φ^I 使得 $\varphi_N^I(y, u) \in S_N(A, y, \epsilon)$, 则称其为插值算法. 插值算法具有如下性质^[3,6,7]:

性质 1 (次最优性质) 对任意插值算法 φ^I , 成立 $e_{N,\epsilon}^* \leq e_{N,\epsilon}(\varphi^I) \leq 2e_{N,\epsilon}^*$. 其中, $e_{N,\epsilon}^* = \inf_{\varphi \in \Omega} e_{N,\epsilon}(\varphi)$, Ω 为全体容许算法的集合.

性质 2 若受辨系统为线性系统, 且 A 为平衡凸集 ($h \in A$ 则必有 $-h \in A$), 则对任意插值算法 φ^I , 有 $e_{N,\epsilon}^0 \leq e_{N,\epsilon}(\varphi^I) \leq 2e_{N,\epsilon}^0$. 其中 $e_{N,\epsilon}^0 = \sup_{\substack{h \in A \\ \|T_{N-1}(h * u)\|_\infty \leq \epsilon}} \|h\|_1$.

性质 3 (鲁棒收敛性) 若 l^1 辨识存在鲁棒收敛算法, 则所有插值算法均为鲁棒收敛算法. 考虑如

下优化问题:

$$\mu = \min_{h \in A} \|T_{N-1}(y - h * u)\|_\infty. \quad (3)$$

定理 1^[3] 若 $\mu > \epsilon$, 则 $S_N(A, y, \epsilon)$ 必为空集. 否则, (3) 的最优解 h^* 必属于 $S_N(A, y, \epsilon)$.

定理 1 表明, 只需求解优化问题 (3), 就可判断 l^1 辨识是否存在插值算法. 若 $S_N(A, y, \epsilon)$ 非空, 则 (3) 的任意最优解均属于可行集 $S_N(A, y, \epsilon)$. 因此对 l^1 辨识问题构造插值算法归结为求解优化问题 (3).

引入非负实因子 λ , 由先验假设 1) 可知, 优化问题 (3) 可转化为如下线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & -\lambda \leq y(k) - (h * u)(k) \leq \lambda, \lambda \geq 0, \\ & -M\rho^{-k} \leq h(k) \leq M\rho^{-k}, \\ & 0 \leq k \leq N-1, h(k) = 0, k \geq N. \end{aligned} \quad (4)$$

用 λ^*, h^* 表示 (4) 的最优解. 若 $\lambda^* \leq \epsilon$, 则由定理 4 可知 $S_N(A, y, \epsilon)$ 非空, 构造如下辨识算法:

$$(\varphi_N^I(y, u))_k = \begin{cases} h^*(k), & 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & k \geq N. \end{cases} \quad (5)$$

由定理 1 可知, $\varphi_N^I(y, u) \in S_N(A, y, \epsilon)$, 算法 (5) 为插值算法, $\varphi_N^I(y, u)$ 为名义模型.

现在确定算法 (5) 的辨识误差上界. 一般根据性质 2 估计误差上界更容易些, 但仍需在凸集上求凸函数的最大值. 因此现有文献都不得不采取保守估计的办法^[3]. 这里我们给出一种误差紧界的估计方法.

由性质 2 可知, 要确定误差上界只需求解优化问题: $e_{N,\epsilon}^0 = \sup_{\substack{h \in A \\ \|T_{N-1}(h * u)\|_\infty \leq \epsilon}} \|h\|_1$. 定义如下优化问题:

$$\begin{aligned} \mu = \max \quad & \sum_{k=0}^{N-1} |h(k)|, \\ \text{s.t.} \quad & -\epsilon \leq (h * u)(k) \leq \epsilon, \\ & -M\rho^{-k} \leq h(k) \leq M\rho^{-k}, 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

显然, $e_{N,\epsilon}^0 = \mu + \sum_{k=N}^{\infty} M\rho^{-k} = \mu + M \frac{\rho^{-N+1}}{\rho - 1}$, 因此, 确定误差上界的问题可归结为解优化问题 (6). 引入非负实因子 $h^+(k), h^-(k)$, 使得 $h(k) = h^+(k) - h^-(k)$, 则 $\sum_{k=0}^{N-1} |h(k)| = \sum_{k=0}^{N-1} [h^+(k) + h^-(k)]$ ^[8], $0 \leq k \leq N-1$, 由此可得如下结论:

定理 2 优化问题 (6) 等价于如下线性规划问题:

$$\mu = \max \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [h^+(k) + h^-(k)] \right\}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & -\varepsilon \leq ((h^+ - h^-) * u)(k) \leq \varepsilon, \\ & -M\rho^{-k} \leq h^+(k) - h^-(k) \leq M\rho^{-k}, \\ & h^+(k) \geq 0, h^-(k) \geq 0, 0 \leq k \leq N-1. \end{aligned}$$

用 $h^+(k)^*$, $h^-(k)^*$ 表示问题的解, 则 $\mu = h^+(k)^* + h^-(k)^*$.

证 由 $h(k) = h^+(k) - h^-(k)$ 和 $\sum_{k=0}^{N-1} |h(k)| = \sum_{k=0}^{N-1} [h^+(k) + h^-(k)]$ 容易得证.

4 递推插值算法 (Recursive interpolatory algorithm)

由上节可知, 插值算法只能利用 N 组输入输出数据, 这里 N 为预先确定的名义 FIR 模型的维数. 下面我们用半空间描述输入输出信息, 提出一种递推插值算法.

当 $k \geq N$ 时, 方程(1)可写成:

$$y(k) = \sum_{j=k-N+1}^k h(k-j)u(j) + \sum_{j=0}^{k-N} h(k-j)u(j) + d(k). \quad (8)$$

考虑到先验知识, $-M\rho^{-k} \leq h(k) \leq M\rho^{-k}$ 和 $-\varepsilon \leq d(k) \leq \varepsilon$, (8)式可写成:

$$|(y - (T_{N-1}h) * u)(k)| \leq M \sum_{t=N}^k |u(k-t)| \rho^{-t} + \varepsilon. \quad (9)$$

因此, 第 k 时刻的可行集可写成:

$$\begin{aligned} S_k(A, y, \varepsilon) = & \left\{ \bigcap_{j=0}^{N-1} \{h \in A \mid |(y - h * u)(j)| \leq \varepsilon\} \right\} \cap \\ & \left\{ \bigcap_{j=N}^k \{h \in A \mid |(y - (T_{N-1}h) * u)(j)| \leq \right. \\ & \left. M \sum_{t=N}^j |u(k-t)| \rho^{-t} + \varepsilon\} \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

引入正实因子 σ 和集合:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma) = & \left\{ \bigcap_{j=0}^{N-1} \{h \in A \mid |(y - h * u)(j)| \leq \sigma \cdot \varepsilon\} \right\} \cap \\ & \left\{ \bigcap_{j=N}^k \{h \in A \mid |(y - (T_{N-1}h) * u)(j)| \leq \right. \\ & \left. \sigma \cdot (M \sum_{t=N}^j |u(k-t)| \rho^{-t} + \varepsilon)\} \right\}, \end{aligned}$$

$$P_k(A, y, \varepsilon, \sigma) = \{\sigma \mid \tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma) \neq \emptyset\}.$$

考虑如下优化问题:

$$\min \{\sigma \mid \text{s.t. } \sigma \in P_k(A, y, \varepsilon, \sigma)\}. \quad (11)$$

显然, 当 $0 \leq k \leq N-1$ 时, (11) 与优化问题(3)等价, 并且有如下结论:

定理 3 对任意 $k \geq 0$, l^1 辨识问题存在插值算法的充分必要条件为: (11) 的最优解 $\sigma^* \leq 1$.

证 l^1 辨识问题存在插值算法的充分必要条件为 $S_k(A, y, \varepsilon) \neq \emptyset$. 若 $\sigma^* \leq 1$, 则 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma) \subseteq S_k(A, y, \varepsilon)$, 而 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma) \neq \emptyset$, 充分性成立. 若 $\sigma^* > 1$, 则 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma = 1) = \emptyset$, 而 $S_k(A, y, \varepsilon) = \tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma = 1)$, 因此必要性成立.

证毕.

定理 3 表明, 当 $\sigma^* > 1$ 表明先验信息与试验信息矛盾, 应加大干扰信号 d 的幅值. 若 $\sigma^* \leq 1$, 则 l^1 鲁棒辨识问题存在插值算法, 并且 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma^*)$ 中任意元素都属于 $S_k(A, y, \varepsilon)$, 为 l^1 鲁棒辨识问题的次最优解. 这表明 $k \geq N$ 时插值问题可转化为解(11).

注意到 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma)$ 实质上是一个多面体, 该多面体的边界由构成 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma)$ 的不等式所决定. 下面用几何概念表示 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma)$, 引入如下记号:

$$\begin{aligned} H_j^-(\delta) = & \{(T_{N-1}h_u \quad \delta) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid ((T_{N-1}h) * u)(j) - \\ & \delta \cdot (M \sum_{t=N}^j |u(k-t)| \rho^{-t} + \varepsilon) \leq y(j)\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} H_j^+(\delta) = & \{(T_{N-1}h_u \quad \delta) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid ((T_{N-1}h) * u)(j) + \\ & \delta \cdot (M \sum_{t=N}^j |u(k-t)| \rho^{-t} + \varepsilon) \leq y(j)\}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$H_j(\delta) = H_j^-(\delta) \cap H_j^+(\delta). \quad (14)$$

显然

$$\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma) = \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta = \sigma). \quad (15)$$

或者说 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma)$ 是 $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$ 的超平面为 $\delta = \sigma$ 的横截面, 而(11)的最优目标函数值正是使截面 $\tilde{S}_k(A, y, \varepsilon, \sigma)$ 非空时坐标 δ 的最小正数. 显然(11)的最优解不一定是唯一的, 但必存在一个最优解在多面体 $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$ 的顶点处达到, 而该顶点为(12)或(13)所描述的半空间边界之交点. 对构造递推算法而言, 关键问题是: 1) 如何判定新的试验数据是否包含新息? 2) 如何充分利用试验数据所含新息? 下面讨论这些问题.

由(12), (13) 和(14) 可知,第 $k+1$ 时刻的试验数据可用两个半空间的交 $H_{k+1}(\delta)$ 来描述,记利用第 k 时刻以前的数据解(11) 所得最优解为 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$.

定理 4 优化问题 $\min\{\sigma \mid \text{s.t. } \sigma \in P_{k+1}(A, y, \epsilon, \sigma)\}$ 与 $\min\{\sigma \mid \text{s.t. } \sigma \in P_k(A, y, \epsilon, \sigma)\}$ 有相同的最优解 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 的充分必要条件为: $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \in H_{k+1}(\delta)$.

证 充分性. 注意到 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 为第 k 时刻优化问题(11) 的最优解($T_{N-1}h_k^*$ 不一定是唯一的), 相应的 $T_{N-1}h_k^*$ 构成集合 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma_k^*)$, 由(15) 式可知 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma_k^*) = \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta = \sigma_k^*)$. 如果 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \in H_{k+1}(\delta)$, 那么 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma_k^*) \subseteq H_{k+1}(\delta = \sigma_k^*)$, 这表明 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma_k^*) \bigcap_{j=0}^{k+1} H_j(\delta = \sigma_k^*)$. 另一方面, 因 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 为第 k 时刻优化问题(11) 的最优解, 所以 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma < \sigma_k^*) = \emptyset$, 由(15) 式可知, $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta < \sigma_k^*) = \emptyset$, 于是 $\bigcap_{j=0}^{k+1} H_j(\delta < \sigma_k^*) = \emptyset$, 即, $\tilde{S}_{k+1}(A, y, \epsilon, \sigma < \sigma_k^*) = \emptyset$. 这就证明了 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 同时也是 $\min\{\sigma \mid \text{s.t. } \sigma \in P_{k+1}(A, y, \epsilon, \sigma)\}$ 的最优解.

必要性. 若 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \notin H_{k+1}(\delta)$, 则 $T_{N-1}h_k^* \notin H_{k+1}(\delta = \sigma_k^*)$, 这表明 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma_k^*) \not\subseteq H_{k+1}(\delta = \sigma_k^*)$, 故 $\tilde{S}_k(A, y, \epsilon, \sigma_k^*) \not\subseteq \bigcap_{j=0}^{k+1} H_j(\delta = \sigma_k^*)$. 因此 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 不是 $\min\{\sigma \mid \text{s.t. } \sigma \in P_{k+1}(A, y, \epsilon, \sigma)\}$ 的最优解. 证毕.

定理 4 回答了上述问题 1), 若 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \in H_{k+1}(\delta)$, 则数据 $(u(k+1), y(k+1))$ 不含新息, 在递推算法中应不予考虑. 若 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \notin H_{k+1}(\delta)$, 则数据 $(u(k+1), y(k+1))$ 含有新息, 利用其新息可改进对名义模型的估计.

基于上述讨论, 给出如下递推算法:

i) 处理第 N 时刻前的 $N+1$ 组试验数据, 解如下线性规划问题:

$$\min\{\sigma_N \mid \text{s.t. } (T_N h \sigma_N) \in \bigcap_{j=0}^N H_j(\delta)\},$$

得最优解 $(T_{N-1}h_N^* \quad \sigma_N^*)$, 最优解可能不止一个, 但由线性规划算法可知总可确定一最优解使之成为 $\bigcap_{j=0}^N H_j(\delta)$ 的某一顶点. 存储确定该点的 $N+1$ 个半空间 $H_j^-(\delta)$ 或 $H_j^+(\delta)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$), 将 $T_{N-1}h_N^*$ 代入式(5)得名义模型.

ii) 处理第 $k+1$ 时刻数据 $(u(k+1), y(k+1))$. 按(12), (13), (14) 式构造 $H_{k+1}(\delta)$, 验算 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 是否属于 $H_{k+1}(\delta)$. 若是, 则令 $(T_{N-1}h_{k+1}^* \quad \sigma_{k+1}^*) = (T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$, 同时剔除 $(u(k+1), y(k+1))$, 然后回到 ii) 处理新数据; 否则转下一步.

iii) 因 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \notin H_{k+1}(\delta)$, 由(14) 可知存在一个构成 $H_{k+1}(\delta)$ 的半空间不含该点, 不妨设 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*) \notin H_{k+1}^-(\delta)$. 从交于 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 的 $N+1$ 个半空间 $N_j^-(\delta)$ 或 $H_j^+(\delta)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N$) 中任取 N 个与 $H_{k+1}^-(\delta)$ 相交可得 $N+1$ 个交点, 从中取出使分量 δ 为最小的点, 记为 $(T_{N-1}h_{k+1}^* \quad \sigma_{k+1}^*)$, 重新存储交于该点的 $N+1$ 个半空间, 将 $T_{N-1}h_{k+1}^*$ 代入式(5) 得到名义模型. 若要继续辨识, 则令 $k = k+1$, 转 ii) 处理新数据, 否则结束.

现在研究上述问题 2), 即上述递推算法能否充分利用试验数据所含新息?

定理 5 对任意时刻 k , 若上述递推算法与优化问题(11) 均有唯一最优解, 则递推算法与优化问题(11) 有相同解.

证 为区分递推算法与优化问题(11) 的解, 递推算法解用 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$ 表示, 递推算法对应的集合 $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$ 记为 $\bigcap_{j=0,k} H_j(\delta)$. 证明分两步进行.

首先证明

$$(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \in \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta) \Leftrightarrow$$

$$(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R = (T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*).$$

由递推算法可知 $\bigcap_{j=0,k} H_j(\delta)$ 是由 $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$ 的剔除部分不含新息的半空间后形成的, 所以 $\bigcap_{j=0,k} H_j(\delta) \subseteq \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$, 于是 $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta = \sigma_k^*) \subseteq \bigcap_{j=0,k} H_j(\delta = \sigma_k^*)$, 故 $\sigma_k^* \geq (\sigma_k^*)_R$. 先证 $(\Rightarrow)$ (反证法). 假设 $\sigma_k^* > (\sigma_k^*)_R$, 根据(15) 式和优化问题(11) 的定义, $\bigcap_{j=0}^k H_j(\delta = (\sigma_k^*)_R)$ 为空集, 这与 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \in \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$, 所以 $\sigma_k^* = (\sigma_k^*)_R$, 又递推算法与(11) 均有唯一最优解, 所以 $(\Rightarrow)$ 成立; 再证 $(\Leftarrow)$. 若 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R = (T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$, 则 $\bigcap_{j=0,k} H_j(\delta = (\sigma_k^*)_R) = \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta = \sigma_k^*)$, 于是, $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R = \bigcap_{j=0,k} H_j(\delta = (\sigma_k^*)_R) = \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta = \sigma_k^*)$, 故 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R = (T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)$.

$$\sigma_k^*)_R = \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta).$$

然后证明 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \in \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$ (反证法). 假设 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \notin \bigcap_{j=0}^k H_j(\delta)$, 则必存在某个 $l(0 \leq l \leq k)$ 使得 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \notin H_l(\delta)$. 根据递推算法步骤 ii) 中剔除数据的条件, 第 l 时刻的数据含有新息, 将被保留在 $\bigcap_{j=0,k} H_j(\delta)$ 中, 即 $\bigcap_{j=0,k} H_j(\delta) = (\bigcap_{j=0,l} H_j(\delta)) \cap H_l(\delta)$, 但 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \in \bigcap_{j=0,k} H_j(\delta)$, 这与 $(T_{N-1}h_k^* \quad \sigma_k^*)_R \notin H_l(\delta)$ 矛盾. 综合上述过程, 定理得证.

在定理 5 中, 递推算法解的唯一性可由递推算法本身得到保证. 定理 5 表明上述递推算法是一种插值算法, 当 $k \geq N$ 时, 因 $S_k(A, \gamma, \epsilon) \subseteq S_N(A, \gamma, \epsilon)$, 所以 $e_{k,\epsilon}^0 \leq e_{N,\epsilon}^0$, 可用 $e_{N,\epsilon}^0$ 作为递推算法的误差上界. 由性质 (3) 可知, 递推插值算法具有鲁棒收敛性.

5 仿真结果 (Simulation results)

考虑如下不确定性离散系统:

$$G(q^{-1}) = 0.8 + 0.4q^{-1} + 0.15q^{-2} + 0.1q^{-3} + 0.02q^{-4} + 0.008q^{-5} + \Delta.$$

其中, q^{-1} 为后移算子, $\Delta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^{-(k+1)} q^{-k}$, 系统的先验知识取 $A = l_1(1, 2)$. 仿真时量测噪声 d 取 $\|d\|_{\infty} = 0.15$ 的任意序列. 表 1 是用 Matlab 语言的仿真结果.

表 1 仿真结果

Table 1 Simulation results

	$h_k^*(0)$	$h_k^*(1)$	$h_k^*(2)$	$h_k^*(3)$	$h_k^*(4)$	$h_k^*(5)$
$k = 6$	0.9216	0.4695	0.2209	0.0934	0.0451	0.0153
$k = 10$	0.9051	0.4208	0.1994	0.1036	0.0309	0.0122
$k = 15$	0.8621	0.3981	0.1506	0.0941	0.0150	-0.0015
$k = 20$	0.8109	0.4086	0.1479	0.1207	0.0226	0.00928

6 结论 (Conclusion)

本文提出的递推算法解决了鲁棒辨识插值算法

的在线递推实现问题. 用几何方法描述系统和试验信息, 这使得对于新数据是否含有新息的判断可转化为新数据与已有信息之间几何关系的确定, 只需验证两个不等式. 若新数据含有新息, 则通过求解 $N+1$ 个线性方程可改进名义模型的估计. 证明了递推算法可充分利用试验数据的新息. 仿真结果验证了算法的可行性.

参考文献 (References)

- [1] Makila P M, Partington J R, Gustafsson T K. Robust identification [A]. In 10th IFAC Symp. on System Identification [C]. Copenhagen, Denmark, 1993, 1: 1-11
- [2] Feng Xu, Sun Youxian. Comments on robust identification [J]. Control Theory and Applications, 1993, 10(6): 609-616 (in Chinese)
- [3] Wang Shuning. Interpolary algorithm for robust identification [A]. Chinese Control Conference [C]. Qingdao, China, 1996 (in Chinese)
- [4] Li Shengping, Xie Yuanfang, Chai Tianyou. Study of recursive l^1 robust identification algorithm [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(1): 47-51 (in Chinese)
- [5] Helmicki A J, Jacobson C A, Nett C N. Control oriented system identification: worst-case deterministic approach in H_{∞} [J]. IEEE Trans. Automatic. Control, 1991, 36(10): 1163-1176
- [6] Jacobson C A, Nett C N, Partington J R. A worst-case system identification in l^1 : optimal algorithms and error bounds [J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(4): 419-424
- [7] Tse D N, Dahleh M A, Tsitsilis J N. Optimal asymptotic identification under bounded disturbances [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1993, 38(8): 1176-1190
- [8] Mendlovitz M A. A simple solution to the l^1 optimization problem [J]. Systems & Control Letters, 1989, 12(5): 461-463

本文作者简介

李昇平 1966年生. 1995年毕业于华中理工大学自动控制工程系获工学博士学位, 1997年在东北大学自动化研究中心完成博士后工作. 现为汕头大学机械电子工程系副教授. 感兴趣的研究领域为鲁棒控制, 鲁棒辨识, 自适应控制, 智能控制及其在机械振动控制, 机械制造及自动化中的应用. Email: spli@stu.edu.cn