

一种基于 Pade 近似的频域辨识与频域模型降阶新方法

王学雷, 邵惠鹤

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘要: 研究了基于积分最小二乘指标的 SISO 时滞系统频域辨识与频域模型降阶问题. 通过采用 Pade 近似, 将积分最小二乘指标推广到可以处理时滞系统的情形. 深入分析了 Pade 近似所引入误差, 揭示了采用 Pade 近似的可行性与有效性. 所提出的方法能够用最小二乘类算法高效求解, 无须困难的非线性优化. 仿真验证了所提出方法的有效性.

关键词: 频域辨识; 模型降阶; 积分最小二乘指标; Pade 近似; 最小二乘法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

New method of frequency-domain identification and model reduction based on Pade approximation

WANG Xue-lei, SHAO Hui-he

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: Based on the integral least-squares index, a new approach to frequency-domain identification and model reduction of SISO systems with delay is proposed. With the adoption of Pade approximation, the integral least-squares index is extended to the case of systems with delay. Through error analysis, the feasibility and effectiveness of Pade approximation is shown. The least-squares style algorithm can be applied in the method and troublesome nonlinear optimization is avoided. Illustrative simulations are offered to verify the effectiveness of proposed scheme.

Key words: frequency-domain identification; model reduction; integral least-squares index; Pade approximation; least-square method

1 引言 (Introduction)

辨识与模型降阶是控制系统分析、设计过程中一个重要的部分, 其目的是得到一个充分描述原系统动力学特性的低阶模型. 辨识与降阶首先要定义某种范数作为指标, 然后对由此导致的优化问题进行求解. 其中, 指标的选取决定了低阶模型的特性及求解的复杂程度. 更加合理的指标定义和更加简化的求解是研究的主要方向.

工业生产实际中, 许多系统带有时滞, 而且高阶多容特性也将导致滞后行为. 这使得采用带有时滞的低阶模型结构具有更加广泛的意义, 然而, 由于时滞的出现, 问题的求解常常涉及困难的非线性优化过程^[1,2]. 文[3]明确指出了现有的基于非线性优化的方法所面临的巨大困难.

文[4]提出了所谓频域积分最小二乘指标, 该指标能够更好地强调低阶模型对原系统动力学特性的

表达, 而且求解容易, 同时, 还含有面向控制辨识的内在特性. 虽然该指标具有许多优点, 但只能处理低阶模型不带有时滞的有限维情形, 这在实际的使用中显然有很大局限性.

本文通过 Pade 近似, 将频域积分最小二乘指标推广到低阶模型带有时滞的无限维情形. 深入分析了 Pade 近似对结果的影响, 揭示了 Pade 近似的可行性和有效性. 本文所提出的辨识与模型降阶方法统一了指标的合理与求解的简单性, 具有一定的工程意义.

2 频域积分最小二乘指标 (Frequency-domain integral least-squares index)

2.1 指标描述 (Index description)

文[4]提出了频域积分最小二乘指标, 简述如下. 假设低阶模型的传递函数是

$$\hat{G}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} + s^n}. \quad (1)$$

将其转化为时域微分方程描述

$$x^{(n)}(t) + b_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) = a_m r^{(m)}(t) + \cdots + a_1 r^{(1)}(t) + a_0 r(t). \quad (2)$$

其中 $x(t)$ 和 $r(t)$ 分别表示低阶模型的输出和输入信号. 令采用 $r(t)$ 作为输入信号时原系统的输出是 $y(t)$, 并有 $y(t) = x(t) + \Delta(t)$, 其中 $\Delta(t)$ 表示由于模型偏差所导致的输出信号间的偏差.

定义偏差

$$e(t) = [y^{(n)}(t) + b_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 y^{(1)}(t) + b_0 y(t)] - [a_m r^{(m)}(t) + \cdots + a_1 r^{(1)}(t) + a_0 r(t)] = \Delta^{(n)}(t) + b_{n-1} \Delta^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 \Delta^{(1)}(t) + b_0 \Delta(t). \quad (3)$$

可见, $e(t)$ 包含了偏差及其各阶导数, 代表了低阶模型与原系统或高阶模型间的动力学特性的差异. 式(3)两边取 Laplace 变换并注意到 $Y(s) = G(s)R(s)$, $G(s)$ 是原系统或者高阶模型的传递函数, 得到下式

$$E(s) = [s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0] Y(s) - [a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0] R(s) = \{[s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0] G(s) - [a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0]\} R(s). \quad (4)$$

选取指标为

$$J = \int_0^\infty e^2(t) dt. \quad (5)$$

根据 Parseval 定理, 式(5)等价于如下频域指标

$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s) E(-s) ds. \quad (6)$$

将式(4)代入式(6), 令 $s = j\omega$. 同时, 考虑到对于实际系统, 仅要在一个选定的频率范围 $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ 内考虑问题就可以了, 于是式(6)成为

$$J = \min_{a^T, b^T} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} |B(j\omega)G(j\omega) - A(j\omega)|^2 |R(j\omega)|^2 d\omega. \quad (7)$$

这就是频域积分最小二乘指标, 其中的 $R(j\omega)$ 表示所选择输入信号的频率特性. 为了实际处理的方便, 将其转化为离散形式

$$J = \sum_{k=1}^M h_k |B(j\omega_k)G(j\omega_k) - A(j\omega_k)|^2 |R(j\omega_k)|^2 = \sum_{k=1}^M v_k |G(j\omega_k)B(j\omega_k) - A(j\omega_k)|^2. \quad (8)$$

其中 $v_k = h_k |R(j\omega_k)|^2$ 表示权值, $h_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ (假设 $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_M < \omega_{M+1}$).

2.2 频域积分最小二乘指标与其它指标的比较 (Comparison between frequency-domain integral least-squares index and other indexes)

由式(3), 该指标实际包括了偏差及偏差的各阶导数, 因此, 与其它指标, 如 Levy 法、Santhan 法以及 Lawrence 法等^[5]相比, 能够更加明晰地刻划低阶模型与原系统间动力学特性的差异, 这是该指标的优点之一. 另外, 由式(8), 该指标所导致的优化问题可以采用最小二乘类方法求解, 这是积分最小二乘指标的另一个优点.

更重要的, 积分最小二乘指标的权值具有非常明确的意义. 首先, 因子 $h_k = \omega_{k+1} - \omega_k$, 表明两个测试点频率相差越大则相应的权值越大, 也即越强调对有限信息的利用, 相反, 如果在相近的频率范围内测试点比较多, 则相应的权值比较小, 从而强调对多个数据点的利用; 其次, 权值含有所谓的“虚拟输入” $R(j\omega)$, 它代表了对模型在何种输入下具有最优特性的要求. 例如, 如果控制策略强调模型阶跃响应的精度, 则可将输入选为阶跃信号, 即 $R(s) = 1/s$; 如果要求对高频信号具有比较好的响应, 则可选输入为脉冲信号, 即 $R(s) = 1$. 其实, 输入信号可以选为任何一种事先设计好的形式, 使得模型在该信号激励下具有最佳性能, 这体现了面向控制辨识的思想. 积分最小二乘指标的这一特性是其它指标所不具备的.

3 基于Pade近似的频域积分最小二乘指标 (Frequency-domain integral least-squares index based on Pade approximation)

必须指出, 基于积分最小二乘指标的辨识与模型降阶无法采用带有时滞的低阶模型结构, 因为时滞的出现将导致一个无限维问题, 不能用最小二乘类算法求解. 然而, 正如文[1, 6]所指出的, 采用带有时滞的低阶模型非常必要, 否则低阶模型中将有可能出现非最小相位零点. 因此, 在保留该指标优点的同时, 将其推广到可以处理带有时滞的低阶模型的情况是非常有意义的.

3.1 Pade近似的引入(Adoption of Pade approximation)

考虑带有时滞的低阶模型结构

$$\hat{G}(s) = \frac{a_0 + a_1 s + \cdots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + \cdots + b_{n-1} s^{n-1} + s^n} e^{-\tau s} = \frac{A(s)}{B(s)} e^{-\tau s}. \quad (9)$$

由于时滞的引入,低阶模型成为一个无限维系统.为了将其转化为一个有限维系统,引入 Pade 近似.假设取三阶 Pade 近似,即

$$e^{-\tau s} \doteq \frac{1 - 0.5\tau s + p_1(\tau s)^2 - p_2(\tau s)^3}{1 + 0.5\tau s + p_1(\tau s)^2 + p_2(\tau s)^3} = \frac{1 - q_1 s + q_2 s^2 - q_3 s^3}{1 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3} = \frac{C(s)}{D(s)}. \quad (10)$$

将式(10)代入式(9),得到

$$\hat{G}'(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{E(s)}{F(s)}. \quad (11)$$

注意到 $\hat{G}'(s)$ 的形式,它可以采用积分最小二乘指标来处理,这使得能够用最小二乘类算法求解有时滞低阶模型情况下的辨识与降阶问题.

3.2 对 Pade 近似的讨论 (Discussion about Pade approximation)

前面简单描述了基于 Pade 近似的基本思想,下面将深入分析引入 Pade 近似对辨识结果所产生的影响.

设 Pade 近似所导致的误差为 $\epsilon(s)$,令 $s = j\omega$ 则有

$$\begin{aligned} \hat{G}(j\omega) &= \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} e^{-j\omega\tau} = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \left[\frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} + \epsilon(j\omega) \right] = \\ &= \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} \frac{C(j\omega)}{D(j\omega)} + \epsilon(j\omega) \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)} = \\ &= \hat{G}'(j\omega) + \epsilon(j\omega) \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)}. \end{aligned} \quad (12)$$

该式解析地表示了 Pade 近似的精度,由于在处理实际问题时所要考虑的频率小于系统临界角频率 ω_c ,所以讨论 $\omega \leq \omega_c$ 范围内的 Pade 近似更有实际意义.以 3 阶 Pade 近似为例,定义误差 σ :

$$\begin{aligned} \sigma &= \left| \frac{\epsilon(j\omega)}{e^{-j\omega\tau}} \right| = \\ &= \left| 1 - \frac{1 - q_1(j\omega) + q_2(j\omega)^2 - q_3(j\omega)^3}{1 + q_1(j\omega) + q_2(j\omega)^2 + q_3(j\omega)^3} \cdot \frac{1}{e^{-j\omega\tau}} \right| = \\ &= |1 - [\cos(\alpha) + j\sin(\alpha)]| = \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\alpha)} = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\alpha = \alpha(\omega)$ 表示 Pade 近似的相位偏差,一般地在所考虑的频率范围内相位偏差 $0 \leq \alpha < \pi$,并且是角频率 ω 的单调增函数.式(13)表明, σ 随着角频率 ω 的增加而单调增加,于是可以得到满足某一精度要求的最大角频率 $\bar{\omega}$. 设原系统的临界角频率为 ω_c ,时滞环节的临界角频率为 ω_{rc} ,如果有 $\omega_c < \omega_{rc}$

$< \bar{\omega}$, 则 Pade 近似的精度可以满足要求. 现令 $\sigma \leq 0.05$,可以得到 $\tau - \bar{\omega}$ 的关系曲线,同时也将时滞环节的 $\tau - \omega_{rc}$ 曲线在同一个图中表示出来.

由图 1,在所考虑的时滞取值范围内都有 $\omega_{rc} < \bar{\omega}$,并注意到,原系统有理部分将使临界角频率进一步降低,即 $\omega_c < \omega_{rc} < \bar{\omega}$,所以对于原系统来说由 Pade 近似所导致的近似误差也将进一步降低.同时,由图 1 还可以看出,基于 Pade 近似的辨识与降阶也能够用于大时滞系统,因为这时候的系统临界角频率也极大的降低了,这是一个非常有意义的结论.另外,联系式(12),在 $[0, \omega_c]$ 范围内有

$$\begin{aligned} \eta(\omega_i) &= \left| \frac{\hat{G}(j\omega_i) - G'(j\omega_i)}{\hat{G}(j\omega_i)} \right| = \left| \frac{\epsilon(j\omega_i) \frac{A(j\omega_i)}{B(j\omega_i)}}{\frac{A(j\omega_i)}{B(j\omega_i)} e^{-j\omega_i\tau}} \right| = \\ &= \left| \frac{\epsilon(j\omega_i)}{e^{-j\omega_i\tau}} \right| = \sigma(\omega_i) \leq \sigma(\omega_c) < \sigma(\omega_{rc}). \end{aligned} \quad (14)$$

所以模型之间的误差完全由 Pade 近似误差来体现,这对了解和控制 Pade 近似对结果所产生的影响是非常简明的.式(14)实际给出了一个频域模型误差界,这对于控制系统的分析和设计,如鲁棒控制等,也是非常有益的.

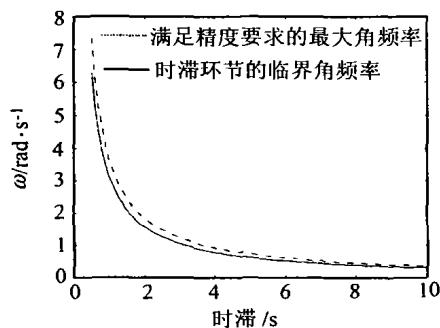


图 1 保证所要求精度 $\sigma \leq 0.05$ 的角频率上界 $\bar{\omega}$ 和时滞环节 $e^{-\tau s}$ 的临界角频率 ω_{rc} 的关系曲线

Fig. 1 The up limit angle frequency $\bar{\omega}$ with $\sigma \leq 0.05$ and the ultimate angle frequency ω_{rc} of time delay $e^{-\tau s}$

4 基于积分最小二乘指标的时滞系统频域辨识与模型降阶算法 (Frequency-domain identification and model reduction of time-delay systems based on integral least-square index)

对于工业实际,尤其是过程工业中的绝大多数对象,选用一阶或二阶加纯滞后低阶模型就可以充分描述其动态特性^[7].不失一般性,这里选取如下低阶模型结构:

$$\hat{G}(s) = \frac{k}{1 + b_1 s + b_2 s^2} e^{-\tau s} = \frac{A(s)}{B(s)} e^{-\tau s}.$$

按照式(11),首先将其转化为一个有限维的形式

$$\hat{G}'(s) = \frac{E(s)}{F(s)} = \frac{e_0 + e_1 s + e_2 s^2 + e_3 s^3}{f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + f_4 s^4 + f_5 s^5},$$

再由式(8)得到采用有时滞低阶模型结构的积分最小二乘指标

$$J = \sum_{k=1}^M v_k |F(j\omega_k)G(j\omega_k) - E(j\omega_k)|^2. \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} F(j\omega_k)G(j\omega_k) - E(j\omega_k) = & [1 + (j\omega_k)f_1 + (j\omega_k)^2 f_2 + (j\omega_k)^3 f_3 + \\ & (j\omega_k)^4 f_4 + (j\omega_k)^5 f_5]G(j\omega_k) - [e_0 + \\ & (j\omega_k)e_1 + (j\omega_k)^2 e_2 + (j\omega_k)^3 e_3] = \bar{H}_k^T \Theta - z_k. \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$\bar{H}^T = [(j\omega_k)G_k, (j\omega_k)^2 G_k, \dots, (j\omega_k)^5 G_k, \\ -1, -j\omega_k, -(j\omega_k)^2, -(j\omega_k)^3],$$

$$\Theta = [f_1, \dots, f_5, e_0, \dots, e_3]^T,$$

$$z_k = -G(j\omega_k).$$

再令

$$\Phi = \begin{bmatrix} \text{Re}[\bar{H}_1^T] \\ \vdots \\ \text{Re}[\bar{H}_M^T] \\ \text{Im}[\bar{H}_1^T] \\ \vdots \\ \text{Im}[\bar{H}_M^T] \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} \text{Re}[z_1] \\ \vdots \\ \text{Re}[z_M] \\ \text{Im}[z_1] \\ \vdots \\ \text{Im}[z_M] \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} v_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & v_M & & \\ & & & v_1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & v_M \end{bmatrix},$$

于是得到式(15)的最小二乘解^[8]

$$\Theta = [\Phi^T \Lambda \Phi]^{-1} \Phi^T \Lambda Z. \quad (17)$$

注 为了改善计算的数值稳定性或满足在线的需要,可以采用其它各种最小二乘类算法.进一步,建立多项式系数之间的关系.

由

$$E(s) = A(s)C(s) = k - kq_1 s + kq_2 s^2 - kq_3 s^3, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F(s) = B(s)D(s) = & 1 + (b_1 + q_1)s + (b_2 + b_1 q_1 + q_2)s^2 + \\ & (b_2 q_1 + b_1 q_2 + q_3)s^3 + (b_2 q_2 + b_1 q_3)s^4 + b_2 q_3 s^5, \end{aligned} \quad (19)$$

可以得到

$$\begin{aligned} k &= e_0, \quad q_1 = -e_1/k, \quad q_2 = e_2/k, \\ q_3 &= -e_3/k, \quad b_1 = f_1 - q_1, \\ b_2 &= f_2 - q_2 - b_1 q_1. \end{aligned}$$

进一步,由 Pade 近似,可得到低阶模型的时滞 $\tau = 2q_1$.

5 仿真(Simulations)

例 1 高阶对象^[9]

$$G_1(s) = \frac{(s+1)e^{-s}}{(s^2+s+1)^2(s+2)^4},$$

该系统的临界角频率 $\omega_c = 0.6720$. 取 $\omega = 0.1k$, $k = 1, 2, \dots, 6$, 六个点, 输入取单位阶跃信号, 即 $R(s) = \frac{1}{s}$. 经过式(17)的最小二乘算法得到降阶模型为

$$G'_1(s) = \frac{0.0625e^{-2.9735s}}{1 + 1.1086s + 1.7033s^2}.$$

降阶模型与原系统的 Nyquist 曲线如图 2 所示.

定义误差 $E = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{G'_1(j\omega_k) - G_1(j\omega_k)}{G_1(j\omega_k)} \right|$. 其中 $\omega_{k+1} = \omega_k + 0.01$, $\omega_1 = 0$ 且 $\omega_n \cong \omega_c$. 对本例, $E = 0.0378 < 0.05$. 由此,验证了在取 3 阶 Pade 近似的情况下,确实能够保证结果的精度并有式(19)成立,这对实际问题的处理是非常有意义的.

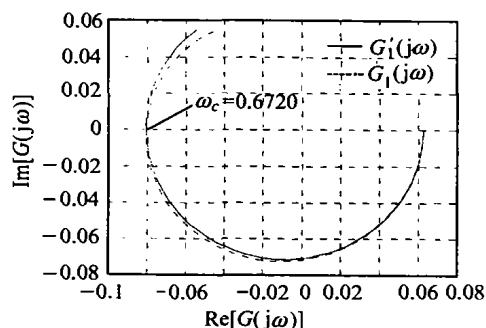


图 2 $G_1(j\omega)$ 与 $G'_1(j\omega)$ 的 Nyquist 曲线比较
Fig. 2 The comparison between Nyquist curves of $G_1(j\omega)$ and $G'_1(j\omega)$

例 2 大滞后对象

$$G_2(s) = \frac{3e^{-10s}}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

其临界角频率 $\omega_c = 0.2714$, 输入信号同例 1, 辨识得到低阶模型为

$$G_2'(s) = \frac{0.5e^{-8.5174s}}{1 + 3.2588s + 4.3745s^2}.$$

误差指标 $E = 0.0164 < 0.05$, 同样验证了式(19). 低阶模型和原系统的频率响应曲线如图3所示. 这个例子表明, 本方法可以处理大滞后系统的辨识与降阶问题, 验证了3节所做的分析.

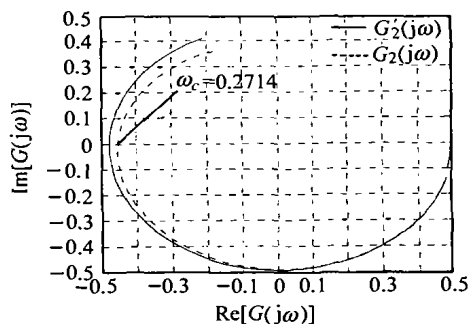


图3 $G_2(j\omega)$ 与 $G_2'(j\omega)$ 的Nyquist曲线比较

Fig. 3 The comparison between Nyquist curves of $G_2(j\omega)$ and $G_2'(j\omega)$

6 结论(Conclusions)

本文讨论了基于积分最小二乘指标的频域辨识与模型降阶问题. 通过Pade近似, 提出了一种能够采用有时滞低阶模型结构的频域辨识与降阶新方法. 深入分析了Pade近似对结果的影响, 给出了模型误差同Pade近似误差的关系. 利用该关系可以很方便的估计引入Pade近似对结果的影响, 方便控制系统的分析和设计. 最后的仿真取得了非常好的结果.

应该指出, 本文方法具有如下优点:

1) 采用带有时滞的低阶模型结构, 具有更加广泛的代表性, 能更好地表示原系统的动力学行为, 避免了引入非最小相位零点等问题;

2) 所采用的指标更好地表达了模型的动态特性, 这对保证控制系统分析与设计的准确性、可靠性是非常有意义的;

3) 通过引入Pade近似, 避免了产生非线性优化

问题, 使得可以采用最小二乘类算法高效求解, 保证了结果的精度, 提高了结果的可靠性, 这对于处理实际问题是非常重要的.

本文所提出的辨识与模型降阶方法统一了指标的合理性与求解的简单性, 具有一定的工程意义.

参考文献(References):

- [1] XUE Dingyu, ATHERTON D P. A suboptimal reduction algorithm for linear systems with delay [J]. *Int J Control*, 1994, 60(2): 181 - 196.
- [2] KARPE P A, MADHAVAN K P, CHIDAMBARAM M. Model identification and reduction in frequency domain [J]. *Int J Control*, 1987, 45(): 421 - 438.
- [3] ZHANG Liqian, LAM J. Optimal weighted L_2 model reduction of delay systems [J]. *Int J Control*, 1999, 72(1): 39 - 48.
- [4] WHIFIELD A H, WILLIAMS N G. Integral least-squares technique for frequency-domain model reduction [J]. *Int J of Systems Science*, 1988, 19(8): 1355 - 1373.
- [5] SHI Weixiang, YOU Dechang. *Basic System Identification* [M]. Shanghai: Press of Shanghai Science and Technology, 1988 (in Chinese).
- [6] HALEVI Y. Reduced-order models with delay [J]. *Int J Control*, 1996, 64(4): 773 - 744.
- [7] SEBORG D E, EDGR T F, MELLICHAMP D A. *Process Dynamics and Control* [M]. New York: Wiley, 1989.
- [8] FANG Chongzhi, XIAO Deyun. *Process Identification* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1988 (in Chinese).
- [9] WANG Qingguo, ZHANG Yu. A fast algorithm for reduced-order modeling [J]. *ISA Transactions*, 1999, 38(2): 225 - 230.

作者简介:

王学雷 (1973—), 男, 1999年在大连理工大学取得硕士学位. 1999年至2002年在上海交通大学自动化系攻读博士学位, 目前在中国科学院自动化研究所工作. 研究兴趣包括过程控制, 工业过程建模, 先进控制, 神经网络理论等. Email: xlwang98@263.net;

邵惠鹤 (1936—), 男, 上海交通大学自动化研究所教授, 博士生导师. 研究领域包括先进控制, 工业过程模型化, 智能控制, 现场总线技术等.