

不确定离散时滞系统的 D 稳定鲁棒容错控制

孙金生, 王执铨

(南京理工大学 自动化系, 南京 210094)

摘要: 针对离散一步时滞系统, 研究了传感器失效后有一定性能保证的 D 稳定容错控制问题, 给出一个对传感器失效具有完整性的 D 稳定控制系统需满足的一个充分条件, 进而讨论了参数不确定离散时滞系统的 D 稳定鲁棒容错控制问题, 给出了 D 稳定鲁棒容错控制系统的设计方法及步骤, 并把相应结果推广到执行器失效的情况, 最后用一个设计示例及仿真结果验证了这种设计方法的有效性。

关键词: 容错控制; D 稳定; 时滞系统; 鲁棒性; 离散系统

中图分类号: TP202

文献标识码: A

D -stable robust fault-tolerant control for uncertain discrete-delay systems

SUN Jin-sheng, WANG Zhi-quan

(Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: D -stable fault-tolerant control problem is studied for discrete systems with a time delay, which can guarantee some performance after sensor failures. A sufficient condition for D -stable control systems possessing integrity against sensor failures is presented. Then the D -stable robust fault-tolerant control problem is studied for uncertain discrete time-delay systems. The design method of D -stable robust fault-tolerant control systems is given, and the results are extended to the situation of actuator failures. Finally, an illustrative example and simulation results are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: fault-tolerant control; D -stability; time-delay systems; robustness; discrete systems

1 引言(Introduction)

随着科技的进步,越来越多的性能先进、结构复杂的系统应用于生产实践中,这对系统可靠性有了更高的要求,作为提高控制系统可靠性重要手段的容错控制理论的研究得到了广泛的重视,在可靠镇定、系统重构和完整性设计等方面取得了很多成果^[1].所谓完整性是指当系统中某些传感器或执行器失效时,系统仍能保持渐近稳定的特性.这方面的研究成果很多^[2~4],但目前为止,绝大多数的研究都只是保证系统在传感器或执行器失效时仍是稳定的,但不保证系统的性能,而对一个实际可用的系统来说,性能也是至关重要的,性能严重恶化的系统是没有实用价值的.

D 稳定理论是近年来控制理论研究十分活跃的分支之一,有许多新的成果^[5~7],但这些研究都没有考虑传感器和执行器的失效问题,使得当系统中有传感器或执行器失效时,按其方法设计的系统的性能和稳定性都得不到保证.

本文针对离散一步时滞系统,把容错控制和 D 稳定理论结合在一起,研究了传感器失效后有一定性能保证的 D 稳定容错控制问题,进而讨论了参数不确定离散时滞系统的 D 稳定鲁棒容错控制问题.

2 问题描述(Problem statement)

考虑离散时滞系统

$$x(k+1) = A_1 x(k) + A_2 x(k-1) + Bu(k). \quad (1)$$

其中 $x(k)$ 为 n 维状态变量, $u(k)$ 为 m 维控制变量,各矩阵维数适当, (A_1, B) 可控.若采用状态反馈控制

$$u(k) = Kx(k), \quad (2)$$

则闭环系统为

$$x(k+1) = (A_1 + BK)x(k) + A_2 x(k-1). \quad (3)$$

考虑到传感器的可能失效,引入开关阵 F , 并把它放在反馈阵 K 和系统的状态 $x(t)$ 之间,其形式为

$$F = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n), \quad (4)$$

其中

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个传感器正常,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个传感器失效,} \\ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

考虑传感器可能失效后,故障闭环系统可表示为

$$x(k+1) = (A_1 + BK F)x(k) + A_2 x(k-1). \quad (6)$$

定义 1 (D 稳定定义) 若闭环系统的极点都位于圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内,则称系统是 D 稳定的. 其中 $|\alpha| < 1, 0 < r < 1$, 且 $r + |\alpha| < 1$.

定义 2 (D 稳定容错控制器) 若控制器 K 可使系统在传感器(或执行器)失效后闭环系统的极点仍在圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内,则称其为系统的 D 稳定容错控制器.

那么对传感器失效具有完整性的时滞系统 D 稳定容错控制系统设计要求可描述为:寻求状态反馈控制(2),使故障闭环系统(6)在任意传感器失效 $F \in \Omega$ 下闭环极点仍在圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内. 其中 Ω 为所有可能的传感器失效故障阵 F 的集合.

3 传感器失效的 D 稳定鲁棒容错控制 (D -stable robust fault-tolerant control against sensor failures)

定理 1 如果满足条件

$$\|A_c - 2\alpha I\| + r^{-1} \|A_2 + \alpha(A_c - \alpha I)\| + \beta(1 + r^{-1}|\alpha|) < r. \quad (7)$$

则控制器(2)是系统(1)对传感器失效具有完整性的 D 稳定容错控制器. 其中 $\|X\| = \lambda_M(X^T X)^{1/2}$, $\lambda_M(\cdot)$ 为求最大特征值运算,而

$$A_c = A_1 + BK, \quad (8)$$

$$\beta = \max_{F \in \Omega} (\|BK(F - I)\|). \quad (9)$$

证 考虑传感器失效后,故障闭环系统可表示为

$$x(k+1) = [A_c + BK(F - I)]x(k) + A_2 x(k-1), \quad (10)$$

则系统的特征方程为

$$\begin{aligned} \det[zI - (A_c + BK(F - I)) - z^{-1}A_2] &= \\ \det[z^2I - z(A_c + BK(F - I)) - A_2] &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

采用线性变换

$$v = r^{-1}(z - \alpha), \quad (12)$$

则系统的特征方程变为

$$\begin{aligned} \det[(v + r^{-1}\alpha)^2I - r^{-1}(v + r^{-1}\alpha)(A_c + \\ BK(F - I)) - r^{-2}A_2] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

经整理得

$$\begin{aligned} \det[v^2I - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))v - \\ r^{-2}(A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I))] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

要使闭环故障系统(10)的所有极点都位于圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内,只需上式的解满足

$$|v| < 1. \quad (15)$$

这意味着存在非零向量 u 满足方程

$$\begin{aligned} [v^2I - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))v]u = \\ r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I)]u. \end{aligned} \quad (16)$$

下面用反证法证明. 假设 $|v| > 1$, 则

$$\begin{aligned} \|r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I)]\| &= \\ \sup \frac{|r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I)]x|}{|x|} &\geq \\ \frac{|r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I)]u|}{|u|} &\geq \\ \frac{|[v^2I - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))v]u|}{|u|} &\geq \\ \frac{|v| \cdot |[vI - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))]u|}{|u|} &\geq \\ \frac{|[vI - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))]u|}{|u|} &\geq \\ \frac{|v| \cdot |u| - \|r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))\| \cdot |u|}{|u|} &\geq \\ |v| - \|r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I))\| &\geq \\ 1 - r^{-1}\|A_c - 2\alpha I\| - r^{-1}\|BK(F - I)\| &\geq \\ 1 - r^{-1}\|A_c - 2\alpha I\| - r^{-1}\beta. \end{aligned} \quad (17)$$

而

$$\begin{aligned} \|r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I)]\| &\leq \\ r^{-2}\|A_2 + \alpha(A_c - \alpha I)\| + r^{-2}|\alpha|\beta. \end{aligned} \quad (18)$$

综合式(17)和(18),可得

$$\begin{aligned} \|A_c - 2\alpha I\| + r^{-1}\|A_2 + \alpha(A_c - \alpha I)\| + \\ \beta(1 + r^{-1}|\alpha|) > r. \end{aligned} \quad (19)$$

这与所给条件(7)相矛盾,故假设不成立,所以 $|v| < 1$, 由此定理得证.

在实际系统中,由于建模误差、线性化近似等因素,系统的参数不确定性是不可避免的,因此,进行系统设计时应考虑参数不确定性的影响.

考虑不确定离散时滞系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= [A_1 + \Delta A_1(\sigma(k))]x(k) + \\ &\quad [A_2 + \Delta A_2(\sigma(k))]x(k-1) + \\ &\quad [B + \Delta B(\sigma(k))]u(k). \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为控制变量, $\sigma(k) \in \mathbb{R}^p$ 为不确定参数向量, 各矩阵维数适当, (A_1, B) 可控. 若采用状态反馈控制(2), 则考虑传感器失效的故障闭环系统为

$$x(k+1) = [A_1 + BKF + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF]x(k) + [A_2 + \Delta A_2(\sigma(k))]x(k-1). \quad (21)$$

定理 2 若不确定离散时滞系统(20)的参数不确定性满足

$$\begin{aligned} \|\Delta A_1(\sigma(k))\| &\leq a_1, \quad \|\Delta A_2(\sigma(k))\| \leq a_2, \\ \|\Delta B(\sigma(k))\| &\leq b. \end{aligned} \quad (22)$$

则当满足条件

$$\|A_c - 2\alpha I\| + r^{-1}\|A_2 + \alpha(A_c - \alpha I)\| + r^{-1}a_2 + (1 + r^{-1}|\alpha|)(\beta + a_1 + b\|k\|) < r \quad (23)$$

时, 控制器(2)是系统(20)对传感器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器.

该定理可采用与定理 1 类似的方法证明, 限于篇幅, 不再赘述.

对于一个可控的不确定离散时滞系统(20), 可按如下步骤设计对传感器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器:

1) 确定参数不确定性的范数界 a_1, a_2 和 b 使满足式(22).

2) 根据对系统的性能要求选取适当的圆形区域 $D(\alpha, r)$.

3) 选取适当的 $Q > 0, R > 0$, 解离散代数 Riccati 方程

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P - \bar{A}^T P \bar{B} (R + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A} + Q = 0, \quad (24)$$

其中

$$\bar{A} = r^{-1}(A_1 - \alpha I), \quad \bar{B} = r^{-1}B, \quad (25)$$

则控制器为

$$K = -(R + \bar{B}^T P \bar{B})^{-1} \bar{B}^T P \bar{A}. \quad (26)$$

4) 验证条件(23)是否成立, 若不成立, 适当修改 Q , 重复上面的设计过程, 直到满足式(23)为止, 则所得的就是系统对传感器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器.

4 执行器失效的 D 稳定鲁棒容错控制 (D -stable robust fault-tolerant control against actuator failures)

在系统中, 除传感器外, 执行器也可能发生失效故障. 为表示执行器的可能失效, 引入开关阵 L , 并

把它置于控制输入 $u(t)$ 和 B 阵之间, 其形式为

$$L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_m), \quad (27)$$

其中

$$l_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个执行器正常,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个执行器失效,} \\ & i = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (28)$$

则考虑执行器可能失效的闭环系统为

$$x(k+1) = (A_1 + BLK)x(k) + A_2x(k-1). \quad (29)$$

定理 3 如果满足条件

$$\begin{aligned} \|A_c - 2\alpha I\| + r^{-1}\|A_2 + \alpha(A_c - \alpha I)\| + \\ \eta(1 + r^{-1}|\alpha|) < r, \end{aligned} \quad (30)$$

则控制器(2)是系统(1)对执行器失效具有完整性的 D 稳定容错控制器. 其中

$$\eta = \max_{L \in \Psi} (\|B(L - I)K\|). \quad (31)$$

其中 Ψ 为所有可能的执行器失效故障阵 L 的集合.

对于参数不确定离散时滞系统(20), 考虑执行器失效故障时闭环系统为

$$x(k+1) = [A_1 + BLK + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))LK]x(k) + [A_2 + \Delta A_2(\sigma(k))]x(k-1). \quad (32)$$

定理 4 若不确定离散时滞系统(20)的参数不确定性满足(22), 则当满足条件

$$\begin{aligned} \|A_c - 2\alpha I\| + r^{-1}\|A_2 + \alpha(A_c - \alpha I)\| + r^{-1}a_2 + \\ (1 + r^{-1}|\alpha|)(\eta + a_1 + b\|K\|) < r \end{aligned} \quad (33)$$

时, 控制器(2)是系统(20)对执行器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器.

上述两个定理可采用与定理 1 类似的方法证明, 执行器失效时 D 稳定鲁棒容错控制器的设计步骤也可参照传感器失效的情况, 限于篇幅, 不再赘述.

5 设计实例 (Design example)

考虑不确定离散时滞系统(20), 其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.18 \\ 0.22 & 0.41 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1(\sigma(k)) = \begin{bmatrix} 0.02\sin(0.1k) & 0 \\ 0 & 0.02\cos(0.1k) \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.13 \\ 0.99 & -0.14 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_2(\sigma(k)) = \begin{bmatrix} 0 & 0.02\sin(0.1k) \\ 0.02\cos(0.1k) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta B(\sigma(k)) = \begin{bmatrix} 0.1\sin(0.1k) & 0 \\ 0 & 0.1\cos(0.1k) \end{bmatrix},$$

容易判断系统是可控的, 按文中给出的方法, 取期望

的圆形区域为 $D(0.1, 0.8)$, 对传感器失效故障 $F_1 = \text{diag}(0, 1)$ 和 $F_2 = \text{diag}(1, 0)$, 可求得控制器

$$u(k) = \begin{bmatrix} -0.1784 & -0.0950 \\ -0.1132 & -0.1499 \end{bmatrix} x(k),$$

满足定理 2, 故该控制器是上述系统的一个对传感器失效具有完整性的 D 稳定鲁棒容错控制器。

图 1 和图 2 是系统初始条件为 $x(0) = [4 \ 3]^T$ 时的零输入响应曲线。其中, 曲线 1 为正常系统的响应; 曲线 2, 3 分别为传感器 x_1, x_2 失效时的零输入响应。仿真结果表明, 传感器失效后系统的性能变化不大, 控制器的容错性和鲁棒性均令人满意, 说明本文的设计方法是有效的。

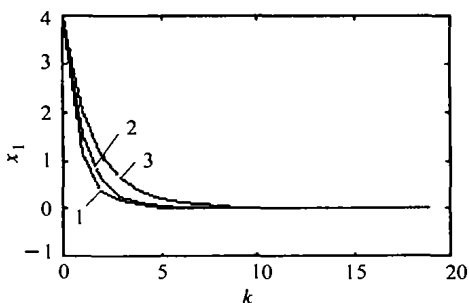


图 1 状态 x_1 的零输入响应

Fig. 1 Response of state x_1 for zero input

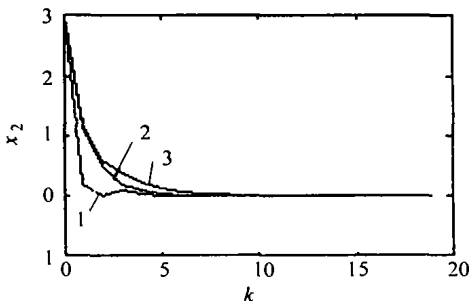


图 2 状态 x_2 的零输入响应

Fig. 2 Response of state x_2 for zero input

参考文献 (References)

- [1] Zhou Donghua, Ding X. Theory and applications of fault tolerant control [J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(6): 788 - 797 (in Chinese)
- [2] Fujita M, Shimemura E. A new type of linear state feedback control possessing integrity based on a solution of generalized Riccati-type equation [J]. Control Theory and Advanced Technology, 1986, 2(4): 563 - 575
- [3] Sun Jinsheng, Li Jun, Wang Zhiqian. Design of robust fault-tolerant linear regulator for discrete systems [J]. Control and Decision, 1996, 11(1): 68 - 72 (in Chinese)
- [4] Ye Y Z. Fault tolerant pole assignment for multi-variable systems using a fixed state feedback [J]. Control Theory and Applications, 1993, 10(2): 212 - 218

- [5] Lee C H, Li T S, Kung F C. D -stability analysis for discrete systems with a time delay [J]. Systems & Control Letters, 1992, 19(3): 213 - 219
- [6] Lee T T, Lee S H. Discrete optimal control with eigenvalue assigned inside a circular region [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1986, 31(10): 958 - 962
- [7] Abdul-wahab A A. Pole assignment in a specified circular region using a bilinear transformation onto the unit circle [J]. Int. J. Systems Science, 1994, 25(7): 1113 - 1125

附录 (Appendix)

定理 2 和定理 3 的证明

定理 2 证明:

证 考虑传感器失效后, 故障闭环系统可表示为

$$x(k+1) = [A_c + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF]x(k) + [A_2 + \Delta A_2(\sigma(k))]x(k-1),$$

则系统的特征方程为

$$\det[zI - (A_c + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF) - z^{-1}(A_2 + \Delta A_2(\sigma(k)))] = \det[z^2I - z(A_c + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF) - (A_2 + \Delta A_2(\sigma(k)))] = 0.$$

采用线性变换 $v = r^{-1}(z - \alpha)$, 则系统的特征方程变为

$$\det[(v + r^{-1}\alpha)^2I - r^{-1}(v + r^{-1}\alpha)(A_c + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF) - r^{-2}(A_2 + \Delta A_2(\sigma(k)))] = 0,$$

经整理得

$$\det[v^2I - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF)v - r^{-2}(A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I) + \alpha \Delta A_1(\sigma(k)) + \alpha \Delta B(\sigma(k))KF)] = 0,$$

要使闭环故障系统(21)的所有极点都位于圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内, 只需上式的解满足 $|v| < 1$, 这意味着存在非零向量 u 满足方程

$$[v^2I - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF)v]u = r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I) + \alpha \Delta A_1(\sigma(k)) + \alpha \Delta B(\sigma(k))KF]u.$$

下面用反证法证明. 假设 $|v| > 1$, 则

$$\begin{aligned} & \| r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I) + \alpha \Delta A_1(\sigma(k)) + \alpha \Delta B(\sigma(k))KF] \| = \\ & \sup_{x \neq 0} \| r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I) + \alpha \Delta A_1(\sigma(k)) + \alpha \Delta B(\sigma(k))KF]x \| / \| x \| \geq \\ & \| r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - \alpha I) + \alpha BK(F - I) + \alpha \Delta A_1(\sigma(k)) + \alpha \Delta B(\sigma(k))KF]u \| / \| u \| \geq \\ & \| [v^2I - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF)v]u \| / \| u \| \geq \\ & |v| \| [vI - r^{-1}(A_c - 2\alpha I + BK(F - I) + \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF)v]u \| / \| u \| \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF]u \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid [vI - r^{-1}(A_c - 2aI + BK(F - I) + \\
& \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF]u \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid \mid v \mid \mid u \mid - \parallel r^{-1}(A_c - 2aI + BK(F - I) + \\
& \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF \parallel \mid u \mid \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid v \mid - \parallel r^{-1}(A_c - 2aI + BK(F - I) + \\
& \Delta A_1(\sigma(k)) + \Delta B(\sigma(k))KF \parallel \geq \\
& 1 - r^{-1} \parallel A_c - 2aI \parallel - r^{-1} \parallel BK(F - I) \parallel - \\
& r^{-1} \parallel \Delta A_1(\sigma(k)) \parallel - r^{-1} \parallel \Delta B(\sigma(k))KF \parallel \geq \\
& 1 - r^{-1} \parallel A_c - 2aI \parallel - r^{-1}\beta - r^{-1}a_1 - r^{-1}b \parallel K \parallel,
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
& \parallel r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha BK(F - I) + \\
& \alpha \Delta A_1(\sigma(k)) + \alpha \Delta B(\sigma(k))KF] \parallel \leq \\
& r^{-2} \parallel A_2 + \alpha(A_c - aI) \parallel + r^{-2} \mid \alpha \mid \beta + \\
& r^{-2} \mid \alpha \mid a_1 + r^{-2} \mid \alpha \mid b \parallel K \parallel.
\end{aligned}$$

综合上述两式,可得

$$\begin{aligned}
& \parallel A_c - 2aI \parallel + r^{-1} \parallel A_2 + \alpha(A_c - aI) \parallel + \\
& (1 + r^{-1} \mid \alpha \mid)(\beta + a_1 + b \parallel K \parallel) > r.
\end{aligned}$$

这与所给条件(23)相矛盾,故假设不成立,所以 $\mid v \mid < 1$, 由此定理 2 得证

定理 3 的证明:

证 考虑执行器失效后,故障闭环系统可表示为

$$x(k+1) = [A_c + B(L - I)K]x(k) + A_2x(k-1),$$

则系统的特征方程为

$$\begin{aligned}
& \det[zI - (A_c + B(L - I)K) - z^{-1}A_2] = \\
& \det[z^2I - z(A_c + B(L - I)K) - A_2] = 0.
\end{aligned}$$

采用线性变换 $v = r^{-1}(z - \alpha)$, 则系统的特征方程变为

$$\begin{aligned}
& \det[(v + r^{-1}\alpha)^2I - r^{-1}(v + r^{-1}\alpha)(A_c + \\
& B(L - I)K) - r^{-2}A_2] = 0,
\end{aligned}$$

经整理得

$$\begin{aligned}
& \det[v^2I - r^{-1}(A_c - 2aI + B(L - I)K)v - \\
& r^{-2}(A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha B(L - I)K)] = 0.
\end{aligned}$$

若使闭环故障系统(29)的所有极点都位于圆形区域 $D(\alpha, r)$ 内,只需上式的解满足 $\mid v \mid < 1$,这意味着存在非零向量 u 满足方程

$$\begin{aligned}
& [v^2I - r^{-1}(A_c - 2aI + B(L - I)K)v]u = \\
& r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha B(L - I)K]u.
\end{aligned}$$

下面用反证法证明.假设 $\mid v \mid > 1$, 则

$$\begin{aligned}
& \parallel r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha B(L - I)K] \parallel = \\
& \sup_{x \neq 0} \mid r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha B(L - I)K]x \mid / \mid x \mid \geq \\
& \mid r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha B(L - I)K]u \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid [v^2I - r^{-1}(A_c - 2aI + B(L - I)K)v]u \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid v \mid \mid [vI - r^{-1}(A_c - 2aI + B(L - I)K)]u \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid \mid v \mid \mid u \mid - \parallel r^{-1}(A_c - 2aI + B(L - I)K) \parallel \mid u \mid \mid / \mid u \mid \geq \\
& \mid v \mid - \parallel r^{-1}(A_c - 2aI + B(L - I)K) \parallel \geq \\
& 1 - r^{-1} \parallel A_c - 2aI \parallel - r^{-1} \parallel B(L - I)K \parallel \geq \\
& 1 - r^{-1} \parallel A_c - 2aI \parallel - r^{-1}\eta.
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
& \parallel r^{-2}[A_2 + \alpha(A_c - aI) + \alpha B(L - I)K] \parallel \leq \\
& r^{-2} \parallel A_2 + \alpha(A_c - aI) \parallel + r^{-2} \mid \alpha \mid \eta.
\end{aligned}$$

综合上述两式,可得

$$\begin{aligned}
& \parallel A_2 - 2aI \parallel + r^{-1} \parallel A_2 + \alpha(A_c - aI) \parallel + \\
& \eta(1 + r^{-1} \mid \alpha \mid) > r.
\end{aligned}$$

这与所给条件(30)相矛盾,故假设不成立,所以 $\mid v \mid < 1$, 由此定理 3 得证.

本文作者简介

孙金生 1967 年生,博士,现为南京理工大学自动化副教授,感兴趣的研究方向为容错控制,信息安全,拥塞控制等.

王执铨 1939 年生,现为南京理工大学自动化系教授,博士生导师,主要研究方向为非线性系统的建模与控制,信息安全等.