

时变系统的统一和通用的最优白噪声估值器

邓自立

(黑龙江大学 自动化系 应用数学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 对带相关噪声的时变系统, 基于 Kalman 滤波提出了统一和通用的最优白噪声估值器, 它包括观测白噪声估值器和输入白噪声估值器两者. 提出了统一的固定点和固定区间最优白噪声平滑器. 特别对时不变系统提出了统一的稳态白噪声估值器. 它们为解决状态或信号估计和反卷积问题提供了新的途径和工具, 且可应用于石油地震勘探数据处理. 一个 Bernoulli-Gaussian 白噪声的仿真例子说明了它们的有效性.

关键词: 反射地震学; 反卷积; 白噪声估值器; Kalman 滤波方法

中图分类号: O211.64 **文献标识码:** A

Unifying and universal optimal white noise estimators for time-varying systems

DENG Zi-li

(Institute of Applied Mathematics, Department of Automation, Heilongjiang University, Heilongjiang Harbin 150080, China)

Abstract: Unifying and universal optimal white noise estimators are presented for the time-varying systems with the correlated noises, including the measurement white noise estimators and input white noise estimators. Unifying fixed-point and fixed-interval optimal white noise smoothers are presented. And specially, unifying steady-state white noise estimators are also presented for time-invariant systems. They provide a new way to solve the problems of the state or signal estimation and deconvolution, and can be applied to data processing in oil exploration. A simulation example for Bernoulli-Gaussian white noise is given to show the effectiveness of those estimators.

Key words: reflection seismology; deconvolution; white noise estimator; Kalman filtering method

1 引言(Introduction)

随机系统的输入白噪声估计问题也叫白噪声反卷积(deconvolution), 在石油地震勘探、通讯、信号处理等领域有广泛的应用. Mendel^[1,2]以石油地震勘探为应用背景用 Kalman 滤波方法提出了时变系统的最优输入白噪声估值器. Mendel 的方法和结果的缺点和局限性是: 没有解决系统的观测白噪声估计问题, 且没有解决带相关噪声系统白噪声估计问题. 虽然文献[3]给出了带相关噪声时变系统输入白噪声估值器, 但仍没有解决观测白噪声估计问题. 文献[4]和[5]用现代时间序列分析方法提出了统一的白噪声估计理论. 它不仅包括输入白噪声估值器, 而且还包括观测白噪声估值器, 并用它解决状态或信号估计和反卷积问题^[4,5]. 但该理论的缺点是不能处理时变系统, 仅给出定常系统稳态白噪声估值器. 为了克服上述缺点和局限性, 本文基于 Kalman 滤

波提出了带相关噪声时变系统的统一的和通用的最优输入和观测白噪声估值器. 它为了解决状态和信号最优滤波问题提供了新的工具.

考虑带相关噪声的离散时变随机系统

$$x(t+1) = \Phi(t)x(t) + B(t)u(t) + \Gamma(t)w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = H(t)x(t) + v(t). \quad (2)$$

其中, t 为离散时间, 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 观测 $y(t) \in \mathbb{R}^m$, 输入白噪声 $w(t) \in \mathbb{R}^r$, 观测白噪声 $v(t) \in \mathbb{R}^m$, 控制输入 $u(t) \in \mathbb{R}^p$, $\Phi(t)$, $B(t)$, $\Gamma(t)$, $H(t)$ 是已知时变矩阵.

假设 1 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是带零均值白噪声,

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(j) & v^T(j) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q(t) & S(t) \\ S^T(t) & R(t) \end{bmatrix} \delta_{ij}. \quad (3)$$

其中 E 为均值号, T 为转置号, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$

$j), R(t) > 0. S(t)$ 为相关阵.

假设2 $x(0)$ 不相关于 $w(t)$ 和 $v(t)$, 具有均值 μ_0 和方差阵 P_0 .

假设3 $u(t)$ 是已知的确定性控制输入.

最优白噪声估计问题是: 基于观测 $(y(t+N), \dots, y(1))$ 求观测白噪声 $v(t)$ 和输入白噪声 $w(t)$ 的最优(线性最小方差)估值器 $\hat{\theta}(t|t+N)$ 和 $\hat{w}(t|t+N)$, 统一记为 $\hat{\theta}(t|t+N)$, $\theta = v, w$. 对 $N=0$, $N>0$ 或 $N<0$, 分别称它们为最优白噪声滤波器, 平滑器或预报器.

本文基于系统(1),(2)的 Kalman 滤波器^[3]

$$\hat{x}(t+1|t+1) = \hat{x}(t+1|t) + K(t+1)\varepsilon(t+1), \quad (4)$$

$$\hat{x}(t+1|t) = \bar{\Phi}(t)\hat{x}(t|t) + B(t)u(t) + J(t)y(t), \quad (5)$$

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - H(t+1)\hat{x}(t+1|t), \quad (6)$$

$$K(t+1) = P(t+1|t)H^T(t+1)Q_e^{-1}(t+1), \quad (7)$$

$$P(t+1|t) = \bar{\Phi}(t)P(t|t)\bar{\Phi}^T(t) + \Gamma(t)[Q(t) - S(t)R^{-1}(t)S^T(t)]\Gamma^T(t), \quad (8)$$

$$P(t+1|t+1) = [I_n - K(t+1)H(t+1)]P(t+1|t), \quad (9)$$

$$\bar{\Phi}(t) = \Phi(t) - J(t)H(t), \quad (10)$$

$$J(t) = \Gamma(t)S(t)R^{-1}(t), \quad (11)$$

带初值 $\hat{x}(0|0) = \mu_0, P(0|0) = P_0$. 注意新息 $\varepsilon(t)$ 的方差 $Q_e(t)$ 为

$$Q_e(t) = H(t)P(t|t-1)H^T(t) + R(t). \quad (12)$$

2 统一的最优白噪声估值器(Unifying optimal white noise estimators)

定理1 带相关噪声时变系统(1),(2)在假设1~假设3下有固定点最优白噪声估值器

$$\hat{\theta}(t|t+N) = 0 \quad (N < 0), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t|t+N) = \\ \hat{\theta}(t|t+N-1) + M_\theta(t|t+N)\varepsilon(t+N). \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\theta = v, w, N = 0, 1, 2, \dots$, 且定义

$$M_v(t|t) = R(t)Q_e^{-1}(t), \quad (15)$$

$$M_w(t|t) = S(t)Q_e^{-1}(t), \quad (16)$$

$$M_\theta(t|t+1) = D_\theta(t,1)H^T(t+1)Q_e^{-1}(t+1), \quad (17)$$

$$D_v(t,1) = -R(t)K^T(t)\bar{\Phi}^T(t), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} D_w(t,1) = \\ -S(t)K^T(t)\bar{\Phi}^T(t) + Q(t)\Gamma^T(t) - S(t)J^T(t), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} M_\theta(t|t+N) = \\ D_\theta(t,1)\left\{\prod_{i=1}^{N-1}\varphi(t+i)\right\}H^T(t+N)Q_e^{-1}(t+N), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\varphi(t) = [I_n - K(t)H(t)]^T\bar{\Phi}^T(t). \quad (21)$$

估值误差方差阵 $P_\theta(t|t+N)$ 为

$$P_v(t|t+N) = R(t) \quad (N < 0), \quad (22)$$

$$P_w(t|t+N) = Q(t) \quad (N < 0), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} P_\theta(t|t+N) = \\ P_\theta(t|t+N-1) - \\ M_\theta(t|t+N)Q_e(t+N)M_\theta^T(t|t+N). \end{aligned} \quad (24)$$

证 置 $\theta = v$, 由射影理论^[6] $\hat{\theta}(t|t+N)$ 是 $v(t)$ 在由 $(y(t+N), \dots, y(1))$ 张成的线性流形 L 上的射影. 当 $N < 0$ 时, 由假设1~假设3和由式(1)与式(2)迭代易知 $v(t)$ 不相关(正交)于 L , 故 $\hat{\theta}(t|t+N) = 0 (N < 0)$. 由递推射影公式^[6] 有 $\hat{\theta}(t|t) = \hat{\theta}(t|t-1) + E[v(t)\varepsilon^T(t)]Q_e^{-1}(t)\varepsilon(t)$. (25)

由式(2)和式(6)有新息表达式

$$\varepsilon(t) = H(t)\bar{x}(t|t-1) + v(t). \quad (26)$$

其中 $\bar{x}(t|t-1) = x(t) - \hat{x}(t|t-1)$. 易知 $v(t)$ 不相关于 $\bar{x}(t|t-1)$, 于是应用式(26)有

$$E[v(t)\varepsilon^T(t)] = R(t). \quad (27)$$

由式(25)和式(27)知定理对 $N=0$ 成立. 易导出递推式

$$\begin{aligned} \bar{x}(t+1|t) = \\ \bar{\Phi}(t)[I_n - K(t)H(t)]\bar{x}(t|t-1) - \\ \bar{\Phi}(t)K(t)v(t) + \Gamma(t)w(t) - J(t)v(t). \end{aligned} \quad (28)$$

由射影公式有

$$\begin{aligned} \hat{v}(t|t+1) = \\ \hat{v}(t|t) + E[v(t)\varepsilon^T(t+1)]Q_e^{-1}(t+1)\varepsilon(t+1). \end{aligned} \quad (29)$$

注意由式(26)和式(28)引出

$$E[v(t)\varepsilon^T(t+1)] = D_v(t,1)H^T(t+1). \quad (30)$$

其中 $D_v(t,1)$ 由式(18)定义. 将式(30)代入式(29)知定理对 $N=1$ 成立. 由射影公式有(14)式, 其中 $\theta = v$,

$$M_v(t|t+N) = E[v(t)\varepsilon^T(t+N)]Q_e^{-1}(t+N). \quad (31)$$

由式(28)迭代可得关系

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+N | t+N-1) = & \Phi(t+N, t) \hat{x}(t | t-1) + \\ & \sum_{i=t+1}^{t+N} \Phi(t+N, i) [-\bar{\Phi}(i-1)K(i-1)v(i-1) + \\ & \Gamma(i-1)w(i-1) - J(i-1)v(i-1)]. \end{aligned} \quad (32)$$

其中,定义 $\Phi(t+N, t+N) = I_n$, 对 $i < t+N$ 定义

$$\Phi(t+N, i) = \varphi^T(t+N-1) \cdots \varphi^T(i). \quad (33)$$

应用式(26), (32)和式(33)引出定理对 $\theta = v$ 成立.

同理可证定理对 $\theta = w$ 也成立. 证毕.

推论 1 系统(1), (2)在假设 1~假设 3 下有最优白噪声滤波器

$$\hat{v}(t | t) = R(t) Q_e^{-1}(t) \varepsilon(t), \quad (34)$$

$$\hat{w}(t | t) = S(t) Q_e^{-1}(t) \varepsilon(t). \quad (35)$$

推论 2 系统(1), (2)在假设 1~假设 3 下有非递推最优白噪声估值器 $\hat{\theta}(t | t+N)$, $\theta = w, v$,

$$\hat{\theta}(t | t+N) = \sum_{i=0}^N M_{\theta}(t | t+i) \varepsilon(t+i). \quad (36)$$

推论 3 $M_{\theta}(t | t+N)$ 可递推计算为

$$\begin{cases} M_{\theta}(t | t+N) = D_{\theta}(t, N) H^T(t+N) Q_e^{-1}(t+N), \\ D_{\theta}(t, j) = D_{\theta}(t, j-1) \varphi(t+j-1). \end{cases} \quad (37)$$

其中 $j = 2, \dots, N$.

定理 2 带相关噪声时变系统(1), (2)在假设 1~假设 3 下最优固定区间白噪声平滑器

$$\hat{\theta}(t | N) = \hat{\theta}(t | t) + D_{\theta}(t, 1) r(t+1 | N). \quad (38)$$

其中 $\theta = w, v, t = N-1, \dots, 1$, 且有反向递推式

$$\begin{aligned} r(t+1 | N) = & \varphi(t+1) r(t+2 | N) + H^T(t+1) Q_e^{-1}(t+1) \varepsilon(t+1), \end{aligned} \quad (39)$$

带初值 $r(N+1 | N) = 0$, 且 $\varphi(t+1)$ 由式(21)定义.

平滑误差方差阵为

$$P_{\theta}(t | N) = P_{\theta}(t | t) - D_{\theta}(t, 1) S(t+1 | N) D_{\theta}^T(t, 1). \quad (40)$$

其中 $t = N-1, \dots, 1$, 且有反向递推式

$$\begin{aligned} S(t+1 | N) = & \varphi(t+1) S(t+2 | N) \varphi^T(t+1) + \\ & H^T(t+1) Q_e^{-1}(t+1) H(t+1), \end{aligned} \quad (41)$$

带初值 $S(N+1 | N) = 0$.

证 文献[3]已证明了定理中关于 $\hat{w}(t | N)$ 的

结论. 用完全类似的方法可证定理中关于 $\hat{v}(t | N)$ 的结论.

注 文献[3]推导的固定点输入白噪声估值器 $\hat{w}(t | t+N)$ 和固定区间输入白噪声估值器 $\hat{w}(t | N)$ 中有错误. 文献[3]错误地给出 $D_w(t, 1) = Q(t) \Gamma^T(t) - S(t) J^T(t)$, 而正确的 $D_w(t, 1)$ 应为(19).

3 稳态白噪声估值器 (Steady-state white noise estimators)

对于时不变系统(1), (2), 即 $\Phi(t) = \Phi, B(t) = B, \Gamma(t) = \Gamma, H(t) = H, Q(t) = Q, R(t) = R$ 和 $S(t) = S$ 均与时间 t 无关, 假如 (Φ, H) 为完全可检测对, $(\bar{\Phi}, \Gamma \bar{Q})$ 为完全能稳对, 其中 $\bar{\Phi} = \Phi - JH, J = \Gamma S R^{-1}, \bar{Q} \bar{Q}^T = Q - S R^{-1} S^T$, 则存在稳态 Kalman 滤波器^[6], 即当 $t \rightarrow \infty, P(t+1 | t) \rightarrow \Sigma, K(t) \rightarrow K$. 将式(9)代入式(8)有 Σ 满足稳态 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \Sigma = & \bar{\Phi} [\Sigma - \Sigma H^T (H \Sigma H^T + R)^{-1} H \Sigma] \bar{\Phi}^T + \\ & \Gamma (Q - S R^{-1} S^T) \Gamma^T. \end{aligned} \quad (42)$$

由式(7)和式(12)有稳态 Kalman 滤波器增益 K 和稳态新息方差阵 Q_e 分别为

$$K = \Sigma H^T [H \Sigma H^T + R]^{-1}, Q_e = H \Sigma H^T + R, \quad (43)$$

且由式(4)~式(6)令 $t \rightarrow \infty$ 可得稳态 Kalman 预报器为 $\hat{x}(t+1 | t) = \Psi_p \hat{x}(t | t-1) + K_p y(t) + B u(t)$, (44)

$$\varepsilon(t) = y(t) - H \hat{x}(t | t-1). \quad (45)$$

其中定义 $\Psi_p = \bar{\Phi}(I_n - KH), K_p = \bar{\Phi}K + J$, 且 Ψ_p 为稳定矩阵^[6], 新息 $\varepsilon(t)$ 可由式(44)和式(45)任取初值 $\hat{x}(1 | 0)$ 递推计算.

由定理 1 令 $t \rightarrow \infty$ 立刻得如下定理成立.

定理 3 时不变系统(1), (2)在假设 1~假设 3 和完全可检测和完全能稳假设下, 有统一的稳态白噪声估值器

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t | t+N) = & 0 \quad (N < 0), \theta = w, v, \\ \hat{\theta}(t | t+N) = & \hat{\theta}(t | t+N-1) + M_{\theta}(N) \varepsilon(t+N), \end{aligned} \quad (46)$$

其中 $N = 0, 1, 2, \dots$, 增益 $M_{\theta}(N)$ 为

$$M_{\theta}(N) = D_{\theta}(1) [(I_n - KH)^T \bar{\Phi}^T]^{N-1} H^T Q_e^{-1}, \quad (47)$$

$$\begin{cases} D_w(1) = -SK^T \bar{\Phi}^T + Q \Gamma^T - S J^T, \\ D_v(1) = -RK^T \bar{\Phi}^T, \end{cases} \quad (49)$$

$$M_w(0) = S Q_e^{-1}, M_v(0) = R Q_e^{-1}, \quad (50)$$

且有非递推稳态白噪声平滑器为

$$\hat{\theta}(t | t+N) = \sum_{i=0}^N M_{\theta}(i) \varepsilon(t+i). \quad (51)$$

4 仿真例子——时变系统 Bernoulli-Gaussian 白噪声估值器 (Bernoulli-Gaussian white noise estimators for a time-varying system)

Bernoulli-Gaussian 白噪声 $\theta(t)$ 可用于描写石油地震勘探反射系数序列^[1,2],它对寻找油田和确定油田几何形状具有重要作用,它被定义为

$$\theta(t) = b_\theta(t)g_\theta(t). \quad (52)$$

其中 $b_\theta(t)$ 是取值 0 或 1 的 Bernoulli 白噪声,概率为

$$P(b_\theta(t) = 1) = \lambda_\theta, P(b_\theta(t) = 0) = 1 - \lambda_\theta, \quad (53)$$

而 $g_\theta(t)$ 是独立于 $b_\theta(t)$ 的带零均值、方差为 $\sigma_{g_\theta}^2$ 的 Gaussian 白噪声.考虑时变系统

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 + \sin \frac{2\pi t}{300} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2\cos \frac{2\pi t}{300} \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (54)$$

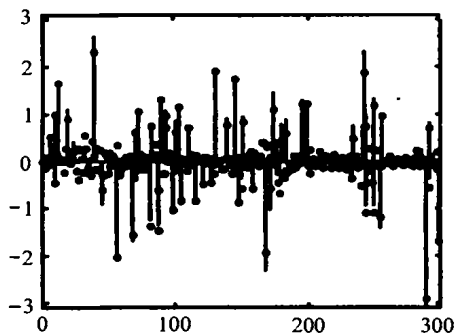


图1 Bernoulli-Gaussian输入白噪声 $w(t)$ 与最优平滑器 $\hat{w}(t|t+3)$

Fig. 1 Bernoulli-Gaussian input white noise $w(t)$ and optimal smoother $\hat{w}(t|t+3)$

5 结论 (Conclusion)

本文基于 Kalman 滤波分别提出了带相关噪声时变系统的观测白噪声和输入白噪声的固定点和固定区间最优白噪声平滑器,特别对时不变系统还提出了统一的稳态观测和输入白噪声估值器,它们构成了统一的和通用的最优白噪声估计理论,克服了文献[1~5]的白噪声估值器的缺点和局限性,指出了文献[3]中的错误,为状态和信号最优滤波提供了新的工具^[5].

参考文献 (References):

- [1] MENDEL J M. White-noise estimators for seismic data processing in oil exploration [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(5): 694 - 706.
- [2] MENDEL J M. *Optimal Seismic Deconvolution: an estimation-based*

$$y(t) = [0 \quad 1 + 0.2\cos \frac{2\pi t}{300}]x(t) + v(t). \quad (55)$$

情形 1 $v(t)$ 是正态 $N(0, \sigma_v^2)$ 白噪声, $w(t)$ 为带时变系数且独立于 $v(t)$ 的 Bernoulli-Gaussian 白噪声

$$w(t) = (1 + 0.1\sin \frac{2\pi t}{60})b_w(t)g_w(t), \quad (56)$$

$$\lambda_w = 0.2, \sigma_{g_w}^2 = 2, \sigma_v^2 = 0.01. \quad (57)$$

情形 2 $w(t)$ 是独立于 $v(t)$ 的正态 $N(0, \sigma_w^2)$ 白噪声,

$$v(t) = (1 + 0.1\cos \frac{2\pi t}{60})b_v(t)g_v(t), \quad (58)$$

$$\lambda_v = 0.2, \sigma_{g_v}^2 = 1.2, \sigma_w^2 = 0.01. \quad (59)$$

对情形 1 和情形 2,取 $N = 3$,用定理 1 所得最优 Bernoulli-Gaussian 白噪声平滑器 $\hat{w}(t|t+3)$ 和 $\hat{v}(t|t+3)$ 的仿真结果如图 1 和图 2 所示,其中实线端点纵标为真实值 $\theta(t)$,园实点纵标为平滑估值 $\hat{\theta}(t|t+3)$, $\theta = w, v$. 可看到它们有较高精度.

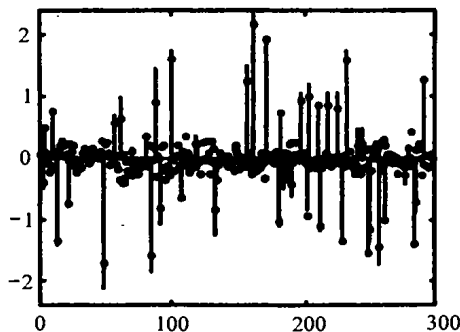


图2 Bernoulli-Gaussian观测白噪声 $v(t)$ 与最优平滑器 $\hat{v}(t|t+3)$

Fig. 2 Bernoulli-Gaussian measurement white noise $v(t)$ and optimal smoother $\hat{v}(t|t+3)$

approach [M]. New York: Academic Press, 1983.

- [3] QIN Chaoying, DAI Guanzhong. The smoothing algorithm of dynamic noise estimation [J]. *Control Theory & Applications*, 1993, 10 (2): 205 - 211 (in Chinese).
- [4] DENG Z L, ZHANG H S, LIU S J, et al. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems [J]. *Automatica*, 1996, 32(2): 199 - 216.
- [5] DENG Zili. *Optimal Filtering Theory and Its Applications, Modern Time Series Analysis Method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2000 (in Chinese)
- [6] ANDERSON B D O, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.

作者简介:

邓自立 (1938—),男,1962年毕业于黑龙江大学数学系,现为黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授.研究方向为最优滤波,反卷积,信号处理,时间序列分析等. Email: dzl@hlju.edu.cn