

非线性不确定系统的 H_∞ 滑模控制*

葛 友, 李春文

(清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 对于一类具有不满足匹配条件干扰的非线性不确定系统, 定义了 H_∞ 滑模控制问题 Q_1 . 通过状态变换和状态反馈以及干扰重定义, 提出了线性系统的滑模干扰抑制问题 Q_2 . 问题 Q_2 可以通过解 Riccati 不等式得以解决. 在一定的假设条件下, 证明了可以通过解 Q_2 获得 Q_1 问题的解. 最后给出了保证滑模存在的控制律. 单机无穷大系统励磁控制的计算机仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 不确定性; H_∞ 控制; 滑模控制

中图分类号: TP272

文献标识码: A

H_∞ sliding mode control of nonlinear uncertainty systems

GE You, LI Chun-wen

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: For a class of nonlinear uncertainty systems with mismatching disturbance, this paper defines H_∞ sliding mode control problem Q_1 . Making use of states transformation, states feedback and the disturbance redefinition, this paper defines linear systems sliding mode disturbance attenuation problem Q_2 , which can be resolved by solving Riccati inequation. Then, this paper proves, under certain hypotheses, that the solution of problem Q_1 can be obtained by solving problem Q_2 . Last, the control law, which ensures the existence of sliding mode, is given. The computer simulation results of SMIB excitation control verify the validity of the proposed approach.

Key words: nonlinear system; uncertainty; H_∞ control; sliding mode control

1 前言(Introduction)

作为一种通用的设计方法, 滑模变结构控制(VSC)已经用于各种类型系统的设计, 包括非线性系统、离散时间模型、大系统、分布参数系统和随机系统^[1,2]. 滑模变结构控制最重要的特征对于满足匹配条件的干扰以及不确定性具有完全的适应性, 即在滑模面上的运动表现为一个确定行为的系统. 线性不确定系统的鲁棒滑模目前已经有了较多的研究^[3-6], 其中包括了不满足匹配条件的情形^[3]. 利用反馈线性化方法综合非线性不确定系统也有许多学者进行了研究^[7-9]. 此外结合滑模控制和反馈线性化理论来研究非线性系统的滑模控制也有了一批结果^[1,10]. 但是当非线性系统的不确定性不满足匹配条件时, 如何设计变结构控制律目前的研究还不够深入. 本文结合了反馈线性化理论^[11,12]、 H_∞ 干扰抑制^[13]以及滑模变结构控制^[1,2]研究了一类具有

不满足匹配条件干扰的非线性不确定系统的鲁棒控制问题.

考虑非线性不确定系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \Delta f(x) + (g(x) + \Delta g(x))u + p(x)w, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^l$ 分别表示系统的状态变量、控制变量、外部干扰和调节输出. $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta g(x)$ 是具有相应维数的光滑矩阵. 下面给出不确定性的一些假设.

假设 1 $\Delta f(x)$, $\Delta g(x)$ 满足匹配条件

$$\Delta f(x) = g(x)e(x), \Delta g(x) = g(x)E(x). \quad (2)$$

假设 2 $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, 其中 $p_2(x) = g(x)Q(x)$ 为满足匹配条件项, $p_1(x)$ 为不满足匹配条件的项.

非线性不确定系统 H_∞ 滑模控制问题 Q_1 可以

* 基金项目: 国家自然科学基金(69774011)、国家重点基础研究专项基金(G1998020307)、国家自然科学基金重点基金项目(69934010)和清华大学信息学院 985 基金重点项目(985-01-01).

收稿日期: 2000-10-31; 收修改稿日期: 2002-01-15.

描述为:求取有限时间可达的滑模 $s(x) = 0$, 使得在滑模上系统的运动满足

$$C1: \int_0^T \|y\|_{s(x)}^2 dt \leq \lambda^2 \int_0^T \|w\|_{s(x)}^2 dt, \quad \forall T \geq 0. \quad (3)$$

C2: 系统在滑模上内部稳定.

说明 1 问题 Q_1 可解表明, 存在控制律使得闭环系统在有限时间内到达滑模 $s(x) = 0$, 在滑模面上系统对于不确定性 $\Delta f(x), \Delta g(x)u$ 以及干扰 $p_2(x)w$ 实现了完全抑制, 由于本文所选取的滑模面具有 H_∞ 干扰抑制的性能, 因此当系统处于滑模运动时, 对于不满足匹配条件的干扰 $p_1(x)w$ 具有期望的干扰抑制性能. 正是由于存在滑模以及滑模面上对干扰的有效抑制保证了闭环系统具有较好的动态性能.

在以下部分将给出 Q_1 的可解条件并且给出具体的变结构控制律.

2 反馈线性化 H_∞ 滑模控制 (Feedback linearization H_∞ sliding mode control)

下面来考虑系统(1)的标称系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (4)$$

假设 3 标称系统(4)满足可精确线性化的条件^[11,12]. 即存在坐标变换和状态反馈

$$z = T(x), \quad u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (5)$$

使得在新状态和新输入下, 标称系统(4)可以描述为线性系统

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv, \\ y = Cz. \end{cases} \quad (6)$$

在状态变换和状态反馈(5)的作用下并且考虑到假设 1, 2 和 3, 原系统(1)可以描述为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv + BE(T^{-1}(z))v + Be(T^{-1}(z)) + \\ BQ(T^{-1}(z))w + \frac{\partial T}{\partial x}p_1(T^{-1}(z))w, \\ y = Cz. \end{cases} \quad (7)$$

对于系统(7)选取滑模为

$$S: \{z \in \mathbb{R}^n \mid Sz = 0; \text{rank}(S) = m\}, \quad (8)$$

并且满足

$$\text{rank}(SB) = \text{rank}(S) = \text{rank}(B) = m. \quad (9)$$

由于在滑模面 $Sz = 0$ 上, 系统的运动对于满足匹配条件的不确定性和干扰具有完全的适应性, 因此当考虑系统在滑模面上的运动时, 可以不考虑(7)中的不确定项 $BE(T^{-1}(z))v$ 和 $Be(T^{-1}(z))$ 以及外界

干扰项 $BQ(T^{-1}(z))w$. 因此在滑模面上系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bv_{eq} + \frac{\partial T}{\partial x}p_1(T^{-1}(z))w, \\ Sz = 0, \\ y = Cz. \end{cases} \quad (10)$$

其中 v_{eq} 为系统在滑模面上的等价控制^[1,2]. 不失一般性, 选取 $SB = I_m$, 并且假设 $B = [0 \quad B_2]^T$, 否则由条件(9), 存在正交变换阵 P 使得

$$PP^T = I, \quad PB = [0 \quad B_2]^T.$$

记

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad S = [S_1 \quad S_2],$$

$$C = [C_1 \quad C_2], \quad T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}.$$

由式(9)可以得到 $\text{rank}(S_2) = m$. 此外由假设 2 可以得到

$$P \frac{\partial T}{\partial x} p_1(x) = \begin{bmatrix} p_1'(x) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

令

$$\bar{w} = p_1'(x)w. \quad (12)$$

这时可以将式(10)重新写为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + R\bar{w}, \\ \dot{z}_2 = -Fz_1, \\ y = C_1z_1 + C_2z_2. \end{cases} \quad (13)$$

其中 $F = S_2^{-1}S_1, R = I_{(n-m) \times (n-m)}$.

说明 2 当式(11)中 p_1' 为常值矩阵, 这时对于式(13)而言, 可以令 $\bar{w} = w, R = p_1'$.

对于系统(13), 定义线性系统的滑模干扰抑制问题 Q_2 为: 求取滑模 $Sz = 0$ (即求取 F), 使得系统(13)内部稳定并且有 $\bar{w}$ 到 y 传递函数的 H_∞ 范数满足条件

$$\|G_{wy}(s)\|_{\infty} \leq \bar{\lambda}, \quad \bar{\lambda} > 0. \quad (14)$$

在系统(13)中将 z_1 视为状态, 将 $z_2 = -Fz_1$ 视为状态反馈, 那么问题 Q_2 就等价标准的 H_∞ 控制问题. 当 C_2 列满秩时, Q_2 有解的充分必要条件^[14] 是下述 Riccati 不等式

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{11}^T X + X \bar{A}_{11} + \bar{\lambda}^{-2} X R R^T X + \bar{C}_1^T \bar{C}_1 - \\ & (\bar{X} \bar{A}_{12} + \bar{C}_1^T \bar{C}_2)(\bar{C}_2^T \bar{C}_2)^{-1}(\bar{A}_{12}^T X + \bar{C}_2^T \bar{C}_1) < 0, \end{aligned} \quad (15)$$

有正定解 $X > 0$.

假设存在正定解 $X > 0$, 那么使得 Q_1 有解的反馈阵 F 可以由下式给出

$$F = (\bar{C}_2^T \bar{C}_2)^{-1} (\bar{A}_{12}^T X + \bar{C}_2^T \bar{C}_1). \quad (16)$$

说明 3 当 $\bar{C}_2 = 0$ 时, 亦有类似的结果^[14]. 由 $F = \bar{S}_2^{-1} \bar{S}_1$, 可以得到 $S_1 = S_2 F$, 因而

$$S = [S_2 F \quad S_2]. \quad (17)$$

由式(5), (10)和(17)可以得到对于原系统(1), 滑模面可以表示为

$$S: \{x \in \mathbb{R}^n \mid [S_2 F \quad S_2] T(x) = 0\}. \quad (18)$$

因此原系统在滑模(18)上的运动方程可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + p_1(x)w, \\ s(x) = [S_2 F \quad S_2] T(x) = 0, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (19)$$

这时非线性不确定系统 H_∞ 滑模控制问题 Q_1 可以进一步地描述为: 系统(19)内部稳定, 并且满足干扰抑制条件

$$\int_0^T \|y\|^2 dt \leq \lambda^2 \int_0^T \|w\|^2 dt, \quad \forall T \geq 0.$$

3 主要结果(Main results)

假设 4 $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|(P \frac{\partial T}{\partial x} p_1(x))\|^2 = c_0^2$ 有界, $c_0 > 0$.

说明 4 当注解 1 中的条件满足时, $c_0 = 1$. 令 $\lambda = \bar{\lambda} c_0$, 那么有如下定理:

定理 1 非线性 H_∞ 控制问题 Q_1 可解的充分条件为 Riccati 方程(17)有正定解 $X > 0$, 这时系统(1)的滑模如式(18)所示.

证 由条件可知系统(15)内部稳定, 因而系统(19)内部稳定. 即非线性 H_∞ 控制问题的条件 C2 得到了满足. 下面将利用微分对策论^[13]来证明条件 C1 成立.

系统(13)的 H_∞ 控制问题可以表述为指标

$$J(z_2, \bar{w}) = \int_0^t (\|C_1 z_1 + C_2 z_2\|^2 - \bar{\lambda}^2 \|\bar{w}\|^2) dt. \quad (20)$$

在系统约束(13)下的二人零和微分对策问题

$$\min_{z_2} \max_{\bar{w}} (J(\bar{z}_2, \bar{w})) \leq 0. \quad (21)$$

由 Riccati 方程(15)有正定解 $X > 0$, 即存在如式(16)所示的矩阵 F . 选取滑模如式(18)所示, 当系统处于滑模面上时有 $z_2^* = -Fz_1 = -FT_1(x)$, 即 z_2^* 可以看成是降阶系统(13)的 H_∞ 次优控制律, 于是有 $J(z_2^*, \bar{w}) \leq 0$ 成立. 即:

$$\int_0^t (C_1 z_1 + C_2 z_2^*) dt \leq \bar{\lambda}^2 \int_0^t \|\bar{w}\|^2 dt.$$

考虑到

$$\bar{\lambda}^2 \int_0^t \|\bar{w}\|^2 dt \leq \lambda^2 \int_0^t \|w\|^2 dt,$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^t [\|C_1 z_1 - C_2 FT_1(x)\|]^2 dt = \\ & \int_0^t \|y\|_{s(x)=0}^2 dt \leq \lambda^2 \int_0^t \|w\|^2 dt. \end{aligned}$$

即问题 Q_1 条件 C1 也成立. 证毕.

在滑模(18)上, 非线性 H_∞ 控制问题可解. 以下将给出使得滑模存在的控制律, 为了获得控制律首先给出一些假设.

假设 5 存在 $\rho_1, \rho_2, \phi > 0$, 使得系统(7)的不确定性满足以下条件

$$\|\frac{\partial T}{\partial x} p_1 w\| < \rho_1,$$

$$\|e(x) + Qw\| < \rho_2, \quad \|E(x)\| < \phi < 1.$$

定理 2 在假设 1, 2, 3 和假设 5 下, 在系统约束(7)下, 保证滑模 $Sz = 0$ 可达的控制律为

$$v(t) = -SAz - \frac{1}{1-\phi} (\epsilon + \rho_2 + \|S\| \rho_1 + \|SAz\|) \text{sgn}(Sz). \quad (22)$$

其中

$$\text{sgn}(Sz) = \begin{cases} Sz / \|Sz\|, & Sz \neq 0, \\ 0, & Sz = 0, \end{cases}$$

$$\epsilon > 0.$$

证 由式(22)可以得到

$$\|v\| \leq \|SAz\| + \frac{1}{1-\phi} (\epsilon + \rho_2 + \|S\| \rho_1 + \|SAz\|).$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} & \|Ev + e + Qw\| \leq \\ & \frac{1}{1-\phi} (\phi\epsilon + \rho_2 + \phi\|S\| \rho_1 + (2-\phi)\phi\|SAz\|). \end{aligned} \quad (23)$$

令

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \sigma = \frac{1}{2} (Sz)^T (Sz),$$

由假设 5 和式(7), (23)可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} & \leq \sigma^T SAz + \sigma^T v + \left(\frac{1}{1-\phi} (\phi\epsilon + \rho_2 + \phi\|S\| \rho_1 + \right. \\ & \quad \left. (2-\phi)\phi\|SAz\|) + \|S\| \rho_1 \right) \|\sigma\| \leq \\ & \quad - \frac{1}{1-\phi} (\epsilon + \rho_2 + \|S\| \rho_1 + \|SAz\|) \|\sigma\| + \\ & \quad \left(\frac{1}{1-\phi} (\phi\epsilon + \rho_2 + \phi\|S\| \rho_1 + \right. \\ & \quad \left. (2-\phi)\phi\|SAz\|) + \|S\| \rho_1 \right) \|\sigma\| = \\ & \quad - \epsilon \|\sigma\| - (1-\phi) \|SAz\| \cdot \|\sigma\| < 0. \end{aligned}$$

这就证明了滑模 $Sz = 0$ 可达. 证毕.

将式(22)代入式(5)可以得到最终的变结构控制律.

4 仿真(Simulation)

考虑单机无穷大电力系统励磁控制问题^[15],取状态变换

$$x_1 = \Delta\delta, x_2 = \Delta\dot{\delta}, x_3 = \Delta P_e,$$

并且令 $u = \Delta v_f, v_f$ 如文[15]中式(14)所示.当考虑到参数不确定以及在干扰 w_1, w_2 作用下,可以将系统写为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, y = x_1, \\ \dot{x}_2 = -0.1x_2 + 0.1x_3 + w_1, \\ \dot{x}_3 = -0.2x_3 + 0.2u + \gamma_1 x_3 + \gamma_2 u + w_2. \end{cases} \quad (24)$$

其中假设 $\gamma_1, \gamma_2 \in [-0.05, 0.05]$.这时可以看出 $\gamma_1 x_3 + \gamma_2 u + w_2$ 满足匹配条件,而 w_1 不满足匹配条件.在本例中取

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.04, w_2 = 0.1\cos(20t).$$

由本文的方法可以求出变结构反馈控制律为

$$u = -5[0 \quad 2.622 \quad 0.492]x - 5(0.1|x_3| + 1)\text{sgn}(S_x). \quad (25)$$

由于 $\gamma_1 x_3 + \gamma_2 u + w_2$ 满足匹配条件,对 w_1 分三种情

况进行研究:

Case 1 $w_1 = 0$, 即不满足匹配条件的干扰不存在.初始条件为

$$x_{10} = 40(\text{deg}) = 0.70(\text{rad}),$$

$$x_{20} = 0.1, x_{30} = -0.2.$$

Case 2 $w_1 = 0.1\sin(t)\exp(-3t)$, 即不满足匹配条件的干扰指数衰减.初始条件为

$$x_{10} = 20(\text{deg}) = 0.35(\text{rad}),$$

$$x_{20} = 0.1, x_{30} = -0.2.$$

Case 3 $w_1 = 0.01\sin(t)$, 即不满足匹配条件的干扰为正弦函数.初始条件为

$$x_{10} = 10(\text{deg}) = 0.17(\text{rad}),$$

$$x_{20} = 0.1, x_{30} = -0.2.$$

图1~4给出了 x_1, x_2, x_3 和 S_x 的响应曲线,由图中可以看到在以上三种情况下,在有限时间内到达滑模面.在 Case 1 和 Case 2 下,系统的静态误差为零.而对于 Case 3 而言,存在静态误差,由于使用了 H_∞ 抗干扰方法,因此可以降低不满足匹配条件的干扰对输出的静态误差.

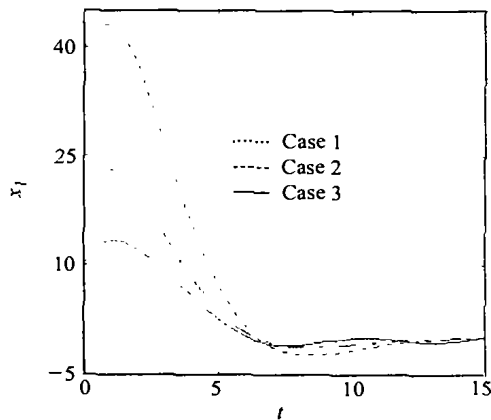


图1 x_1 响应曲线
Fig.1 Curves of response x_1

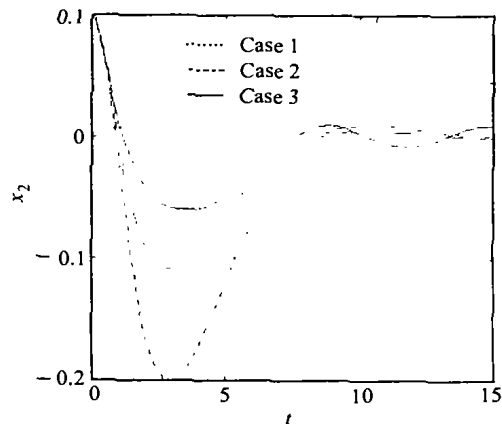


图2 x_2 响应曲线
Fig.2 Curves of response x_2

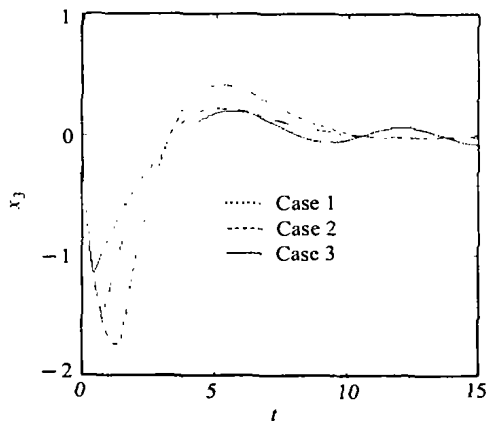


图3 x_3 响应曲线
Fig.3 Curves of response x_3

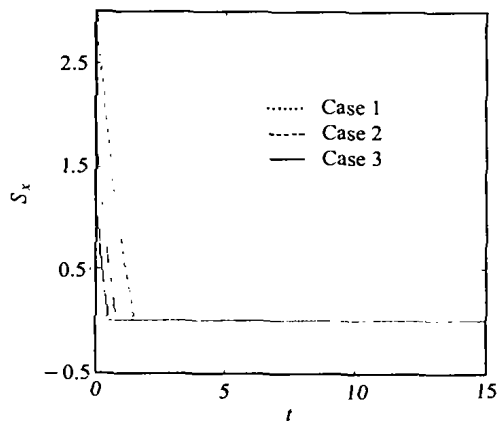


图4 S_x 响应曲线
Fig.4 Curves of response S_x

5 结论(Conclusion)

对于一类具有不满足匹配条件的非线性不确定系统,本文结合.本文结合了反馈线性化理论, H_∞ 干扰抑制以及滑模变结构控制,设计了 H_∞ 滑模控制器.最终的闭环系统具有完全抑制满足匹配条件干扰并且能够有效抑制不满足匹配条件干扰的能力.计算机仿真结果表明了该方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Gao Weibing. Variable Structure Control Theory Basic [M]. Beijing: Chinese Science and Technology Press, 1990 (in Chinese)
- [2] Huang John Y, Gao Weibing, Hung James C. Variable structure control: a survey [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993,40(1):2-22
- [3] Takahashi R H C, Peres P L D. H_∞ design of switching surfaces for sliding-mode control with nonmatching disturbance [J]. IEEE Proc.-Control Theory and Applications, 1998,145(4):435-441
- [4] Han Ho Choi. On the existence of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties [J]. Automatica, 1999,35(10):1707-1715
- [5] Park S K, Ahn H K. Robust controller design with novel sliding surface [J]. IEEE Proc.-Control Theory and Applications, 1999,146(1):242-246
- [6] Ha O P, Rye D C, Durrant-Whyte H F. Robust sliding control with application [J]. Int. J. Control, 1999,72(12):1087-1096
- [7] Schoenwald D A, Ozguner U. Robust feedback linearization of uncertain nonlinear systems [A]. Proceedings of the 1992 American Control Conference [C]. Chicago, Illinois, 1992,3,2545-2546
- [8] Chen J S, Chen Y H. Robust control of nonlinear uncertain systems: a feedback linearization approach [A]. Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control Part 3 [C]. Brighton, England, 1991,2515-2520
- [9] Calvet J P, Arkun Y. Robust control design for uncertain nonlinear systems under feedback linearization [A]. Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control, Part 1 [C]. Tampa, Florida, 1989, 102-106
- [10] Fernandez B. Robust feedback linearization through sliding mode control [A]. Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control [C]. Honolulu, Hawaii, 1990,6,3398-3399
- [11] Isidori A. Nonlinear Control System [M]. 2nd. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- [12] Cheng D, Isidori A, Respondek W, et al. Exact linearization of nonlinear systems with outputs [J]. Systems Theory, 1988,21(2):63-83
- [13] Hans W K, Alberto I, Dietrich F. Topics in Control Theory [M]. Basel Boston Berlin: Birkhäuser Verlag, 1993
- [14] Shen Tielong. H_∞ Control Theory and Application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996 (in Chinese)
- [15] Wang Youyi, David J H, Richard H M, et al. Transient stability enhancement and voltage regulation of power systems [J]. IEEE Trans. Power System, 1993,8(2):620-627

本文作者简介

葛友 1974 年生.1997 年于浙江大学获得学士学位,现为清华大学博士研究生.主要研究兴趣为自动控制理论及应用,电力系统控制. Email:geyou97@mail.tsinghua.edu.cn

李春文 见本刊 2002 年第 3 期第 344 页.