

比例型 T-S 模糊控制系统稳定性分析与设计

李 柠, 李少远, 席裕庚

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

摘要: 讨论了比例型 T-S 模糊控制系统(TSS)的稳定性与设计问题. 利用具有乘积可换性状态矩阵的 T-S 系统的公共 P 阵构造方法及鲁棒稳定域条件, 给出了 TSS 系统的满足全局 Lyapunov 稳定的正定矩阵 P 的递推求解方法, 并提出一种 TSS 模糊控制系统设计和稳定性分析的规范化方法.

关键词: 比例型 T-S 模糊系统; 稳定性; 不确定性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability analysis and design of T-S fuzzy control system with simplified linear rule consequent

LI Ning, LI Shao-yuan, XI Yu-geng

(Institute of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The stability and design of the T-S fuzzy control system with simplified linear rule consequent (TSS) were investigated. Based on the searching approach to the common matrix P and the maximum uncertainty bound related to general T-S fuzzy system with pairwise commutative state matrix A_i , an iterative algorithm for a common positive definite matrix P for TSS was proposed. The norms for the stability analysis and the controller design for TSS were also presented.

Key words: T-S fuzzy system with simplified linear rule consequent; stability; uncertainty

1 引言(Introduction)

T-S 模糊模型^[1]是一种本质非线性模型, 宜于表达复杂系统的动态特性. 由于该模型的后件是子系统的线性多项式形式, 因此可以采用线性控制理论设计子系统的控制器, Buckley 已证明这种控制器是一种完备的全局控制器^[2]. 而 T-S 模糊系统的稳定性分析大都基于 1992 年的结果^[3], 即对子系统 A_i 寻找满足全局 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$ 的公共正定对称 P 阵, 围绕这一问题开展了一系列研究, 其中比较有效的是 LMI 方法^[4,5], 但这一稳定性条件仅给出了保证系统平衡位置全局稳定的充分条件, 且是事后检验型的, 即在分别设计子控制器时不考虑全局系统的稳定性, 子控制器设计好后再寻找公共 P 阵, 若能找到则说明全局系统稳定, 否则就不能确定系统的稳定性, 需要重新设计子控制器, 而上次得到的结果对修正设计并没有指导作用, 因而整个设计过程缺乏规范.

Narendra 等^[6]针对子系统矩阵具有乘积可换性的前提条件, 对线性时不变多模型系统进行了稳定

性分析, 给出了求公共 P 阵的递推方法. Joh 等人^[7]将这一结果推广到 T-S 模糊系统, 但并未讨论 T-S 模型子系统矩阵满足乘积可换性的条件及系统的设计问题. Ying^[8]提出的比例型 T-S 模型是对原 T-S 模型的一种简化, 同样是对非线性系统的万能逼近. 本文以 TSS 系统为研究对象, 给出了满足全局稳定的正定矩阵 P 的递推方法, 讨论了模糊控制系统稳定性分析和设计的规范化方法.

2 问题描述(Problem description)

2.1 T-S 模糊模型(T-S fuzzy model)

考虑含有 N 条规则的 T-S 模糊控制系统,

R^i : if $x_1(k)$ is L_1^i and $x_2(k)$ is L_2^i
and $\cdots$ and $x_n(k)$ is L_n^i ,

then

$$X^i(k+1) = A_i X(k) + B_i U(k), \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

(1)

其中, L_j^i 为各前提变量的模糊集合, x_j 为第 j 个状态变量, 且

$$X(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T,$$

$$U(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)]^T$$

为系统输入向量. T-S 模糊系统输出 $X(k+1)$ 为

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A_i X(k) + B_i U(k)], \quad (2)$$

其中, $\lambda_i(k) = \frac{\omega_i(k)}{\sum_{j=1}^N \omega_j(k)}$, $\omega_i(k) = \prod_{j=1}^n L_j^i$. 对于自治系统(即 $u(k) \equiv 0$), 式(2)可写为

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) A_i X(k). \quad (3)$$

因此系统(3)的稳定性问题可归结为求取如下形式的 N 个线性系统的公共 P 阵问题,

$$X(k+1) = A_i X(k), i \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (4)$$

引理 1^[3] 如果存在公共正定矩阵 P 使得

$$A_i^T P A_i - P < 0, i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (5)$$

则模糊系统(3)的平衡状态是全局渐近稳定的.

2.2 TSS 模糊系统的状态空间模型 (State-space model of TSS)

比例型 T-S 模糊系统^[8]规则后件部分成比例, 这种形式的 T-S 模糊系统同样能在闭集内以任意精度逼近任何多变量连续函数, 因此是对 T-S 模糊系统的一种简化. 具有 N 条规则的 TSS 模糊系统可表示为

$$\begin{aligned} R^i: & \text{ if } y(k) \text{ is } M_1^i \text{ and } \dots \text{ and } y(k-n+1) \text{ is } M_n^i \text{ and} \\ & u(k) \text{ is } N_1^i \text{ and } \dots \text{ and } u(k-m+1) \text{ is } N_m^i, \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} y^i(k+1) = & k_i [a_1 y(k) + \dots + a_n y(k-n+1) + \\ & b_1 u(k) + \dots + b_m u(k-m+1)] = \\ & k_i \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} y(k-i) + \sum_{j=0}^{m-1} b_{j+1} u(k-j) \right], \quad (6) \end{aligned}$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N$, M_j^i, N_j^i 分别为各模型输入的模糊集合, $y(k-j), u(k-j)$ 分别为 $n-j$ 时刻的模型输入和输出, a_j, b_j 为线性多项式的系数, 在 TSS 系统中, 规则结论部分的不同仅体现在后件的比例系数 k_i 上.

若令

$$\begin{aligned} X(k+1) = & [y(k) \quad y(k-1) \quad \dots \quad y(k-n+1)]^T = \\ & [x_1(k) \quad x_2(k) \quad \dots \quad x_n(k)]^T, \end{aligned}$$

则规则(6)结论部分为

$$X^i(k+1) = k_i [a_1 x_1(k) + a_2 x_2(k) + \dots + a_n x_n(k) + b_1 u(k) + \dots + b_m u(k-m+1)]. \quad (7)$$

为简便起见, 假设 b_j 满足 $b_j = 0, \forall j > 1$, 则式(7)可写为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^i(k+1) \\ x_2^i(k+1) \\ \vdots \\ x_n^i(k+1) \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} k_i a_1 & k_i a_2 & \dots & k_i a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} k_i b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad (8) \end{aligned}$$

则规则(6)的结论部分可归结为

$$X(k+1) = A_i X(k) + B_i u(k), \quad (9)$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} k_i a_1 & k_i a_2 & \dots & k_i a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} k_i b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

则 TSS 系统输出 $X(k+1)$ 为

$$X(k+1) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) [A_i X(k) + B_i u(k)], \quad (10)$$

其中

$$\lambda_i(k) = \frac{\omega_i(k)}{\sum_{j=1}^N \omega_j(k)}, \omega_i(k) = \left(\prod_{j=1}^n M_j^i \right) \cdot N_1^i.$$

3 TSS 模糊系统的稳定性分析 (Stability analysis of TSS)

定义 1^[9] 称一个方阵 A 是 Schur 稳定的, 如果 A 的谱半径满足 $\rho(A) < 1$.

引理 2^[7] 考虑如系统(3)所示, 假设 $A_i (i = 1, 2, \dots, N)$ Schur 稳定, 且满足

$$A_j A_{j+1} = A_{j+1} A_j, j = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

构造下列 N 个 Lyapunov 方程:

$$\begin{cases} A_1^T P_1 A_1 - P_1 = -Q, \\ A_2^T P_2 A_2 - P_2 = -P_1, \\ \vdots \\ A_N^T P_N A_N - P_N = -P_{N-1}. \end{cases} \quad (12)$$

其中, $Q > 0$ 且 $P_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为正定对称阵, 则 P_N 满足下式:

$$A_i^T P_N A_i - P_N < 0, i = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

定义 2^[7] 由 N 条规则组成的不确定系统

$x(k+1) = (A_i + \Delta A_i(k))x(k), i = 1, 2, \dots, N$ 是二次稳定的, 如果存在一个公共正定对称矩阵 P 及常数 $\alpha > 0$ 满足

$$x^T(k)[(A_i + \Delta A_i)^T P (A_i + \Delta A_i) - P]x(k) \leq -\alpha \|x(k)\|^2, \forall x(k) \in \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

考虑含动态不确定项的由 N 条规则组成的 T-S 模糊模型, 以第 i 条规则为例,

$$X(k+1) = [A_i + \Delta A_i(k)]X(k), \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (15)$$

有以下引理:

引理 3^[7] 如果满足

$$\max_{\Delta A_i \in \Omega_i} \lambda_{\max}[(A_i + \Delta A_i)^T P_N (A_i + \Delta A_i) - P_N] < 0, \quad (16)$$

其中, 正定对称阵 P_N 如式(12)定义, $\Delta A_i \in \Omega_i, \Omega_i$ 为给定凸集, $\lambda_{\max}[\cdot]$ 为所含对称阵 $[\cdot]$ 特征值的最大值, 且最大特征值总在 Ω_i 的凸点处出现, 则模糊模型(15)是二次稳定的.

结论 1^[7] 考虑系统(15)描述的 T-S 模糊模型, 其中 A_i 满足引理 2 的条件, $\Delta A_i(k) \in \Omega_{\delta_i}, \Omega_{\delta_i} = \{\delta_i E_{\text{fixed}_i} \mid E_{\text{fixed}_i} \in \Omega_{\text{fixed}_i}\}, \Omega_{\text{fixed}_i}$ 为事先给定的形状固定大小可变的超级凸多面体, E_{fixed_i} 为凸集 Ω_{fixed_i} 的凸点, 并定义保证系统(15)二次稳定的 $\Delta A_i(k)$ 的最大可行界为

$$\Delta_i = \{(\delta_i)_{\max} E_{\text{fixed}_i} \mid E_{\text{fixed}_i} \in \Omega_{\text{fixed}_i}\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{(\delta_i)_{\max}} = \max_{E_{\text{fixed}_i} \in \Omega_{\text{fixed}_i}} \frac{1}{\delta_i^*(E_{\text{fixed}_i})}, i \in \{1, 2, \dots, N\}, \quad (18a)$$

$$\frac{1}{\delta_i^*(E_{\text{fixed}_i})} = \lambda_{\max}^i \triangleq \max_j \{\beta_j^i\}, \quad (18b)$$

其中, β_j^i 可通过下述广义特征值问题得以解决, $j = 1, \dots, l, l$ 表示特征值的个数,

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_{\text{fixed}_i} \\ -E_{\text{fixed}_i}^T & 0 \end{bmatrix} \xi_j^i = \beta_j^i \begin{bmatrix} P_N^{-1} & A_i \\ A_i^T & P_N \end{bmatrix} \xi_j^i. \quad (19)$$

考虑如式(10)所示的 TSS 自治系统,

$$X(k+1) = A_i X(k) = \begin{bmatrix} k_i a_1 & k_i a_2 & \cdots & k_i a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} X(k), \quad (20)$$

将原系统写作

$$X(k+1) = (\tilde{A}_i + \Delta A_i)X(k), \quad (21)$$

其中

$$\tilde{A}_i = \begin{bmatrix} k_i a_1 & k_i a_2 & \cdots & k_i a_n \\ k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_i & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 - k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 - k_i & 0 \end{bmatrix},$$

与结论 1 中定义的动态不确定项不同, ΔA_i 可视做定常“不确定项”. 根据上述描述, 可得到如下结论:

定理 1 针对系统(21), 如引理 2 设计 $\tilde{A}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的公共正定阵 P_N , 按照结论 1 求解广义特征根问题(18), 若 k_i 使得 $\Delta A_i \in \Omega_i (\Omega_i$ 见式(17)), 则 T-S 模糊标称系统(20)是二次稳定的.

例 1 考虑一含有三条规则的 TSS 模糊系统,

R^i : if $y(k-1)$ is M_i then

$$y^i(k+1) = k_i \left[\sum_{j=1}^2 a_j y(k-l+1) + b_1 u(k) \right], \quad i = 1, 2, 3,$$

其中

$$a_1 = 0.25, a_2 = 0.1, b_1 = 0.2, \\ k_1 = 1, k_2 = 1.25, k_3 = 1.5.$$

将上述系统写为式(9)的形式, 则有

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.1000 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.1250 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} 0.3750 & 0.1500 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

隶属函数见图 1.

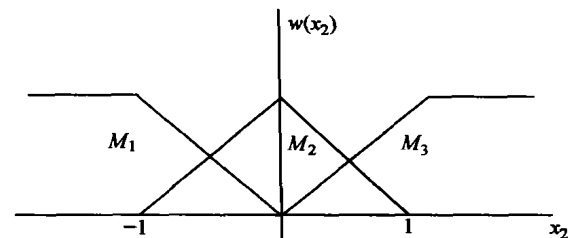


图 1 例 1 隶属度曲线

Fig. 1 Membership functions in Example 1

给定系统的不确定凸集

$$\Omega_{\text{fixed}_i} = \left[\begin{array}{cc} \{\vartheta_1 \mid |\vartheta_1| \leq 0.5\} & \{\vartheta_2 \mid |\vartheta_2| \leq 2\} \\ \{\vartheta_2 \mid |\vartheta_2| \leq 2\} & \{\vartheta_1 \mid |\vartheta_1| \leq 0.5\} \end{array} \right],$$

则其凸点为

$$E_{\text{fixed}_i}^1 = \begin{bmatrix} -0.5 & -2 \\ -2 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$E_{\text{fixed}_i}^2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 2 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$E_{\text{fixed}_i}^3 = \begin{bmatrix} 0.5 & -2 \\ -2 & 0.5 \end{bmatrix}, E_{\text{fixed}_i}^4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix},$$

按式(21)将 A_i 写为 $A_i = \tilde{A}_i + \Delta A_i$ 的形式,其中

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据引理2可以求出公共正定阵

$$P_3 = \begin{bmatrix} 6.6157 & 0.7010 \\ 0.7010 & 1.2183 \end{bmatrix}.$$

按照结论1求取对应各 A_i 的最大特征值,结果见表1.

表1 对应各规则 A_i 的最大特征值 $\lambda_{\max}$

Table 1 $\lambda_{\max}$ for each rule of A_i

A_1	$\lambda_{\max}$	A_2	$\lambda_{\max}$	A_3	$\lambda_{\max}$
$E_{\text{fixed}_1}^1$	4.225	$E_{\text{fixed}_2}^1$	4.188	$E_{\text{fixed}_3}^1$	4.214
$E_{\text{fixed}_1}^2$	5.942	$E_{\text{fixed}_2}^2$	6.484	$E_{\text{fixed}_3}^2$	7.359
$E_{\text{fixed}_1}^3$	4.437	$E_{\text{fixed}_2}^3$	4.457	$E_{\text{fixed}_3}^3$	4.568
$E_{\text{fixed}_1}^4$	6.592	$E_{\text{fixed}_2}^4$	7.583	$E_{\text{fixed}_3}^4$	9.308

表1列出了对应各系统矩阵 $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ 特征值的最大值分别为 6.5916, 7.5832, 9.3084, 按照式(18b), 各规则最大不确定界系数为特征值最大值的倒数, 即 0.1517, 0.1318, 0.1074, 则各规则不确定集合为

$$\Lambda_1 =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \{\Delta a_1 \mid |\Delta a_1| \leq 0.0759\} & \{\Delta a_2 \mid |\Delta a_2| \leq 0.3034\} \\ \{\Delta a_3 \mid |\Delta a_3| \leq 0.3034\} & \{\Delta a_4 \mid |\Delta a_4| \leq 0.0759\} \end{array} \right],$$

$$\Lambda_2 =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \{\Delta a_1^2 \mid |\Delta a_1^2| \leq 0.0659\} & \{\Delta a_2^2 \mid |\Delta a_2^2| \leq 0.2636\} \\ \{\Delta a_3^2 \mid |\Delta a_3^2| \leq 0.2636\} & \{\Delta a_4^2 \mid |\Delta a_4^2| \leq 0.0659\} \end{array} \right],$$

$$\Lambda_3 =$$

$$\left[\begin{array}{cc} \{\Delta a_1^3 \mid |\Delta a_1^3| \leq 0.0537\} & \{\Delta a_2^3 \mid |\Delta a_2^3| \leq 0.2148\} \\ \{\Delta a_3^3 \mid |\Delta a_3^3| \leq 0.2148\} & \{\Delta a_4^3 \mid |\Delta a_4^3| \leq 0.0537\} \end{array} \right],$$

显然

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix} \in \Lambda_1, \Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \Lambda_2,$$

$$\Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix} \in \Lambda_3.$$

因此根据定理1, 由本例给出的 A_i 组成的 T-S 系统是二次稳定的.

4 TSS 模糊控制系统的稳定性分析 (Stability analysis of TSS control systems)

4.1 非模糊型状态反馈控制器 (Non-fuzzy state feedback controller)

设控制器取非模糊型状态反馈控制器, 即

$$u(k) = KX(k) = [K_1 \ K_2 \ \cdots \ K_n]X(k),$$

则式(10)写为

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) (A_i X(k) + B_i K X(k)) = \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) (A_i + B_i K) X(k) \triangleq \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) \underline{A}_i X(k) \triangleq \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) (\tilde{A}_i + \Delta \underline{A}_i) X(k), \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $\tilde{A}_i$ 和 $\Delta \underline{A}_i$ 形如式(21)中 $\tilde{A}_i$ 和 ΔA_i , 同样可将 $\Delta \underline{A}_i$ 看作自治系统(22)中的“不确定项”.

定理2 针对系统(22), 如引理2设计 $\tilde{A}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的公共正定阵 P_N , 如果

$$\max_{\Delta \underline{A}_i \in \Omega_i} \lambda_{\max} [(\tilde{A}_i + \Delta \underline{A}_i)^T P_N (\tilde{A}_i + \Delta \underline{A}_i) - P_N] < 0, \quad (23)$$

则 T-S 模糊控制系统(22)是二次稳定的.

证 由式(22)有

$$\begin{aligned} \underline{A}_i &= A_i + B_i K = \\ &= \begin{bmatrix} k_i(a_1 + b_1 K_1) & k_i(a_2 + b_1 K_2) & \cdots & k_i(a_n + b_1 K_n) \\ k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_i & 0 \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 - k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 - k_i & 0 \end{bmatrix} \triangleq \tilde{A}_i + \Delta \underline{A}_i. \end{aligned}$$

容易验证 $\tilde{A}_i \tilde{A}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1} \tilde{A}_i$, 则可以利用引理2设计 $\tilde{A}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的公共正定阵 P_N , 当满足式(23)时, 可由引理3直接推得 T-S 模糊控制系统(22)是二次稳定的. 证毕.

推论 1 针对系统(22),如引理 2 设计 $\tilde{A}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的公共正定阵 P_N ,按照结论 1 求解广义特征根问题(18),若 $\Delta \hat{A}_i \in \Delta_i (\Delta_i$ 见式(17)),则 T-S 模糊控制系统(22)是二次稳定的.

4.2 模糊型状态反馈控制器(Fuzzy state feedback controller)

设控制器取模糊型状态反馈控制器,即

$$u_j(k) = K_j X(k) = [K_{j1} \ K_{j2} \ \cdots \ K_{jn}] X(k), \\ j = 1, 2, \dots, N,$$

$$u(k) = \sum_{j=1}^N \lambda_j u_j(k) = \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j K_j \right] X(k),$$

则式(10)可写为

$$\begin{aligned} X(k+1) &= \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) (A_i X(k) + B_i \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j K_j \right] X(k)) = \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) (A_i + B_i \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j K_j \right]) X(k) \triangleq \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) \hat{A}_i(k) X(k) \triangleq \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda_i(k) (\tilde{A}_i + \Delta \hat{A}_i(k)) X(k), \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\tilde{A}_i$ 和 $\Delta \hat{A}_i$ 形如式(21)中 $\tilde{A}_i$ 和 ΔA_i ,同样可将 $\Delta \hat{A}_i$ 看作自治系统(24)中的“不确定项”.

定理 3 针对系统(24),如引理 2 设计 $\tilde{A}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的公共正定阵 P_N ,按照结论 1 求解广义特征根问题(19),若 $\Delta \hat{A}_i \in \Delta_i (\Delta_i$ 见式(17)),则 T-S 控制系统(24)是二次稳定的.

证 由式(24)有,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= A_i + B_i \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j K_j \right]^T = \\ &= \begin{bmatrix} k_i a_1 & k_i a_2 & \cdots & k_i a_n \\ k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & k_i & 0 \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} k_i b_1 \sum_{j=1}^N \lambda_j K_{j1} & k_i b_1 \sum_{j=1}^N \lambda_j K_{j2} & \cdots & k_i b_1 \sum_{j=1}^N \lambda_j K_{jn} \\ 1 - k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 - k_i & 0 \end{bmatrix} \triangleq \\ &= \tilde{A}_i + \Delta \hat{A}_i(k). \end{aligned} \quad (25)$$

容易验证 $\tilde{A}_i \tilde{A}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1} \tilde{A}_i$. 实际上,每一时刻

$\sum_{j=1}^N \lambda_j K_{jl} (l = 1, \dots, n)$ 均为确定值,并以此组成 $\Delta \hat{A}_i(k)$. 定义 $\Delta \hat{A}_i$ 为

$$\Delta \hat{A}_i = \begin{bmatrix} \theta_1^i & \theta_2^i & \cdots & \theta_n^i \\ 1 - k_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 - k_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中,

$$\theta_l^i = \max_{\lambda_j} (k_i b_l \sum_{j=1}^N \lambda_j K_{jl}), \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

如果 $\Delta \hat{A}_i \in \Delta_i$,定理 3 得证.

定理 3 的稳定性结论有些保守,因为事实上并不是所有的 θ_l^i 均在同一时刻达到最大值.

4.3 具有稳定性保证的模糊控制系统规范设计 (Systematic design for fuzzy control system with stability guarantee)

T-S 模糊控制系统的稳定性分析一般是针对各子系统 A_i 寻找公共正定对称 P 阵,所得结论也是保证全局系统稳定的充分条件,这对控制系统设计缺乏足够的指导作用.具体地说,在设计 T-S 模糊控制系统时往往并不首先考虑全局系统的稳定性,而是采用 PDC 方法对每个子系统单独设计控制器,然后检验能否找到公共的 P 阵,如能找到则说明全局系统稳定,否则需要重新设计子控制器,而上次得到的结果对当前系统的修正设计也并没有参考价值,设计者能做的仅是定性的重复“设计—检验”,使得整个设计过程变得十分繁琐.

针对 TSS 模糊系统,本节将在满足引理 2 的前提条件下给出稳定性条件和系统设计的规范化方法.考虑 TSS 模糊系统(24),显然 $\tilde{A}_i \tilde{A}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1} \tilde{A}_i$,则根据引理 2 可以得出 $\tilde{A}_i$ 的公共正定对称阵 P_N ,利用 P_N 设计各子系统状态反馈控制量

$$u_i = K_i X = -R^{-1} B_i^T P_N X, \quad (27)$$

其中, R 为用户选取的控制器加权正定对称阵.将 $K_j = [K_{j1} \ K_{j2} \ \cdots \ K_{jn}]$ 代入式(25),如果满足 $\Delta \hat{A}_i \in \Delta_i$,则控制器设计结束,且所得状态反馈矩阵能够保证 TSS 控制系统的稳定性;否则可以适当调整加权矩阵 R ,并利用式(27)求取新的状态反馈矩阵,直到满足定理 3.通常情况下改变 R ,定理 3 即可得到满足,如果仍不能满足,则按照递推方法重

新求取公共阵 P_N .

定理 4 利用本节提供的规范性算法得出的模糊型状态反馈矩阵 K_j 能够保证 TSS 控制系统 (24) 全局二次稳定.

例 2 考虑例 1 所示的 TSS 系统, 其输入矩阵 B_i 分别为

$$B_1 = [0.2 \ 0]^T, \quad B_2 = 1.25B_1 = [0.25 \ 0]^T,$$

$$B_3 = 1.5B_1 = [0.3 \ 0]^T.$$

将系统写为式 (24) 的形式, 利用规范性算法设计状态反馈矩阵 K_j , 其中

$$P_3 = \begin{bmatrix} 6.5157 & 0.7010 \\ 0.7010 & 1.2183 \end{bmatrix}, \quad R = 1.$$

调整加权矩阵 R , 当 $R = 0.09$ 时获得满意的控制结果, 其中

$$K_1 = [-0.1173 \quad -0.0126],$$

$$K_2 = [-0.1466 \quad -0.0158],$$

$$K_3 = [-0.1759 \quad -0.0189].$$

由式 (26) 可得

$$\Delta \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.0352 & -0.0038 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.0440 & -0.0048 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta \hat{A}_3 = \begin{bmatrix} -0.0528 & -0.0057 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

显然, $\Delta \hat{A}_i \in \Delta_i$, 其中 Δ_i 's 与例 1 中的结果相同.

因此根据本节提供的规范性算法设计的状态反馈矩阵 K_j 's 能够保证全局系统的稳定性.

5 结论 (Conclusions)

本文讨论了 Ying 提出的 TSS 标称及控制系统的稳定性及设计问题. 针对 TSS 系统的特殊形式, 将系统矩阵 A_i 分解为成比例部分 $\tilde{A}_i$ 和剩余部分 $\Delta \hat{A}_i$ (“不确定项”), 利用具有乘积可换性系统矩阵的公共 P 阵构造方法及鲁棒稳定域条件, 得出了 TSS 标称及控制系统的稳定性结论, 并给出了一种

模糊控制系统设计和稳定性分析的规范化方法. 在各规则系统矩阵满足乘积可换性的条件下, 文中结论对于一般 T-S 模糊系统同样具有指导意义. 通过具体算例文中结论得到了进一步验证.

参考文献 (References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 - 132.
- [2] BUCKLEY J J. Sugeno type controllers are universal controllers [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, 53(3): 299 - 303.
- [3] TAKAGI T, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 - 156.
- [4] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H_∞ control theory, and linear matrix inequalities [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1996, 4(1): 1 - 13.
- [5] PARK J, KIM J S, PARK D. LMI-based design of stabilizing fuzzy controllers for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy model [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 122(1): 73 - 82.
- [6] NARENDRA K S, BALAKRISHNAN J. A common Lyapunov functions for stable LTI systems with commuting A -matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2469 - 2471.
- [7] JOH J, CHEN Y H, LANGARI R. On the stability issues of linear Takagi-Sugeno fuzzy models [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1998, 6(3): 402 - 410.
- [8] HAO Y. General Takagi-Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters [J]. *J Information Sciences*, 1998, 108(1-4): 91 - 107.
- [9] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.
(LIAO Xiaoxin. *Theory and Application of Stability for Dynamical Systems* [M]. Beijing: National Defence Press, 2000.)

作者简介:

李 柠 (1974 —), 女, 2002 年于上海交通大学获得博士学位, 现在华东理工大学工业自动化国家工程研究中心工作, 主要研究方向为模糊系统, 复杂工业过程控制等;

李少远 (1965 —), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为自适应预测控制、智能与优化控制等;

席裕庚 (1947 —), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为复杂工业过程控制, 智能机器人系统等.