第19卷第6期 控制理论与应用 Vol.19 No.6
2002年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec. 2002

文章编号：1000-8152(2002)06-0972-03

Schur-Cohn多项式的鲁棒稳定半径*

高利新[1,2]，孙优贤[2]
（1.温州师范学院 系统科学研究所，温州 325003；2.浙江大学 工业控制技术国家重点实验室，杭州 310027）

摘要：研究离散线性时不变系统的特征多项式的鲁棒稳定性，给出用求多项式最小值的方法来估计Schur-Cohn多项式的鲁棒稳定半径，在一定条件下估计为最优估计.最后，给出若干算例.

关键词：鲁棒稳定；扰动半径；Schur-Cohn多项式；特征多项式
中图分类号：O231 **文献标识码**：A

Radius of robust stability for Schur-Cohn polynomials

GAO Li-xin[1,2], SUN You-xian[2]
(1. Institute of Systems Science, Wenzhou Normal College, Wenzhou 325003, China;
2. National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: This paper investigates the problem of the robust stability about character polynomial of a discrete-time linear time invariant system, estimates the radius of robust stability of Schur-Cohn polynomial based on seeking minimum value of polynomial, and it is the best estimation in some conditions. Finally, some numerical examples are given.

Key words: robust stability; disturb radius; Schur-Cohn polynomial; character polynomial

1 引言(Introduction)

由于数字控制系统的应用，用差分方程或离散的状态方程来描述一系统的数学模型日益得到广泛的应用.用差分方程表示时一般形式为

$$a_0y(k+n)+a_1y(k+n-1)+\cdots+a_ny(k)=$$
$$b_0u(k+n)+b_1u(k+n-1)+\cdots+b_nu(k).$$

设初始条件为零，用 z 变换将上式变为脉冲传递函数 $W(z)$，它的形式为

$$W(z)=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}.$$

如将连续的状态方程在相等取样间隔内离散化得离散的状态方程为

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),$$
$$y(k)=Cx(k)+Dx(k).$$

经 z 变换后上式的离散传递函数为

$$W(z)=C(zI-G)^{-1}H+D.$$

特征方程为 $|zI-G|=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$.

上述离散系统渐近稳定的充要条件是特征多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 的所有根满足 $|z_i|<1$，称多项式 $f(z)$ 为Schur稳定.我们把所有根在单位圆内的多项式称为Schur-Cohn多项式.

在实际离散系统中，由于操作条件不同，噪声、线性化等不确定因素，造成离散模型不确定性.因此，我们不仅要研究特征多项式的稳定性，还要研究扰动后的特征多项式的稳定性，即鲁棒稳定性.文献[1~6]研究Kharitonov定理及基于Kharitonov定理研究鲁棒稳定性.多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$，其中 a_i 为实数，称为反Schur稳定，当 $|z|\leqslant 1$ 时，$f(z)\neq 0$（文献[6]称为Hurwitz稳定）.利用文献[7]提供数值方法寻找最大的扰动半径 R，使扰动多项式 $g(z)=\sum_{i=0}^{n}b_{n-i}z^i$，其中 $b_i\in[a_i-R,a_i+R]$，$i=1,2,\cdots,n$，是Schur稳定的.本文利用求多项式极值方法，当标称系统的特征多项式 $f(z)$ 为Schur-Cohn多项式时，即系统是稳定的，寻找最大的扰动半径 R，使扰动后特征多项式 $g(z)=\sum_{i=0}^{n}b_{n-i}z^i$，其中 $b_i\in[a_i-R,a_i+R]$，$i=1,2,\cdots,n$，也为Schur-Cohn多项式，本文方法比文献[6]更直观，更便于数值计算.

2 主要结果(Main results)

应用著名的儒歇Rouche定理（见文献[6,8]），

* 基金项目：国家自然科学基金(69874036,60174029)资助项目.
收稿日期：2000-11-01；收修改稿日期：2001-12-03.

取闭围道 $C = \{z \mid |z| = 1\}$,显然多项式 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭围道 C 的内部及其上是解析的,若 $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$ 在 C 上成立,则知多项式 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单位圆内有相同的零点数,即若 $f(z)$ 为 Schur-Cohn 多项式,则 $g(z)$ 为 Schur-Cohn 多项式.

在 C 上,有 $|z| = 1$,故我们可得

$$|f(z) - g(z)| = \left|\sum_{i=0}^{n}(a_{n-i} - b_{n-i})z^i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n}|a_{n-i} - b_{n-i}| \leqslant (n+1)R, \tag{1}$$

所以,当满足

$$(n+1)R < |f(z)|, \ |z| = 1,$$

故我们可得条件

$$R < \min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1) \tag{2}$$

满足上式的 R,都有当 $f(z)$ 为 Schur-Cohn 多项式时, $g(z)$ 为 Schur-Cohn 多项式.所以保持 Schur-Cohn 多项式 $f(z)$ 鲁棒稳定的扰动半径 R 的上确界 R^* 满足

$$R^* \geqslant \min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1), \tag{3}$$

称 R^* 为 Schur-Cohn 多项式的鲁棒稳定半径.当 $R > R^*$ 时,显然有扰动多项式 $g(z) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}z^i$,其中 $b_i \in [a_i - R, a_i + R]$, $i = 1,2,\cdots,n$,不是鲁棒 Schur 稳定的.甚至可以证明:当 $R = R^*$ 时,扰动多项式 $g(z)$ 不是鲁棒 Schur 稳定的.所以,对鲁棒稳定半径有意义的估计不应大于实际的鲁棒稳定半径.由式(3)可知, $\min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1)$ 可做为 R^* 的估计值,在一般情况下,这种估计是保守的,但是在满足一定条件时,这个估计式为最优估计.类似地,对反 Schur 稳定多项式的鲁棒稳定半径 R^* 也满足式(3)(见文献[6]).

注 1　对 Schur-Cohn 多项式 $f(z)$,若 $\min_{|z|=1}|f(z)|$ 在 $z = \pm 1$ 处达到,则

$$R^* = \min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1).$$

令 $\Delta f(z) = g(z) - f(z) = \sum_{i=0}^{n}\Delta a_{n-i}z^i$,可知当 $|\Delta a_i| < \min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1)$ 时,由儒歇定理知 $g(z)$ 为 Schur-Cohn 多项式,不妨设 $\min_{|z|=1}|f(z)|$ 在 $z = 1$ 处达到, $f(z)$ 为实系数多项式, $f(1)$ 为实数,取 $\Delta a_i = -f(1)/(n+1)$,则

$$|\Delta a_i| = \min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1),$$

此时 $\Delta f(1) = \sum_{i=0}^{n}\Delta a_i = -f(1)$,所以 $g(1) = f(1) + \Delta f(1) = 0$,可知 $g(z)$ 不是 Schur-Cohn 多项式(对 $z = -1$ 达到最小值,类似可证),所以有

$$R^* = \min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1).$$

在这种情形下,估计式 $\min_{|z|=1}|f(z)|/(n+1)$ 达最优.

在 C 上, $|z| = 1$,故令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, $\theta \in [0,2\pi]$,有

$$|f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} = f(z)f(\bar{z}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})f(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}), \tag{4}$$

通过一系列代数运算可得,

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})f(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}) = \left[\sum_{i=0}^{n}a_i^2, 2\sum_{i=0}^{n-1}a_ia_{i+1}, \cdots, 2\sum_{i=0}^{n-k}a_ia_{i+k}, \cdots, 2\sum_{i=0}^{n-n}a_ia_{i+n}\right]p. \tag{5}$$

其中向量

$$p = [1, \cos(\theta), \cdots, \cos(k\theta), \cdots, \cos(n\theta)]^{\mathrm{T}},$$

所以,当我们用三角关系(见文献[3])

$$\cos(k\theta) = (1/2)\{(2\cos\theta)^k - (k/1)(2\cos\theta)^{k-2} + (k/2)C_{k-3}^1(2\cos\theta)^{k-4} - (k/3)C_{k-4}^2(2\cos\theta)^{k-6} + \cdots\}, \quad k = 1,2,\cdots. \tag{6}$$

故可令 $x = \cos\theta$,所以有 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,则表示为

$$p = T\begin{bmatrix}1\\ \cos\theta\\ \vdots\\ \cos^n\theta\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}1\\ x\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix},$$

矩阵 T 为 $(n+1)\times(n+1)$ 阵.如 $n = 4$ 时,

$$T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & -8 & 0 & 8\end{bmatrix},$$

所以在 C 上,

$$|f(z)|^2 = \left[\sum_{i=0}^{n}a_i^2, 2\sum_{i=0}^{n-1}a_ia_{i+1}, \cdots, 2\sum_{i=0}^{n-k}a_ia_{i+k}, \cdots, 2\sum_{i=0}^{n-n}a_ia_{i+n}\right]T\begin{bmatrix}1\\ x\\ \vdots\\ x^n\end{bmatrix} \triangleq a(x). \tag{7}$$

故我们可得

$$R^* \geqslant \sqrt{\min_{-1\leqslant x\leqslant 1}a(x)}/(n+1), \tag{8}$$

并可知 $a(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式.满足 $a'(x) = 0$ 的点称为驻点,求取在 $(-1,1)$ 上的驻点及 -1 和 1

的函数值,其中的最小的即为所求的最小值.

若考虑加权的情形,扰动多项式 $g(z)=\sum_{i=0}^{n} b_{n-i}z^i$,其中 $b_i\in[a_i-\lambda_i R, a_i+\lambda_i R]$,$\lambda_i$ 为常量,可得如下关系式

$$R^*\geqslant\sqrt{\min_{-1\leqslant x\leqslant 1}a(x)}/(\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_n).\quad(9)$$

注 2 对 $f(z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ 为 Schur-Cohn 多项式,不难证明多项式 $g(z)=\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}z^i$ 为反 Schur 多项式,且有相同鲁棒稳定半径.对反 Schur 稳定多项式,相应的结果也成立.

利用本文方法计算注 2 多项式 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的鲁棒稳定半径 R^* 的估计值,由 $a(x)$ 表达式可知对 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是一样的,也有相同的数值结果.

3 数值例子(Numerical examples)

为方便取 $\lambda_i=1, i=0,1,\cdots,n$.

例 1

$$f(z)=6(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})=6z^2-5z+1.$$

$f(z)$ 显然是 Schur-Cohn 多项式,此时

$$T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&2\end{bmatrix},$$

可得

$$\min_{-1\leqslant x\leqslant 1}a(x)=\min_{-1\leqslant x\leqslant 1}(50-70x+24x^2)=4.$$

最小值在 $x=1$ 处达到,所以 $R^*=\frac{2}{3}$,由注 1 且为最优估计.取扰动多项式

$$g(z)=(6-\frac{2}{3})z^2+(-5-\frac{2}{3})z+(1-\frac{2}{3}),$$

则 $g(1)=0$,所以 $g(z)$ 不是 Schur-Cohn 多项式,故不可能有更大的鲁棒稳定半径.

例 2

$$f(z)=(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})(z+\frac{1-j}{2})(z+\frac{1+j}{2})=12z^4+2z^3-2z^2-3z+1,$$

这时有

$$a(x)=250+250x-320x^2-272x^3+192x^4.$$

在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上最小值约为 57.2329,$R^*=1.51305$,有较理想的数值结果.

4 结论(Conclusion)

本文研究 Schur-Cohn 多项式的鲁棒稳定半径,基于儒歇定理给出鲁棒稳定半径的一个估计式及一些性质,最后把估计值计算化为求多项式在区间 $[-1,1]$ 上的最小值,所以方法在数值上较易实现,用现成数学软件包如 Matlab 等都可解决.

参考文献(References)

[1] Chapella H T, Bhattacharyya S H. An alternative proof of Kharitonov's theorem [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1989,34(4): 448-450

[2] Minnichelli R J, Anagnost J J, Desoer C A. An elementary proof of Kharitonov's theorem [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1989, 34(9):995-998

[3] Katbab A, Jury E. On the strictly-positive realness of Schur interval functions [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1990,35(12):1382-1385

[4] Xu J S, Rachid A, Darouach M. Robustness analysis of interval matrices based on Kharitonov's theorem [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1998,43(2):273-277

[5] Soh Y C, Xie L, Foo Y K. Maximal perturbation bound for perturbed polynomials with roots in the left-sector [J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, Part 1, 1994,42(4):281-285

[6] Mastorakis N E. Robust stability of polynomials: new approach [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997,93(3):635-638

[7] Luenberger D G. Introduction to Linear and Nonlinear Programming [M]. Reading, Massachusetts: Addison Wesley Publishing Company, 1973

[8] Ren Fuyao. Applied Complex Analysis [M]. Shanghai: Fudan University Press, 1993

[9] Zhou Kemin, Doyle J C. Essentials of Robust Control [M]. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1998

本文作者简介

高利新 1969 年生.1994 年毕业于华东师范大学数学系,获硕士学位.现为浙江大学控制科学与工程系博士研究生.研究兴趣为鲁棒控制,H_∞ 控制,数值方法等. lxgao@iipc.zju.edu.cn

孙优贤 见本刊 2002 年第 1 期第 113 页.