文章编号：1000－8152(2003)01－0139－04

时变不确定离散时滞系统的 H_∞ 鲁棒控制

李志虎[1]，王景成[2]，邵惠鹤[2]
(1.中兴通讯股份有限公司，广东 深圳 518057；2.上海交通大学 自动化系，上海 200030)

摘要：研究了一类线性不确定离散时滞系统的 H_∞ 鲁棒控制问题，其时变不确定项是范数有界的，但无需满足匹配条件.基于线性矩阵不等式(LMI)方法，得到了可 H_∞ 鲁棒镇定的一个充分条件.通过求解一个特定的线性矩阵不等式，即可获得 H_∞ 状态反馈控制器.具体算例说明了该方法的有效性.

关键词：不确定离散系统；时滞；H_∞ 鲁棒控制；线性矩阵不等式
中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

H_∞ robust control of discrete time-delay systems with time-varying uncertainty

LI Zhi-hu[1], WANG Jing-cheng[2], SHAO Hui-he[2]
(1.Zhongxing Telecommunication Equipment Corporation, Ltd., Guangdong Shenzhen 518057, China;
2.Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The problem of H_∞ robust control for a class of linear uncertain discrete time-delay systems is studied. The time-varying uncertainties are assumed to be norm-bounded and requires no matching condition. Based on linear matrix inequalities (LMI) approach, a sufficient condition for the systems to be H_∞ stabilizable is presented. By solving a certain linear matrix inequality, the H_∞ state feedback controllers are obtained. A numeric example is given to demonstrate the effectiveness of the method.

Key words: uncertain discrete systems; time-delay; H_∞ robust control; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

近年来，不确定时滞系统的 H_∞ 鲁棒控制引起许多学者的极大兴趣并得到了不少重要结果[1~3]，Riccati 方程方法已成为 H_∞ 控制分析与综合的一种有效方法.令人遗憾的是，涉及离散不确定时滞系统 H_∞ 控制的文献报道却很少.虽然通过状态增维的方法[4]可将离散时滞系统转变为不含时滞的离散系统，然而由于离散 Lyapunov 方程关于不确定矩阵的非线性使得难以处理参数不确定性，此外，如果时滞未知，将无法使用这一方法.文献[5]使用 Riccati 方程讨论了状态矩阵 A 带有不确定性的离散时滞系统的控制问题，文献[6]在文献[5]的基础上进一步考虑了控制矩阵 B 的不确定性.文献[7]曾指出，通过参数化可将不确定离散时滞系统转化为确定型离散时滞系统，利用 LMI 方法设计 H_∞ 控制器，但其不确定性必须满足一个严格的匹配条件，在实际控制系统中这是很难满足的.本文基于 LMI 来讨论比文献[5~7]更一般的不确定离散时滞系统的 H_∞ 鲁棒控制问题，而不确定性无需满足匹配条件.采用 LMI 技术可一次性求解出 H_∞ 控制律，克服了文献[5，6]求解 Riccati 方程时需要试凑调整一些参数和矩阵的缺陷.

2 系统描述与定义(System description and definitions)

考虑下面的线性不确定离散时滞系统

$$\begin{cases} x(k+1)=(A+\Delta A)x(k)+(A_1+\Delta A_1)x(k-\tau_1)+ \\ \qquad (B+\Delta B)u(k)+(B_1+\Delta B_1)u(k-\tau_2)+ \\ \qquad B_w w(k), \\ z(k)=(C+\Delta C)x(k)+(D+\Delta D)u(k), \\ x(k)=\varphi(k),\ k\leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(k)\in \mathbf{R}^n$ 是状态变量，$u(k)\in \mathbf{R}^m$ 是控制输入，$w(k)\in \mathbf{R}^p$ 是属于 $l_2[0,\infty)$ 空间的干扰输入，$z(k)\in \mathbf{R}^q$ 是被控输出，$A, A_1, B, B_1, B_w, C, D$ 是适

收稿日期：2000－06－28；收修改稿日期：2002－03－13.

维常数矩阵，$\Delta A,\Delta A_1,\Delta B,\Delta B_1,\Delta C,\Delta D$ 是不确定实值矩阵函数，它们表示了系统中随时间变化的参数不确定性，τ_1,τ_2 是未知的正整数，分别表示系统的状态滞后和控制滞后，并满足 $0<\tau_i\leqslant\tau^*$，$i=1,2$（τ^* 已知），$\varphi(k)$ 是初始条件．为不失一般性，假定系统的参数不确定性具有如下形式

$$\begin{cases}\Delta A = E_1F_1(k)G_1,\ \Delta A_1 = E_2F_2(k)G_2,\\ \Delta B = E_3F_3(k)G_3,\ \Delta B_1 = E_4F_4(k)G_4,\\ \Delta C = E_5F_5(k)G_5,\ \Delta D = E_6F_6(k)G_6.\end{cases} \tag{2}$$

其中 $E_i,G_i(i=1,2,\cdots,6)$ 是已知的适维常数矩阵，$F_i(k)\in\mathbb{R}^{e_i\times g_i}$ 是满足下述不等式约束的未知函数矩阵

$$F_i^{\mathrm T}(k)F_i(k)\leqslant I_{g_i},\ i=1,2,\cdots,6. \tag{3}$$

其中 I_{g_i} 是 $g_i\times g_i$ 单位矩阵．

定义 1[8] 若存在对称正定矩阵 P,Q_1,Q_2 以及正常数 α 使得对于任意 $(x(k),k)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$、任意容许的不确定性，Lyapunov 函数

$$V(x(k),k)=x^{\mathrm T}(k)Px(k)+\sum_{i=k-\tau_1}^{k-1}x^{\mathrm T}(i)Q_1x(i)+\sum_{i=k-\tau_2}^{k-1}x^{\mathrm T}(i)Q_2x(i). \tag{4}$$

关于 k 的前向差分满足

$$\Delta V(x(k),k)=V(x(k+1),k+1)-V(x(k),k)\leqslant-\alpha\|x(k)\|^2, \tag{5}$$

则不确定离散时滞系统(1)（$u(k)=0,w(k)=0$）是二次稳定的．

定义 2 对于系统(1)，如果存在线性状态反馈控制律

$$u(k)=Kx(k). \tag{6}$$

其中 $K\in\mathbb{R}^{m\times n}$，使得下列条件满足，则不确定离散时滞系统(1)被称为是具有 $\mathrm H_\infty$ 范数界 γ 可镇定的．

① 闭环系统是二次稳定的；

② 给定正常数 γ，在零初始条件下，满足 $\mathrm H_\infty$ 范数约束条件 $\|z(k)\|_2\leqslant\gamma\|w(k)\|_2$，其中 $\|\cdot\|_2$ 为标准的 $l_2[0,\infty)$ 范数．

引理 1[9] 给定适当维数的矩阵 E,G,F，且 $F^{\mathrm T}F\leqslant I$，则对任意标量 $\mu>0$，有

$$EFG+G^{\mathrm T}F^{\mathrm T}E^{\mathrm T}\leqslant\mu EE^{\mathrm T}+\mu^{-1}G^{\mathrm T}G.$$

引理 2 给定适当维数的矩阵 Y,E_b 和 G_b，其中 Y 是对称的，如果存在正常数 $\mu_i,i=1,2,\cdots,N$，使得

$$Y+E_bX_\rho E_b^{\mathrm T}+G_b^{\mathrm T}X_\sigma^{-1}G_b<0. \tag{7}$$

其中 $\begin{cases}X_\rho=\mathrm{diag}\{\mu_1I_{\rho_1},\mu_2I_{\rho_2},\cdots,\mu_NI_{\rho_N}\},\\ X_\sigma=\mathrm{diag}\{\mu_1I_{\sigma_1},\mu_2I_{\sigma_2},\cdots,\mu_NI_{\sigma_N}\}.\end{cases}$

则对所有满足 $F_d^{\mathrm T}F_d\leqslant I_\sigma$ 的 $F_d=\mathrm{diag}\{F_1,F_2,\cdots,F_N\}$，$F_i\in\mathbb{R}^{\rho_i\times\sigma_i}$，$i=1,2,\cdots,N$，$\sigma=\sum_{i=1}^N\sigma_i$，下式成立

$$Y+E_bF_dG_b+G_b^{\mathrm T}F_d^{\mathrm T}E_b^{\mathrm T}<0. \tag{8}$$

这个引理是引理 1 的一个直接推论，具体证明从略．

3 主要结果(Main results)

定理 1 当系统(1)采用状态反馈控制律(6)时，对给定的正常数 γ 及容许的不确定性式(2)、式(3)，若存在正常数 α，对称正定矩阵 P,S_1,S_2 以及矩阵 K，使得

$$\begin{bmatrix}-P^{-1} & A_c & A_1+\Delta A_1 & B_1+B_1\\ A_c^{\mathrm T} & -P+S_1+K^{\mathrm T}S_2K+\alpha I_n & 0 & 0\\ (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm T} & 0 & -S_1 & 0\\ (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm T} & 0 & 0 & -S_2\end{bmatrix}\leqslant 0, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix}-P^{-1} & A_c & A_1+\Delta A_1 & B_1+\Delta B_1 & B_w & 0\\ A_c^{\mathrm T} & -P+S_1+K^{\mathrm T}S_2K & 0 & 0 & 0 & C_c^{\mathrm T}\\ (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm T} & 0 & -S_2 & 0 & 0 & 0\\ (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm T} & 0 & 0 & -S_1 & 0 & 0\\ B_w^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2I_p & 0\\ 0 & C_c & 0 & 0 & 0 & -I_q\end{bmatrix}<0. \tag{10}$$

其中 $A_c=A+BK+\Delta A+\Delta BK$，$C_c=C+DK+\Delta C+\Delta DK$，则闭环系统是二次稳定的，并且具有 $\mathrm H_\infty$ 范数界 γ．

证 系统(1)在使用控制律(6)时，相应的闭环系统为

$$\begin{cases} x(k+1) = A_c x(k) + (A_1 + \Delta A_1)x(k-\tau_1) + \\ \qquad (B_1 + \Delta B_1)Kx(k-\tau_2) + B_w w(k), \\ z(k) = C_c x(k). \end{cases} \tag{11}$$

选取 $Q_1 = S_1, Q_2 = K^{\mathrm{T}} S_2 K$，那么 Lyapunov 函数(4)沿闭环系统(11)的差分为

$$\Delta V(x(k),k) = x^{\mathrm{T}}(k+1)Px(k+1) + x^{\mathrm{T}}(k)(-P + S_1 + K^{\mathrm{T}}S_2K)x(k) - x^{\mathrm{T}}(k-\tau_1)S_1x(k-\tau_1) - x^{\mathrm{T}}(k-\tau_2)K^{\mathrm{T}}S_2Kx(k-\tau_2). \tag{12}$$

令扰动输入 $w(k) = 0$，于是有

$$\Delta V(x(k),k) = x_c^{\mathrm{T}}(k) R\, x_c(k). \tag{13}$$

其中

$$x_c(k) = [x^{\mathrm{T}}(k) \quad x^{\mathrm{T}}(k-\tau_1) \quad x^{\mathrm{T}}(k-\tau_2)K^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & A_c^{\mathrm{T}}P(A_1+\Delta A_1) & A_c^{\mathrm{T}}P(B_1+\Delta B_1) \\ (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}PA_c & R_{12} & (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}P(B_1+\Delta B_1) \\ (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm{T}}PA_c & (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm{T}}P(A_1+\Delta A_1) & R_{13} \end{bmatrix},$$

$$R_{11} = A_c^{\mathrm{T}}PA_c - P + S_1 + K^{\mathrm{T}}S_2K,\ R_{12} = -S_1 + (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}P(A_1+\Delta A_1),$$

$$R_{13} = -S_2 + (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm{T}}P(B_1+\Delta B_1).$$

考虑式(9)，利用 Schur 补性质[10]得到

$$\Delta V(x(k),k) \leqslant -\alpha \| x(k) \|^2. \tag{14}$$

由定义 1 可知闭环系统是二次稳定的.

为了证明系统 H_∞ 范数的有界性，引入 $J = \sum_{k=0}^{\infty}[z^{\mathrm{T}}(k)z(k) - \gamma^2 w^{\mathrm{T}}(k)w(k)]$. 在零初始条件下，对任意不恒等于零的 $w(k)$($w(k) \in l_2[0,\infty)$)，依据式(11)，(12)，于是得

$$J \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{\mathrm{T}}(k) U \xi(k). \tag{15}$$

其中

$$\xi(k) = [x^{\mathrm{T}}(k) \quad x^{\mathrm{T}}(k-\tau_1) \quad x^{\mathrm{T}}(k-\tau_2)K^{\mathrm{T}} \quad w^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}},$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & A_c^{\mathrm{T}}PB_w \\ U_{12}^{\mathrm{T}} & U_{14} & U_{15} & U_{16} \\ U_{13}^{\mathrm{T}} & U_{15}^{\mathrm{T}} & U_{17} & U_{18} \\ B_w^{\mathrm{T}}PA_c & U_{16}^{\mathrm{T}} & U_{18}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I_p + B_w^{\mathrm{T}}PB_w \end{bmatrix},$$

$$U_{11} = A_c^{\mathrm{T}}PA_c - P + S_1 + K^{\mathrm{T}}S_2K_2 + C_c^{\mathrm{T}}C_c,$$

$$U_{12} = A_c^{\mathrm{T}}P(A_1+\Delta A_1),\ U_{13} = A_c^{\mathrm{T}}P(B_1+\Delta B_1),$$

$$U_{14} = -S_1 + (A_1+A_1)^{\mathrm{T}}P(A_1+\Delta A_1),$$

$$U_{15} = (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}P(B_1+\Delta B_1),\ U_{16} = (A_1+\Delta A_1)^{\mathrm{T}}PB_w,$$

$$U_{17} = -S_2 + (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm{T}}P(B_1+\Delta B_1),$$

$$U_{18} = (B_1+\Delta B_1)^{\mathrm{T}}PB_w.$$

根据 Schur 补性质从式(10)可得 $U < 0$，那么 $J \leqslant 0$，所以 $\| z(k) \|_2 \leqslant \gamma \| w(k) \|_2$.　　证毕.

定理 2　给定正常数 γ，如果存在正常数 ϵ_i，$i = 1,2,\cdots,6$ 和对称正定矩阵 Z, V_1, V_2 以及矩阵 W 使得下面的 LMI 成立

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_0 & H_0 & H_1 & H_2 & H_3 & 0 & 0 & 0 \\ H_0^{\mathrm{T}} & -J_0 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 \\ H_1^{\mathrm{T}} & 0 & -J_1 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 \\ H_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -J_2 & 0 & 0 & 0 & H_6 \\ H_3^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_4^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -J_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_5^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -J_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_6^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & -J_6 \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

其中

$$\Omega_0 = -Z + \epsilon_1 E_1 E_1^{\mathrm{T}} + \epsilon_2 E_2 E_2^{\mathrm{T}} + \epsilon_3 E_3 E_3^{\mathrm{T}} + \epsilon_4 E_4 E_4^{\mathrm{T}},$$

$$H_0 = AZ + BW,\ J_0 = Z - V_1,$$

$$H_1 = A_1 Z,\ J_1 = V_1,\ H_2 = B_1 V_2,$$

$$J_2 = V_2,\ H_3 = B_w,\ J_3 = \gamma^2 I_p,$$

$$H_4 = [ZC^{\mathrm{T}} + W^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} \quad W^{\mathrm{T}} \quad ZG_1^{\mathrm{T}} \quad W^{\mathrm{T}}G_3^{\mathrm{T}} \quad ZG_5^{\mathrm{T}} \quad W^{\mathrm{T}}G_6^{\mathrm{T}}],$$

$$J_4 = \mathrm{diag}\{I_q - \epsilon_5 E_5 E_5^{\mathrm{T}} - \epsilon_6 E_6 E_6^{\mathrm{T}}, V_2, \epsilon_1 I_{g_1}, \epsilon_3 I_{g_3}, \epsilon_5 I_{g_5}, \epsilon_6 I_{g_6}\},$$

$$H_5 = ZG_2^{\mathrm{T}},\ J_5 = \epsilon_2 I_{g_2},\ H_6 = V_2 G_4^{\mathrm{T}},\ J_6 = \epsilon_4 I_{g_4},$$

则系统(1)是具有 H_∞ 范数界 γ 可镇定的，相应的反馈控制律 $u(k) = WZ^{-1}x(k)$.

证　应用引理 2、定理 1 和 Schur 补性质即可推证本定理，从略.

4　算例(Example)

考虑不确定离散时滞系统(1)，其参数矩阵分别为

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix},\ \Delta A = \begin{bmatrix} 0.2\sin x_1(k) & 0 \\ 0 & 0.2\sin x_2(k) \end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\0.1 & 0.3\end{bmatrix},\ \Delta A_1=\begin{bmatrix}0.1\cos x_1(k) & 0\\0 & 0.2\cos x_2(k)\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \Delta B=[0.2\sin(x_1(k)+x_2(k))],$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0.2\\0.2\end{bmatrix},\ \Delta B_1=\begin{bmatrix}0\\0.2\cos(x_1(k)x_2(k))\end{bmatrix},$$

$$B_w=\begin{bmatrix}0.4\\0.4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta C=\begin{bmatrix}0.2\cos x_1(k)\\0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ D=0.3,\ \Delta D=0.1\sin x_2(k).$$

给定 $\gamma=1$,应用 LMI 软件包求得

$$Z=\begin{bmatrix}0.6286 & -0.1785\\-0.1785 & 0.3953\end{bmatrix},$$

$$W=[-0.2032 \quad -0.2112].$$

因此 H_∞ 状态反馈控制器

$$u(k)=WZ^{-1}x(k)=[-0.5450 \quad -0.7804]x(k).$$

5 结语(Conclusion)

本文针对具有状态和控制滞后的线性不确定离散系统,基于二次稳定的概念给出了 H_∞ 控制器设计的 LMI 方法.只要解一 LMI 即可获得无记忆状态反馈控制律.该控制器不仅使闭环系统是鲁棒二次稳定的,而且满足一定的 H_∞ 范数约束.数值算例表明了 H_∞ 控制器设计方法的有效性与优越性.

参考文献(References):

[1] LEE J H, KIM S W, KWON W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 159 - 162.

[2] CHOI H H, CHUNG M J. Memoryless H_∞ controller design for linear systems with delayed state and control [J]. *Automatica*, 1995, 31(6): 917 - 919.

[3] YU Li, CHU Jian, SU Hongye. Robust memoryless H_∞ controller design for linear time-delay systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *Automatica*, 1996, 32(12): 1759 - 1762.

[4] ASTROM K J, WITTENMARK B. *Computer Controlled Systems: Theory and Design* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.

[5] SONG S H, KIM J K. H_∞ control of discrete-time linear systems with norm-bounded uncertainties and time delay in state [J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 137 - 139.

[6] MAHMOUD M S. Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays [J]. *Automatica*, 2000, 36(4): 627 - 635.

[7] KIM J H, PARK H B. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system [J]. *Automatica*, 1999, 35(8): 1443 - 1451.

[8] VERRIEST E, IVANOV A F. Robust stability for delay-difference equations [A]. *Proc of IEEE Conference on Decision and Control Conference* [C]. USA: IEEE Press, 1995, 386 - 391.

[9] WANG Y, XIE L, DE SOUZA C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear Systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(2): 139 - 149.

[10] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory [J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1994, 15: 7 - 9.

作者简介:

李志虎 (1962 —),男,2001 年获上海交通大学博士学位,现在深圳中兴通讯股份有限公司工作.研究领域为鲁棒计算机控制等. Email: ezhihuli@yahoo.com.cn;

王景成 (1972 —),男,浙江大学博士,德国洪堡学者,现为上海交通大学自动化系副教授.研究领域为线性系统的鲁棒控制,计算机辅助设计等;

邵惠鹤 (1936 —),男,现为上海交通大学自动化系教授,博士生导师.目前研究兴趣是工业过程模型化及优化控制,智能控制等.