

一类二阶时延神经网络的分岔分析和控制

陈从颜, 宋文忠

(东南大学 自动化研究所, 江苏 南京, 210096)

摘要: 讨论了一类二阶时延网络系统的非线性特性, 应用线性化稳定性和分岔理论, 提出了该系统从稳定到分岔的条件. 结论指出利用延迟时间可以进行分岔控制、极限环幅值控制等, 并给出了仿真的具体实例.

关键词: 时延神经网络; 分岔控制; 极限环控制

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Bifurcation analysis and control of delayed neural network model with two-neurons

CHEN Cong-yan, SONG Wen-zhong

(Institute of Automation, Southeast University, Jiangsu Nanjing 210096, China)

Abstract: The nonlinear behavior in a delayed neural network model with two neurons is investigated. Conditions from stability to bifurcation of the model are presented by applying the linear stability theory. The analytical mechanism for the beginning of cyclic behavior is based on a Hopf-type bifurcation theory. The bifurcation and amplitude of the bifurcated solution are proved to be controlled by utilizing bifurcation stability coefficients can control bifurcation. An example is given and numerical simulations are performed to illustrate the results.

Key words: time delay neural networks; bifurcation control; amplitude control

1 引言 (Introduction)

近年来, Hopfield 型及一些归一化的神经网络模型^[1]在分类、联想记忆、并行运算和优化方面的广泛应用前景, 引起了人们的关注. 自 Hopfield^[1]后, Marcus 等^[2], Burton^[3], Gopalsamy 等^[4], Leonard Olien 等^[5], Junjie Wei 等^[6], Jiye Zhang 等^[7]又进一步研究了带有时延 Hopfield 模型, 其可简化为

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{u_i(t)}{R_i} + \sum_{j=1}^n T_{ij} g_j(u_j(t - \tau_j)) + I_i. \quad (1)$$

这里, $i = 1, 2, \dots, n$, T_{ij} 为连接矩阵, τ_i 为延迟时间参数, g_j 为有界单调连续函数, I_i 为外部偏置, $n \geq 2$ 为神经元个数. 在上述工作中, 他们着重讨论了时延 Hopfield 模型稳定的某些充分条件. 神经网络是一种典型的强非线性动力系统, 当系统的某参数发生变化时, 相当于系统受到“扰动”变为“邻近”的动力系统, 系统的定性行为发生变化, 这意味着系统发生分岔. 通过多动力系统分岔行为的分析, 可以了解到系统复杂行为产生的机理, 同时发现新的复杂现象,

并由此来控制系统的动力学行为.

Olien 和 Bélair^[5]研究了含有两个神经元的时延神经网络模型, 具体如下:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a_{11} \tanh(x(t - \tau_1)) + \\ \quad a_{12} \tanh(y(t - \tau_2)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a_{21} \tanh(x(t - \tau_1)) + \\ \quad a_{22} \tanh(y(t - \tau_2)). \end{cases} \quad (2)$$

但他们只讨论了在有限情况下 (如 $\tau_1 = \tau_2$, $a_{12} = a_{21} = 0$ 等) 系统稳定的充分条件, 本文将进一步分析系统 (2) 更为广泛的由稳定到 Hopf 分岔及极限环振幅控制等动力学问题, 由于 Hopf 分岔能产生极限环, 这也为极限环设计提供了思路.

2 分岔稳定性分析 (Analysis of bifurcation and stability)

2.1 自联系统稳定性分析 (Stability analysis of self-connection system)

定理 1 系统(2)的状态是有界的.

证 从式(2)中可以得到如下不等式

$$\begin{cases} -x(t) - |a_{11}| - |a_{12}| \leq \frac{dx(t)}{dt} \leq -x(t) + |a_{11}| + |a_{12}|, \\ -y(t) - |a_{21}| - |a_{22}| \leq \frac{dy(t)}{dt} \leq -y(t) + |a_{21}| + |a_{22}|. \end{cases} \quad (3)$$

考虑第一分式, 设 $a = |a_{11}| + |a_{21}|$, 则 $-a \leq \dot{x}(t) + x(t) \leq a$, 那么

$$-ae^t \leq \frac{d}{dt}e^t x(t) \leq ae^t.$$

两边积分

$$-a(e^t - 1) \leq e^t x(t) \big|_0^t \leq a(e^t - 1),$$

即

$$-a + e^{-t} + x(0) \leq x(t) \leq a - e^{-t} + x(0).$$

因此当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$-|a_{11}| - |a_{12}| + x(0) \leq x(t) \leq |a_{11}| + |a_{12}| + x(0).$$

同理可得当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} -|a_{21}| - |a_{22}| + y(0) &\leq \\ y(t) &\leq |a_{21}| + |a_{22}| + y(0). \end{aligned}$$

证毕.

假设系统(2)在 $[-\max(\tau_1, \tau_2)0]$ 范围内系统初始条件为连续函数, 可以得到如下定理:

定理 2 如果系统(2)参数满足如下条件, 则对任意 $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ 系统是稳定的,

$$|a_{11}| + |a_{21}| < 1, |a_{12}| + |a_{22}| < 1. \quad (4)$$

证 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V(x(t), y(t)) =$$

$$\begin{aligned} &|x(t)| + |y(t)| + (|a_{11}| + |a_{21}|) \int_{t-\tau_1}^t |x(s)| ds + \\ &(|a_{12}| + |a_{22}|) \int_{t-\tau_2}^t |y(s)| ds. \end{aligned} \quad (5)$$

根据式(2)和式(5)可计算出 $V(x, y)$ 的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), y(t)) &\leq \\ &-|x(t)| - |y(t)| + (|a_{11}| + |a_{21}|) |\tanh(x(t - \tau_1))| + \\ &(|a_{12}| + |a_{22}|) |\tanh(y(t - \tau_2))| + \\ &(|a_{11}| + |a_{12}|) (|x(t)| - |x(t - \tau_1)|) + \\ &(|a_{12}| + |a_{22}|) (|y(t)| - |y(t - \tau_2)|). \end{aligned} \quad (6)$$

上式可简化为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), y(t)) &\leq \\ &-(1 - (|a_{11}| + |a_{21}|)) |x(t)| - \\ &(1 - (|a_{12}| + |a_{22}|)) |y(t)|. \end{aligned} \quad (7)$$

对任意 $t \geq 0$, $\dot{V} \leq 0$, $\dot{V} = 0$ 时当且仅当 $|x| = |y| = 0$, 而 $(0, 0)$ 为系统(2)的平衡点, 因此在满足条件

(3)时由 Lasalle 不变性原理知系统是渐近稳定的, 即: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. 证毕.

从定理 2 可以得出, 如果参数满足条件(4), 延迟时间 τ_1, τ_2 的引入不会影响系统(2)的稳定性.

2.2 非自联系统稳定性分析 (Stability analysis of non-self-connection system)

在非自联情况下, $a_{11} = a_{22} = 0$, 系统(2)转变为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a_{12} \tanh(y(t - \tau_2)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a_{21} \tanh(x(t - \tau_1)). \end{cases} \quad (8)$$

比较系统(2)可以看出, 当 $|a_{12}| < 1$ 和 $|a_{21}| < 1$ 时, 对任意 $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, 系统(8)都是稳定的. 但为了进一步讨论稳定的更弱条件, 这里引入了线性化理论. 系统(8)在平衡点 $(0, 0)$ 线性化可以得到

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -x(t) + a_{12} y(t - \tau_2), \\ \frac{dy(t)}{dt} = -y(t) + a_{21} x(t - \tau_1). \end{cases} \quad (9)$$

从时滞微分方程理论可以得知, 如果方程(9)的解是渐近稳定的, 则系统(8)的解亦是局部渐近稳定的. 方程(9)解的稳定性是由其相应的特征方程根的实部所决定的,

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & -a_{12}e^{-\lambda\tau_2} \\ -a_{21}e^{-\lambda\tau_1} & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \\ &(\lambda + 1)^2 - a_{12}a_{21}e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

令 $\tau = (\tau_1 + \tau_2)/2$, 由上式可得

$$(\lambda + 1) = \pm \sqrt{a_{12}a_{21}} e^{-\lambda(\tau_1 + \tau_2)/2} = \pm \sqrt{a_{12}a_{21}} e^{-\lambda\tau}. \quad (11)$$

故 $\lambda = -1 \pm \sqrt{a_{12}a_{21}} e^{-\lambda\tau}$. 从中可以得到当 $0 \leq |a_{12}a_{21}|$ 时, 延迟的引入并不能使系统(8)失稳. 事实上, 设 $\lambda = \sigma + i\omega$, 由式(10)可以得到如下等式

$$\begin{cases} (1 + \sigma)^2 - \omega^2 - a_{12}a_{21}e^{2\tau\sigma} \cos 2\omega\tau = 0, \\ 2\omega(1 + \sigma) + a_{12}a_{21}e^{-2\tau\sigma} \sin 2\omega\tau = 0. \end{cases} \quad (12)$$

上式又可简化为 $[(1 + \sigma)^2 + \omega^2]^2 = a_{12}^2 a_{21}^2 e^{-4\tau\sigma}$, 其左边为正数, 可以进一步简化为

$$(1 + \sigma)^2 + \omega^2 = \|a_{12}a_{21}\| e^{-2\tau\sigma}. \quad (13)$$

从式(12)可以看出当 $0 \leq |a_{12}a_{21}| \leq 1$ 时, $\sigma > 0$ 是不可能的, 且是不依赖 τ 的大小, 因而可以得到定理 3.

定理 3 当 $0 \leq |a_{12}a_{21}| \leq 1$ 时, 系统(8)是局部稳定的, 而且是不依赖 τ 的大小.

3 非自联系统分岔 (Bifurcation of non-self-connection system)

在 $|a_{12}a_{21}| > 1$ 的情况下,系统(8)的稳定性与延迟时间 τ 有关.

1) $a_{12}a_{21} < -1$.

当延迟时间 $\tau = 0$,方程(10)可转化为 $(\lambda + 1)^2 - a_{12}a_{21} = 0$,显然其两个根具有负实部,即意味着系统(8)是局部渐近稳定的.显然当 $a_{12}a_{21} < -1$ 时,系统(8)只有一个平衡点 $(0,0)$.下面分析 $\tau \neq 0$ 的情况.

考虑特征方程(10)可以得到类似式(12)的方程

$$\begin{cases} e^{\sigma\tau}(\sigma + 1)\cos\omega\tau = \sqrt{-a_{12}a_{21}}|\sin\omega\tau|, \\ e^{\sigma\tau}\omega = \sqrt{-a_{12}a_{21}}|\cos\omega\tau|. \end{cases} \quad (14)$$

令 $\sigma = 0$ 可以得到

$$\begin{cases} \sqrt{-a_{12}a_{21}}|\sin\omega\tau| = 1, \\ \sqrt{-a_{12}a_{21}}|\cos\omega\tau| = \omega. \end{cases} \quad (15)$$

由上式可得出 $1 + \omega^2 = |a_{12}a_{21}|$,从而解得 $\omega_0 = \sqrt{-a_{12}a_{21} - 1}$,并可得到 τ 在特征方程(10)的解为纯虚根时的解

$$\begin{cases} \tau^k = \frac{1}{\omega_0} \left[\sin^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{-a_{12}a_{21}}} \right) + 2k\pi \right], \\ k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

综上所述,可以归纳为如下定理:

定理 4 在系统(8)平衡点 $(0,0)$ 附近,如果 $a_{12}a_{21} < -1$,那么

① 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时,方程(11)的根具有严格负实部;

② 当 $\tau = \tau^i$ 时,系统(11)有一对纯虚根 $\pm i\omega_0$, 并当 $\tau \in (\tau^k, \tau^k + \delta)$ 时(δ 为小正数),方程(11)的特征根至少有一个将会出现正实部.

证 定理4的①及②前部分由前面分析可直接得到,下面证明②后部分.

事实上,可以求得方程(11)特征根的实部在延迟时间 $\tau = \tau^k$ 时的变化率.首先由

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\lambda(1+\lambda)}{1+\tau+\lambda\tau}$$

可得到

$$\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau^k)}{d\tau} = \frac{\omega_0^2}{(1+\tau)^2 + \omega_0^2\tau^2} > 0.$$

因而方程(11)的特征根至少有一个将会出现正实部. 证毕.

推论 1 对系统(8)有 $\tau^j (j = 0, 1, 2, \dots)$ 是系统(8)的 Hopf 分岔值.

2) $a_{12}a_{21} > 1$.

对于 $a_{12}a_{21} > 1$,类似地,可以得到如下定理:

定理 5 在系统(8)不稳定平衡点 $(0,0)$ 邻域,如果 $a_{12}a_{21} > 1$,那么

① 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时,系统(9)是在 $(0,0)$ 点是不稳定的.

② 当 $\tau = \tau^i$ 时,系统(11)有一对纯虚根 $\pm i\omega_0$, 并当 $\tau \in (\tau^k, \tau^k + \delta)$ 时(δ 为小正数),方程(11)的特征根仍有一个将会出现正实部.

4 实例分析(Example analysis)

对于非自联系统(8),考虑 $a_{12} = 2, a_{21} = -1.5$ 的实例情况.在 $a_{12}a_{21} < -1$ 情况下,当 $\tau = \tau^0$ 时,系统发生分岔现象,如当 $\tau = \tau^0 + \delta$ (δ 为一较小正数)时,由于系统在 $(0,0)$ 不稳定性和整个状态空间的有界性,因而系统稳定在极限环上.根据上面分析可以得到 $\omega_0 = \sqrt{2}$ 和 $\tau^0 = 0.4352$.当延迟时间 $\tau < \tau^0$ 时,系统(21)趋于平衡点 $(0,0)$,如图1所示;当 $\tau = \tau^0$ 时,系统出现分岔;当 $\tau > \tau^0$ 时,系统(21)稳定在极限环上,如图2所示.

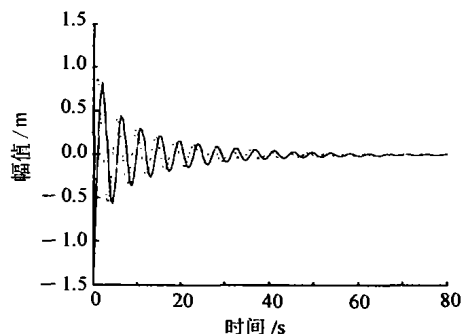


图1 $\tau < \tau^0$ 时系统状态
Fig. 1 System state when delay time $\tau < \tau^0$

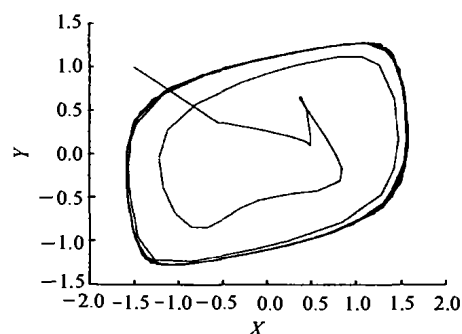


图2 $\tau < \tau^0$ 时系统状态
Fig. 2 System state when delay time $\tau < \tau^0$

5 极限环幅值控制(Control of limit cycle amplitude)

关于分岔控制和稳定一个经分岔后出现的极限环问题在近十年来得到了广泛研究.极限环控制涉及到的分岔幅值控制是指控制分岔后周期解的幅值.极限环幅值控制有着潜在的应用价值,例如,一个非线性系统中的混沌行为可以转换到期望幅值的

极限环上,或者在不希望系统在一个固定平衡点运行的情况下,利用幅值控制可以使得系统在围绕着平衡点以期望幅值振荡的极限环上运行^[7].如系统(2)在非自联 $a_{12}a_{21} < -1$ 情况下,由推论1知随延迟时间 τ 变化系统会出现 Hopf 分岔,即系统会具有一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega$,且 $\frac{d\lambda}{d\tau} \neq 0$. 一个系统的周期解的幅值与分岔稳定因子有直接关系.根据前面分析,延迟时间 τ 可作为分岔稳定因子,因此可以将 $\tau = (\tau_1 + \tau_2)/2$ 看作控制参数.通过 τ 的调节可以使得系统稳定性发生改变,另一方面还可以控制极限环幅值.我们考察了 $a_{12} = 2, a_{21} = -1.5$ 的实例中极限环幅值与 τ 的关系,结果如图3所示.

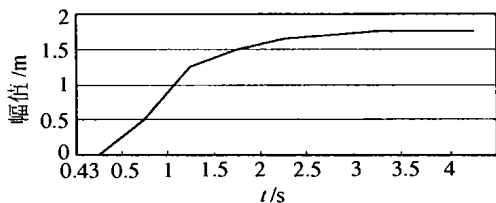


图3 极限环幅值与延迟时间关系

Fig. 3 Relationship of limit cycle amplitude and delay time

6 总结(Conclusion)

本文针对一类带有双时延两元神经网络系统的复杂动力学行为进行了分析.在线性化后系统的特征方程是带有指数的超越方程,正如 Olien 所指出,要找出所有具有负实部的特征解有关参数是不可能的.通过本文分析,得到了系统稳定、分岔条件,特别地提出了极限环幅值控制概念,指出了如何进行分

岔控制和极限环控制.

参考文献(References):

- [1] HOPFIELD J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons [J]. *Proc of National Academic Science*, 1984, 81: 3088 - 3092.
- [2] MARCUS C M, WESTERVELT R E. Stability of analog neural network with delay [J]. *Physical Review A*, 1989, 39(1): 347 - 359.
- [3] BURTON T A. Averaged neural networks [J]. *Neural Networks*, 1993, 6(6): 677 - 680.
- [4] GOPALSAMY K, LEUNG I. Delay induced periodicity in a neural netlet of excitation and inhibition [J]. *Physica D*, 1996, 89(3): 395 - 426.
- [5] OLIEN L, BÉLAIR J. Bifurcation, stability, and monotonicity properties of a delayed neural network model [J]. *Physica D*, 1997, 102(3): 349 - 363.
- [6] WEI Junjie, RUAN Shigui. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays [J]. *Physica D*, 1999, 130(3): 255 - 272.
- [7] ZHANG Jiye, JIN Xuesong. Global stability in delayed Hopfield neural network models [J]. *Neural Networks*, 2000, 13(7): 745 - 753.
- [8] CHEN Guanrong. *Controlling Chaos and Bifurcations Engineering Systems* [M]. New York: CRC Press, 1999.

作者简介:

陈从颜 (1969—),男,博士生.研究方向为非线性系统中混沌的控制与应用. Email: chency@seucy.edu.cn;

宋文忠 (1936—),男,博士生导师.长期从事柔性制造系统、先进控制理论应用等方面的研究.