

用 Kalman 滤波器对原子钟进行控制

李孝辉^{1,2}, 吴海涛¹, 高海军¹, 边玉敬¹

(1. 国家授时中心, 陕西 临潼 710600; 2. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要: 介绍了一种利用 Kalman 滤波器进行原子钟控制的方法, 并对此方法作了改进, 可以把一个原子钟的相位——时间非常精确地控制到时间标准上. 最后, 利用国家授时中心的实测数据对这种方法作了验证, 证明这种方法切实可行, 控制后原子钟与所选择的参数钟 UTC(NTSC)的最大钟差不大于 10 ns.

关键词: Kalman 滤波器; 时间同步; 原子钟

中图分类号: TP127.1 **文献标识码:** A

Clock disciplined method by using Kalman filter

LI Xiao-hui^{1,2}, WU Hai-tao¹, GAO Hai-jun¹, BIAN Yu-jing¹

(1. National Time Service Center, Shanxi Lintong 710600, China;

2. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: A clock disciplined method based on Kalman filter was given, and this method was improved. It could steer one atomic clock phase-time into time standard precisely. At last, this method was checked with the data from National Time Service Center. The experiment results show that the maximum difference between the disciplined clock and the time standard is no more than 10 ns.

Key words: Kalman filter; time synchronization; atomic clock

随着科学技术的日益发展, 对时钟同步技术的要求越来越高, 这推动了钟控技术的发展. 智能钟技术要求将一个钟的频率控制到另一个频率, 实现两个钟之间的精确同步. 另外, GPS 技术的发展, 它提供了一个在全球范围内时间同步在几纳秒内的手段, 利用 GPS 的优良特性来控制本地振荡器, 可以较低的成本实现较高质量的守时^[1].

Kalman 滤波器具有许多有吸引力的特征, 它是最小方差意义上的最优估计. Kalman 滤波器适用于动力学系统, 提供合适的初始化和最优暂态响应. 它本身是鲁棒的, 滤波器建立在动力学系统上, 使它能减少随机干扰的影响. 在这里, 本文用 Kalman 滤波器执行状态估计和预测, 对原子钟进行控制, 并采用中国科学院国家授时中心的实测数据对这种方法进行验证.

1 振荡器模型(Model of oscillator)

振荡器的输出信号模型为^[2,3]

$$T(t) = a + b(t - t_0) + \frac{1}{2}c(t - t_0)^2 + n(t),$$

其中, a 是初始相位, b 是频率偏移, c 是频率老化系

数. $n(t)$ 是原子钟的噪声, 根据原子钟的幂率谱模型, 它是五种噪声的叠加. 对振荡器进行精确控制需要适当估计出 a , b 与 c 三项的值, 但是由于噪声的存在限制了估计的精度. 如何准确地估计出振荡器的信号模型的三个参数一直是研究的内容. 用 Kalman 滤波器来估计这三个参数可以起到很好的效果^[4,5].

2 用 Kalman 滤波器进行状态估计(Estimate state by using Kalman filter)

欲估计的 n 个参量形成 n 维状态向量 $X(k)$. 系统从第 $k-1$ 次采样到第 k 次采样的递推公式为

$$X(k) = \Phi(k-1)X(k-1) + S(k-1), \quad (1)$$

$\Phi(k-1)$ 是 $n \times n$ 维的状态转移矩阵. $S(k-1)$ 是输入到系统的 n 维噪声, 零均值正态分布并且在时间上互不相关.

测量向量 $Z(k)$ 由另一个矩阵方程表示:

$$Z(k) = H(k)X(k) + V(k),$$

r 维测量向量在第 k 次测量同 n 维状态向量通过量测矩阵 H 线性地联系, $V(k)$ 是 r 维白噪声.

定义 k 次测量后状态向量的误差为 $X(k|k) - X(k)$, 定义误差的方差阵为

$$P(k|k) =$$

$$E\{(X(k|k) - X(k))(X(k|k) - X(k))^T\}.$$

这个 $n \times n$ 矩阵的对角元素之和是第 k 次测量后状态 $X(k)$ 的估计方差. 另定义 $k-1$ 次测量后状态 $X(k)$ 的预报误差方差:

$$P(k|k-1) =$$

$$E\{(X(k|k-1) - X(k))(X(k|k-1) - X(k))^T\}.$$

最后, 定义 $R(k)$ 是测量噪声的方差阵和 $Q(k)$ 是状态噪声的方差阵:

$$R(k) = E[V(k) \cdot V(k)^T],$$

$$Q(k) = E[S(k) \cdot S(k)^T].$$

从状态模型中得到方差阵

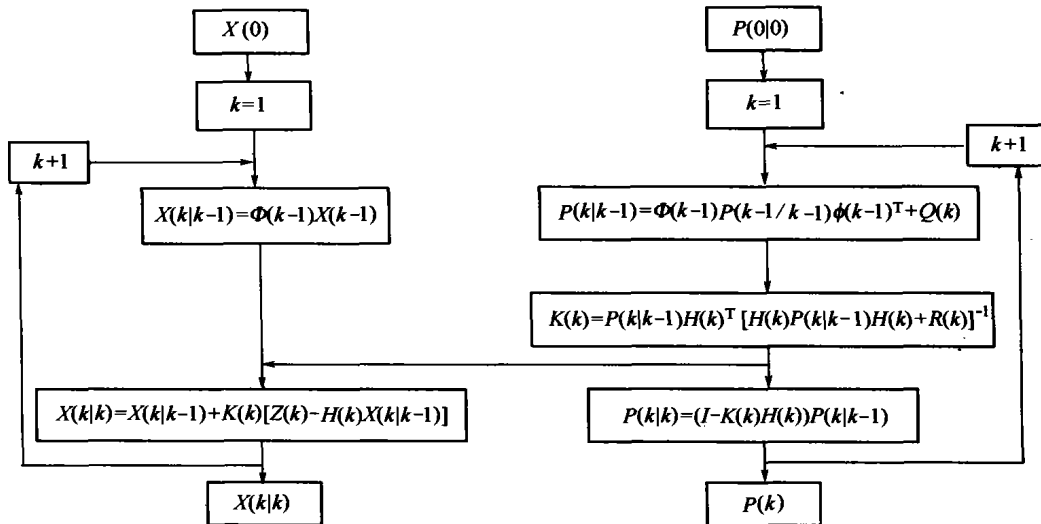


图1 用 Kalman 滤波器进行状态估计的流程图

Fig. 1 The program of state estimation by using Kalman filter

如果用 Kalman 滤波器来估计振荡器的 3 个参数, 那么, 在时间 k 状态参量 $X(k)$ 包含: 钟差 ($x(k)$)、频率偏移 ($b(k)$) 和老化系数 ($c(k)$), 可以把 $X(k)$ 写为

$$X(k) = [x(k) \quad b(k) \quad c(k)]^T,$$

测量量是钟差, 即

$$Z(k) = x(k).$$

状态转移矩阵 Φ 和量测矩阵 H 为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 0 \quad 0].$$

对 Q 和 R 的估计没有什么固定的方法, 一般采用经验估计, 但并不是说这两个量的影响不大, 它们很大

$$P(k|k-1) =$$

$$\Phi(k-1)P(k-1|k-1)\Phi(k-1)^T + Q(k-1).$$

新状态参数的估计依赖于前边的估计和目前的测量:

$$X(k|k) = \Phi(k-1)X(k-1|k-1) +$$

$$K(k)[Z(k) - H(k)\Phi(k-1)X(k-1|k-1)].$$

$K(k)$ 的选择是取误差方差阵的迹最小

$$K(k) = P(k|k-1)H(k)^T [H(k)P(k|k-1)H(k)^T + R(k)]^{-1}.$$

最后, 更新误差方差阵

$$P(k|k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1),$$

这里, I 是单位阵.

上面的过程就是 Kalman 滤波过程, 其流程图如下:

程度上限制了估计的精度, 对于原子钟的噪声不是简单的白噪声, 而是 5 种幂率谱噪声的叠加, 这两个量的影响是非常大的. 在本文里采用动态估计的方法来确定这两个量, 可以达到很好的效果. 对于 Q , 本文采用下面的估计方法: 由式(1), 得到

$$S(k-1) = X(k) - \Phi(k-1)X(k-1),$$

然后, 估计本次递推的 Q 值为

$$Q(k) = \frac{Q(k-1) + [S(k-1)S(k-1)^T]}{2},$$

对于 R 的估计方法类似.

下面, 采用中国科学院国家授时中心的实测数据对这种方法作了验证.

3 实验研究 (Experiment study)

对原子钟进行控制的目标是给一个原子钟加一

个相位改正,使它的输出尽可能和一个参数钟 UTC (NTSC)保持同步.采用国家授时中心的一台铯钟 CS16 和协调世界时 UTC(NTSC)在 1999 年 4 月到 8 月 153 天的钟差数据来验证这个算法,如图 2 是未经调整的钟差,本文将初始钟差定为 0,由于频率偏移的存在,钟差呈线性的趋势.输入 CS16 与 UTC (NTSC)的钟差,采用 Kalman 滤波器估计出 CS16 的状态向量 $X(k)$ 计算出下一时刻需要调整的相位:

$$\text{phase}(k+1) =$$

$$x(k) + b(k) * \Delta t + \frac{1}{2} * c(k) * \Delta t * \Delta t,$$

其中, Δt 是采样间隔,在本文中为 1 天,采样是等间隔采样.

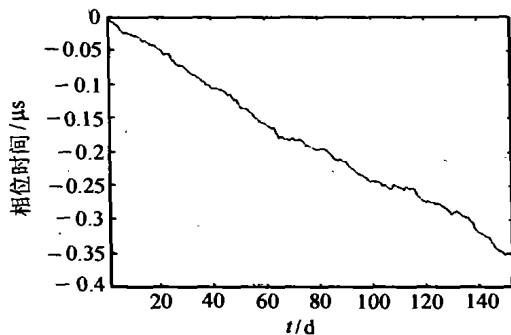


图 2 CS16 和 UTC(NTSC)的钟差

Fig. 2 Clock difference between CS16 and UTC(NTSC)

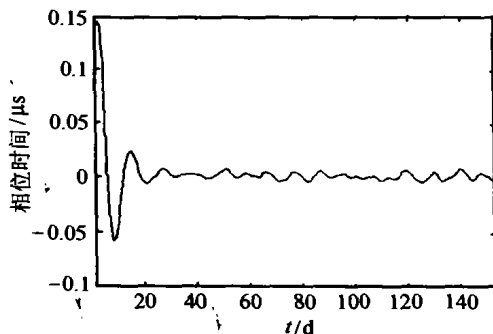


图 3 用 Kalman 滤波算法控制的原子钟钟差

Fig. 3 The difference of atomic clock which disciplined by Kalman algorithm

评价控制性能的标准是看能不能将钟差调整到最小,调整以后的稳定度是不是比原来的更高(Allan 方差更小).图 3 是调整以后的钟差曲线,在刚开始的时候,由于 Kalman 滤波器没有达到稳定状态,钟差较大.在 20 天以后,钟差稳定在 $-0.0054 \mu\text{s}$ 和 $0.098 \mu\text{s}$ 之间,表现出一个较小的误差.由表 1 可以看出,经控制以后的信号的均值和方差都比较小,最大值和最小值都在 3σ 点以内,表明没有奇异点存

在.图 4 是两者 Allan 方差的比较,在取样时间 1 天的时候,它的稳定度没有改善,从理论上说,对原子钟输出相位 1 天修改一次,取样时间 1 天的稳定度可能要下降^[6].从表中可以看出,1 天的稳定度两者没有什么区别.但经控制以后其它取样时间的稳定度有显著提高.

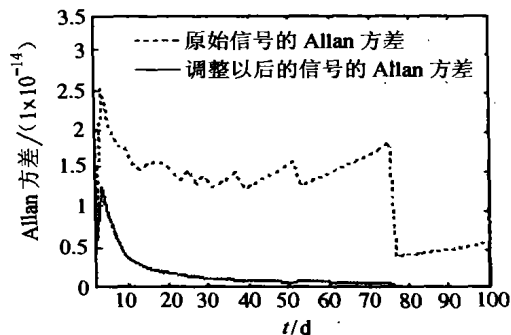


图 4 调整前与调整后信号 Allan 方差比较

Fig. 4 Compare the Allan variance of the disciplined signal and that of the original signal

3.1 算法的改进(Improvement of algorithm)

本算法的实质就是利用 Kalman 滤波器对原子钟进行建模,估计出钟的频率以及老化系数,根据这些系数来预测下一时刻钟与时间标准的偏差,及时地把它拉回.

对于一台原子钟的频率偏移和频率老化,其变化不会太大.由于白噪声的存在,使每一次估计出的 b 和 c 都有差别,但白噪声可以通过多次平均来消除.因此,我们对原算法加以调整,使信号的稳定度增大.方法是每一次估计出的 b 和 c 部分地加上上一次估计的 b 和 c ,这样,能将白噪声的影响减小.采用这种方法计算出下一时刻要调整的相位为

$$\text{phase}(k+1) =$$

$$x(k) + [b(k) * \lambda + b(k-1) * (1-\lambda)] * \Delta t +$$

$$\frac{1}{2} * [c(k) * \lambda + c(k-1) * (1-\lambda)] * \Delta t * \Delta t,$$

其中, λ 为调整步长,本文中取 0.6. 经过改进以后的算法控制的信号见图 5,它刚开始几天的振荡比改进前算法的振荡小.稳定以后两者的各项指标比较见表 1,可以看出,改进以后的算法能更好的把原子钟控制到 UTC(NTSC)上.两者稳定度比较见图 6,改进后算法计算的信号在取样时间 5~10 天时的稳定度有稍许提高,其它取样时间稳定度没有什么差别.改进后的算法在不影响稳定度的前提下使其性能提高.

表1 改进前算法和改进后算法的比较

Table 1 Comparison between these two algorithms

	最小值	最大值	均值	方差	3 σ 点	频率偏移(s/d)
未调整信号	-0.3522	0	-0.1834	0.0978	-0.4768 0.1099	-2.3×10^{-9}
改进前算法	-0.0054	0.0098	0.0030	0.0022	-0.0067 0.0110	2.5288×10^{-11}
改进后算法	-0.0027	0.0038	0.0013	0.0006	-0.0032 0.0044	1.1610×10^{-11}

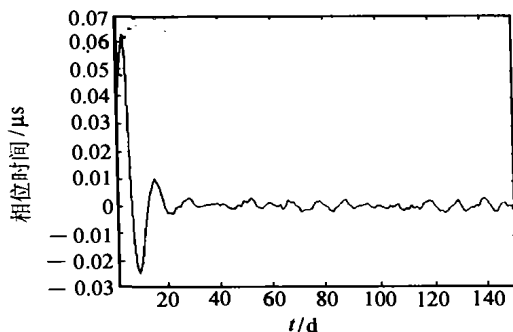


图5 用改进后算法控制的原子钟钟差
Fig. 5 The difference of atomic clock that disciplined by the improved algorithm

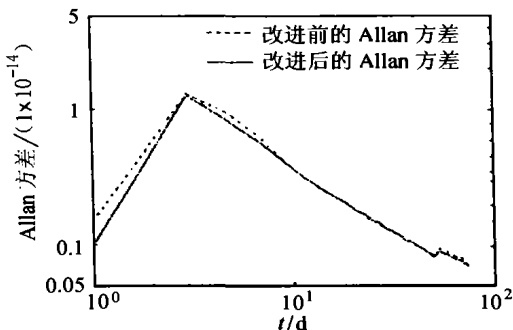


图6 两种算法控制的原子钟稳定度比较
Fig. 6 Compare the stability of atomic clock that disciplined by these two algorithms

4 结束语(Conclusion)

本文介绍了用 Kalman 滤波器进行振荡器参数估计的方法,它是在最小方差意义下的估计,估计的效果较好,我们推荐使用改进的算法,它在不影响稳定度的前提下使被控制信号更加接近频率标准.在实际中,测量的时间间隔不一定是等间隔的,对于这种情况下用 Kalman 滤波器估计参数,只需做稍许修改即可.从工程应用角度来说,控制一个原子钟的目标是用最少的比对次数达到最大的控制精度.如何找到这两者的最佳结合点,仍是作者以后研究的问题.

参考文献(References):

- [1] DAVIS J A, ROUGEAUX B. The development of a computer model of a GSP disciplined oscillator to aid error budget determination [A]. 1999 Joint Meeting Europe Frequency and Time Forum and IEEE Int Frequency Control Symposium [C]. France: [s. n.], 1999: 291 - 295.
- [2] KARTASCHOFF P. Frequency and Time [M]. London: Academic Press, 1978: 30 - 34.
- [3] SULLIVAN D B, ALLAN D W, HOWE D A, et al, ed. Characterization of Clocks and Oscillator [M]. NIST Technology Note, 1990: 1227.
- [4] STEIN S R, FILLER R L. Kalman filter analysis for real time application of clocks and oscillators [A]. 42nd Annual Frequency Control Symposium [C]. Maryland: [s. n.], 1988: 447 - 452.

- [5] STEIN S R, EVANS J. The application of Kalman filter and ARIMA models to the study of time prediction errors of clock for use in the defense communication system [A]. 44th Annual Frequency Control Symposium [M]. Maryland: [s. n.], 1990: 630 - 635.
- [6] CORDARA F, PETTITI V. Short-term characterization of GPS disciplined oscillator and field trial for frequency of Italian calibration centers [A]. 1999 Joint Meeting Europe Frequency and Time Forum and IEEE Int Frequency Control Symposium [C]. France: [s. n.], 1999: 404 - 407.

作者简介:

李孝辉 (1974 —), 男, 1997 年在郑州大学获得物理学学士学位, 2001 年在中国科学院获得天体测量与天体力学硕士学位, 现在中国科学院陕西天文台攻读博士学位, 研究工作主要是钟控算法. E-mail: xiaohui-li@china.com;

吴海涛 (1966 —), 男, 1988 年毕业于西安交通大学信息与控制工程系无线电技术专业, 获工学学士学位, 1991 年在中国科学院陕西天文台获硕士学位, 1991 年至 1994 年, 在湖北钢珠厂从事精密电子测量工作, 1995 年至 1998 年在三峡大学从事电子信息工程和电子测量的教学和科研工作, 自 1999 年起, 在国家授时中心(原陕西天文台)攻读博士学位, 研究罗兰 C 理论问题. E-mail: haitao@ntsc.ac.cn;

高海军 (1974 —), 男, 1998 年毕业于西北大学计算机软件专业, 获得学士学位, 现在中国科学院国家授时中心从事计算机软硬件的开发工作. E-mail: gaohaijun@ntsc.ac.cn;

边玉敬 (1945 —), 男, 研究员, 博士生导师, 1969 年毕业于兰州大学物理系无线电专业, 1972 年至今, 一直在国家授时中心从事时间频率方面的研究工作, 曾任陕西天文台时频基准研究室主任, 现为时间频率测量与控制研究团组首席研究员. E-mail: bian@ntsc.ac.cn.