

线性时不变控制系统中的熵率和 H_∞ 熵

章 辉, 孙优贤

(浙江大学 控制科学与工程系 工业控制国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘要: 利用 Bode 积分定理将线性时不变控制系统中的熵率和系统零极点分析结合起来, 从信息论的角度来阐述反馈控制系统的性能设计局限, 讨论了“变异度守恒定律”. 同时, 研究了系统变量互信息率和 H_∞ 熵的关系, 阐述了最小熵 H_∞ 控制的信息论意义.

关键词: 熵率; 互信息率; H_∞ 熵; Bode 积分; 线性时不变系统; 随机过程; 变异度

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Entropy rate and H_∞ entropy in LTI control systems

ZHANG Hui, SUN You-xian

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Department of Control Science & Engineering,
Zhejiang University, Zhejiang Hangzhou 310027, China)

Abstract: The concept of entropy rate in linear time invariant (LTI) control systems that were disturbed by stationary noise was adopted to formulate system performance limits, and to discuss the ‘conservation law of variety’ by connecting it with classic poles and zeros analysis using Bode’s integral formula. The relation between mutual information rate and system H_∞ entropy was also discussed within the framework of information theory.

Key words: entropy rate; mutual information rate; H_∞ entropy; Bode’s integral; LTI system; stationary stochastic process; variety

1 引言 (Introduction)

反馈控制系统的一个主要任务是消除外来干扰等因素所造成的不确定性以使系统保持稳定, 并达到设定的性能指标. 传统控制理论中的一个重要成果——Bode 积分定理反映了控制系统的性能设计局限. 这一成果首先由 Bode 提出^[1], 并在近期获得了进一步发展^[2~4].

信息理论中采用 Shannon 熵 (或熵率) 来描述随机变量的不确定性 (或信息量). 最早利用信息理论分析控制系统的是控制论的先驱之一——Ashby, 他提出了用信息熵描述的系统“变异度” (variety) 的概念^[5]; Engell^[6] 则定义“伪熵率” (pseudo entropy rate) 研究反馈控制系统中的“变异度守恒定律” (the conservation law of variety).

本文的第二部分采用信息理论中的熵率研究受随机干扰的单变量线性时不变反馈控制系统中的不确定性 (或“变异度”), 利用 Bode 积分定理将控制系统中的信息传输和系统开环不稳定极点结合起来, 从信息论的角度来阐述反馈控制系统的性能设计局

限, 进一步讨论“变异度守恒定律”.

近年来利用熵函数分析、设计控制系统的一个引人注目的成果是最小熵 H_∞ 控制理论^[7~9], 它采用 H_∞ 熵作为鲁棒控制系统设计的优化目标函数. 本文的第三部分应用互信息率讨论反馈控制系统设计问题, 在信息理论的框架下研究系统互信息率和 H_∞ 熵的关系, 对最小熵 H_∞ 控制方法作出信息论解释.

2 受随机干扰的线性时不变控制系统中的熵率 (Entropy rate in LTI system with stationary disturbance)

Shannon 熵函数在控制系统的分析中有其独到的优势^[10]. 但它考虑的是变量的集合而不是时间的函数, 不反映“过程”特征, 无法结合许多在传统控制理论中成熟应用的工具, 如传递函数、零极点分析等^[11]. 在以下的分析中可以看出, Shannon 信息论中的熵率是弥补上述不足的合适的信息测度.

设离散随机过程 X 的一组观测值为 $X_1^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其熵率为^[12]:

$$\bar{H}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

其中 $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 X_n^1 的联合熵. 平稳随机过程的熵率是其每单位时间平均不确定性的度量, 也被用作系统过程变量“变异度”的度量^[6].

引理 1^[13] 设传递函数为 $G(z)$ 的稳定线性时不变系统的输入 X 是一离散平稳过程, 则其输出 Y 的熵率为

$$\bar{H}(Y) = \bar{H}(X) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |G(e^{i\omega})| d\omega. \quad (2)$$

考虑图 1 所示的受随机干扰的单变量线性时不变反馈控制系统. 其中: $r, d, y \in \mathbb{R}^1$ 分别为系统的输入、外来干扰和输出. d 是一离散平稳随机变量; r 为确定性输入, 设 $r \equiv 0$. $C(z), P(z)$ 分别为控制器和被控过程的传递函数. 假定系统开环传递函数 $L(z) = P(z)C(z)$ 没有单位圆上的零极点:

$$L(z) = \frac{l_0 \prod_{i=1}^p (z - z_i^L)}{\prod_{j=1}^q (z - p_j^L)}, \quad (3)$$

其中 l_0 为 $L(z)$ 分子的主导系数, z_i^L 和 p_j^L 分别为 $L(z)$ 的零、极点.

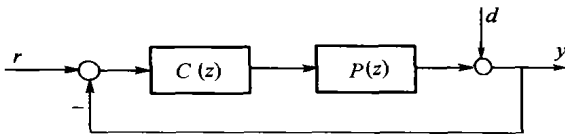


图 1 线性时不变系统

Fig. 1 LTI system

从干扰 d 到输出 y 的传递函数为

$$\frac{1}{1 + P(z)C(z)} = S(z),$$

即系统的敏感函数. 则

$$\begin{aligned} \bar{H}(y) &= \\ \bar{H}(d) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |S(e^{i\omega})| d\omega &= \\ \bar{H}(d) + 2\pi \sum_{i=1}^m \log |p_i^u| - 2\pi \log |\xi + 1|, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\bar{H}(y)$ 和 $\bar{H}(d)$ 分别为 y 和 d 的熵率; p_i^u 为开环传递函数 $L(z)$ 的单位圆外极点; $\xi = \lim_{z \rightarrow \infty} L(z)$, 当 $L(z)$ 严格正则时 (即式 (3) 中 $p < q$), $\xi = 0$. 式中第一个等号由引理 1 得出, 第二个等号则根据离散系统广义 Bode 定理^[2,3]得出.

因而可得出如下结论:

定理 1 假定图 1 所示的线性时不变反馈控制

系统是闭环稳定的, 其干扰 d 是离散平稳过程. 若系统开环传递函数是严格正则的 (即式 (3) 中 $p < q$), 那么系统输出 y 的熵率总是大于或等于干扰 d 的熵率, 即 $\bar{H}(y) \geq \bar{H}(d)$, 且

$$\bar{H}(y) = \bar{H}(d) + \sum_{i=1}^m \log |p_i^u|. \quad (5)$$

若系统开环传递函数是双正则的 (即式 (3) 中 $p = q$), 且

$$\sum_{i=1}^m \log |p_i^u| < \log |\xi + 1|, \quad (6)$$

则 $\bar{H}(y) < \bar{H}(d)$.

定理 1 从信息论的角度反映了单变量线性时不变控制系统的性能局限: 若系统开环传递函数是严格正则的, 输出的平均不确定性 (变异度) 总是大于或等于干扰的平均不确定性 (变异度); 若开环传递函数是双正则的, 那么前者有可能小于后者. 这一结论与 Engell^[6] 得出的“变异度守恒定律”稍有不同. 定理 1 表明在线性反馈控制系统中“变异度守恒”是有条件的: 只有当 $L(z)$ 为严格正则且稳定时, $\bar{H}(y) = \bar{H}(d)$.

3 H_∞ 熵的信息论意义 (Information theoretic meaning of H_∞ entropy)

近年来最小熵 H_∞ 控制理论获得了丰硕的成果^[8-10]. 然而就作者所知, 对其优化目标函数—— H_∞ 熵在控制系统中的物理意义却研究较少. 这里本文利用互信息率来探讨熵的意义.

两个离散随机过程 X 和 Y 间的互信息率^[12]

$$\begin{aligned} \bar{I}(X; Y) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n)) \end{aligned} \quad (7)$$

描述了 X 和 Y 每单位时间的平均互信息, 同时也反映了其间的信息传输情况. 其中 $I((x_1, x_2, \dots, x_n); (y_1, y_2, \dots, y_n))$ 为 X_n^1 和 Y_n^1 的互信息, $X_n^1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 和 $Y_n^1 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 为 X 和 Y 的观测值.

引理 2^[14] 设联合高斯平稳过程 $X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^m$ 有谱密度

$$\begin{bmatrix} I & W(e^{i\omega}) \\ W^T(e^{-i\omega}) & I \end{bmatrix},$$

那么 X 和 Y 的互信息率为

$$\begin{aligned} \bar{I}(X; Y) &= \\ \frac{-1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \det [I - W^T(e^{-i\omega}) W(e^{i\omega})] d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

考虑图 1 所示系统. 这里, 设输入 r 和干扰 d 是相互独立的零均值高斯平稳过程, 系统是闭环稳定

的,输出 y 和 r, d 的谱密度分别为 $\phi_y(\omega), \phi_r(\omega), \phi_d(\omega)$.

设 $T(z) = L(z)/[1 + L(z)]$, 则

$$\phi_y(\omega) = \phi_r(\omega) |T(e^{i\omega})|^2 + \phi_d(\omega) |S(e^{i\omega})|^2,$$

可知

$$\phi_y(\omega) > \phi_d(\omega) |S(e^{i\omega})|^2. \quad (9)$$

有如下定理.

定理 2 设图 1 所示系统是闭环稳定的,输入 r 和干扰 d 是相互独立的零均值高斯平稳过程.那么输出 y 和干扰 d 的互信息率为

$$\begin{aligned} \bar{I}(y; d) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log [1 - \phi_d(\omega) \phi_y^{-1}(\omega) S(e^{-i\omega}) S(e^{i\omega})] d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

证 由于 d 和 y 皆为高斯平稳序列,根据谱分解定理^[15],存在有理函数 F_d 和 F_y , 它们的零极点都在单位圆以内,使得

$$\phi_d(\omega) = F_d(e^{-i\omega}) F_d(e^{i\omega}),$$

$$\phi_y(\omega) = F_y(e^{-i\omega}) F_y(e^{i\omega}).$$

用 F_d 和 F_y 分别对 d 和 y 进行非奇异变换,得 d' 和 y' , 即

$$D'(z) = D(z) F_d^{-1}(z),$$

$$Y'(z) = Y(z) F_y^{-1}(z)$$

其中 $Y(z), D(z)$ 分别为 y 和 d 的 z -变换,其它亦然.设 $M(z) = F_d(z) S(z) F_y^{-1}(z)$, 由式 (9) 可知 $M(z^{-1}) M(z) < 1$. 则 d' 和 y' 具有高斯联合谱密度

$$\begin{bmatrix} 1 & M(e^{i\omega}) \\ M(e^{-i\omega}) & 1 \end{bmatrix}.$$

根据引理 2, y' 和 d' 的互信息率为

$$\begin{aligned} \bar{I}(y'; d') &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log [1 - M(e^{-i\omega}) M(e^{i\omega})] d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log [1 - \phi_d(\omega) \phi_y^{-1}(\omega) S(e^{-i\omega}) S(e^{i\omega})] d\omega. \end{aligned}$$

由信息论可知^[16],平稳高斯过程的互信息在非奇异线性有限维系统的变换下是保持不变的.因而 $\bar{I}(y; d) = \bar{I}(y'; d')$, 即得出式 (10). 证毕.

设 $\left\| \frac{F_y(z)}{F_d(z)} \right\|_\infty = \gamma$, 由式 (9) 可知

$$|S(z)|^2 < \left| \frac{F_y(z)}{F_d(z)} \right|^2 \leq \gamma^2,$$

所以

$$\|S(z)\|_\infty < \gamma. \quad (11)$$

以 γ^{-2} 替换式 (10) 中的 $\phi_d(\omega) \phi_y^{-1}(\omega)$, 记

$$H(\gamma, S) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log [1 - \gamma^{-2} S(e^{-i\omega}) S(e^{i\omega})] d\omega. \quad (12)$$

注意到 $\gamma^2 H(\gamma, S)$ 就是闭环传递函数 $S(z)$ 满足式 (11) 时的 H_∞ 熵^[7,8].

由于 $\phi_d^{-1}(\omega) \phi_y(z) \leq \gamma^2$, 则

$$\begin{aligned} \log [1 - \phi_d(\omega) \phi_y^{-1}(\omega) S(e^{-i\omega}) S(e^{i\omega})] &\leq \\ \log [1 - \gamma^{-2} S(e^{-i\omega}) S(e^{i\omega})]. \end{aligned}$$

因而据互信息率和 H_∞ 熵的特性^[7,8]有:

推论 1 设图 1 所示系统是闭环稳定的,输入 r 和干扰 d 是相互独立的零均值高斯平稳过程.那么

$$\bar{I}(y; d) \geq H(\gamma, S) \geq 0. \quad (13)$$

最小熵 H_∞ 控制问题是寻求一个允许控制器,在系统内稳定和闭环传递函数的 ∞ -范数有界的前提下使系统的 H_∞ 熵达到最小^[7,8].从信息论的观点来看,在保证系统闭环稳定的前提下,应尽量减少干扰对输出的“污染”程度,输出中所包含的关于干扰的信息量显然越少越好.由式 (13) 可知, $\bar{I}(y; d)$ 越小,则 $H(\gamma, S)$ 越小, H_∞ 熵是比互信息率“更紧”的一个目标函数.

Stoorvogel^[14]在系统辨识问题中讨论了辨识误差与一个构造性参考变量间的互信息率与 H_∞ 熵的关系,然而只是针对 $\gamma = 1$ 的情况;Boyd^[9]指出单变量系统的 H_∞ 熵是在随机反馈作用下系统 2-范数的均方(即系统输出的平均能量).而式 (13) 则直观地表述了系统 H_∞ 熵与该系统变量间的互信息率的关系,对最小熵 H_∞ 控制作出了信息论解释.

4 结论(Conclusion)

本文讨论了单变量线性时不变反馈控制系统中的信息(不确定性)和 H_∞ 熵.利用 Bode 积分定理将控制系统中的熵率和系统开环不稳定极点结合起来,以信息论的观点阐述反馈控制系统的性能设计局限,进一步讨论了“变异度守恒定律”.同时,从信息传输的角度研究反馈控制系统,在信息理论的框架下得出系统中互信息率和 H_∞ 熵的关系,对最小熵 H_∞ 控制方法作出较直观的信息论解释.本文的研究反映了 Bode 积分定理、 H_∞ 控制与信息论之间的联系.

参考文献(References):

- [1] BODE H W. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design* [M]. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1945.

- [2] WU B F, JONCKHECRE E A. A simplified approach to Bode's theorem for continuous-time and discrete-time systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1797 - 1802.
- [3] CHEN J. Sensitivity integrals and transformation techniques: a new perspective [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 1037 - 1042.
- [4] SERON M M, BRASLAVSKY J H, GOODWIN G C. *Fundamental Limitations in Filtering and Control* [M]. London: Springer-Verlag, 1997.
- [5] ASHBY W R. *An Introduction to Cybernetics* [M]. London: Chapman & Hall Ltd, 1957.
- [6] ENGELL S. Variety, information and feedback [J]. *Kybernetes*, 1984, 13(2): 73 - 77.
- [7] MUSTAFA D, GLOVER K. *Minimum Entropy H_∞ Control* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [8] QIU L, CHEN T. Multirate sampled-data systems: all H_∞ suboptimal controllers and the minimum entropy controller [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(3): 537 - 550.
- [9] BOYD S, HARA C. *Linear Controller Design-Limits of Performance* [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.
- [10] WEIDEMANN H L. Entropy analysis of feedback control systems [A]. *Advances in Control Systems* [C]. New York: Academic Press, 1969, 7: 225 - 255.
- [11] KICKER W J M, BERTRAND J W M, PRAAGMAN J. Some comments on cybernetics and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1978, 8(11): 805 - 809.
- [12] IHARA S. *Information Theory for Continuous Systems* [M]. Singapore: World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1993.
- [13] PAPOULIS A. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes* [M]. 3rd ed. Singapore: McGraw-Hill, Inc, 1991.
- [14] STOORVOGEL A A, SCHUPPEN J H V. System identification with information theoretic criteria [A]. BITTANTI S, PICC G, ed. *Identification, Adaptation, Learning* [M]. Berlin: Springer, 1996: 289 - 338.
- [15] LJUNG L. *System Identification: Theory for the User* [M]. 2nd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1999.
- [16] GELFAND I M, YAGLOM A M. Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function [J]. *Uspekhi Mat Nauk*, 1957, 12(1): 199 - 246.

作者简介:

章 辉 (1967 —), 男, 1990年毕业于浙江大学化工系并留校, 1995年获浙江大学硕士学位后到浙江省计经委工作, 现为浙江大学控制系博士研究生. 研究方向为随机系统, 鲁棒控制, 控制系统的信息论方法等, 曾获国家教委科技进步二等奖. E-mail: zhanghui.iipc@zju.edu.cn;

孙优贤 (1940 —), 男, 毕业于浙江大学化工系, 浙江大学教授、博士生导师、中国工程院院士, 现任浙江大学工业自动化国家工程研究中心主任. 研究领域有鲁棒控制, 容错控制, 非线性系统, 软测量技术, 制浆造纸工业过程优化与控制等. 发表著作 10 余部、论文 400 余篇, 获省部级以上科技进步奖 25 项. 获得“全国教育系统劳动模范”、“全国优秀科技工作者”等称号. E-mail: yxsum@iipc.zju.edu.cn.