

一类非线性系统的稳定自适应控制

郭健¹, 陈庆伟¹, 吴晓蓓¹, 胡维礼¹, 吴宏鑫²

(1. 南京理工大学自动化系, 江苏南京 210094; 2. 北京控制工程研究所, 北京 100080)

摘要: 将一类非线性系统等价表示为时变线性系统, 在此基础上设计了自适应控制器. 利用小波网络直接辨识控制器参数. 从理论上证明了闭环系统的稳定性. 仿真结果表明了所提算法的有效性.

关键词: 时变; 非线性; 小波网络; 自适应控制

中图分类号: **文献标识码:** A

Stable adaptive control for a class of nonlinear system

GUO Jian¹, CHEN Qing-wei¹, WU Xiao-bei¹, HU Wei-li¹, Wu Hong-xin²

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China;

2. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100080, China)

Abstract: The adaptive control was implemented for a class of nonlinear system by substituting it with a time-varying linear system. The wavelet networks were used directly to identify the coefficients of time-varying controller. The stability of closed-loop system was proved, and the effectiveness of the presented method was demonstrated by the simulation results.

Key words: time-varying; nonlinear; wavelet networks; adaptive control

1 引言(Introduction)

在非线性系统的控制中, 线性化方法是一种常见的方法^[1,2]. 但当对象存在强非线性或在大范围运行时, 近似线性化会带来较大的建模误差, 很难实现有效的控制. 而反馈线性化方法虽然能对非线性系统进行精确线性化, 但仅局限于仿射非线性系统, 需要知道系统的精确数学模型. 这些限制了它们在实际复杂工业过程中的应用. 本文针对一类常见的非线性系统, 将其等价表示为时变线性系统, 在此基础上设计了自适应控制器. 利用小波网络直接逼近控制器的参数, 控制过程只需利用系统的输入输出数据. 最后分析了闭环系统的稳定性, 并通过仿真进一步验证了算法的有效性.

2 系统模型和控制器(System model and controller)

本文的研究对象由如下输入输出模型描述:

$$\begin{aligned} y(k) &= f(y(k-1), \dots, y(k-n), \\ &\quad u(k-1), \dots, u(k-m)), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 m, n 分别为系统已知的输入输出阶次. $f(\cdot)$ 是未知的非线性函数, 且满足下列条件:

1) $f(0, 0, \dots, 0) = 0$;

2) $f(\cdot)$ 关于 $y(k-1), \dots, y(k-n), u(k-1), \dots, u(k-m)$ 连续可导, 且各偏导数有界, 即

$$|\partial f / \partial y| \leq k_{\max}, \quad |\partial f / \partial u| \leq k_{\max},$$

其中 $k_{\max}$ 为一非负常数.

以上条件对于许多非线性系统而言, 并不很苛刻. 在此基础上, 得到非线性系统(1)的线性表示.

引理 1^[3] 满足条件 1), 2) 的非线性系统(1), 可表示为如下时变线性系统:

$$\begin{aligned} y(k) &= \alpha_1(k)y(k-1) + \dots + \alpha_n(k)y(k-n) + \\ &\quad \beta_1(k)u(k-1) + \dots + \beta_m(k)u(k-m). \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} |\alpha_i(k)| &\leq k_{\max}, \quad |\beta_j(k)| \leq k_{\max}, \\ i &= 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

对于原非线性系统(1)的等价时变线性系统(2), 可导出 k 时刻的预测控制律^[4]为

$$\begin{aligned} u(k) &= l_0(k)y(k) + \dots + l_n(k)y(k-n) + \\ &\quad p_1(k)y_r(k+1) + \dots + p_N(k)y_r(k+N) + \\ &\quad \lambda_1(k)u(k-1) + \dots + \lambda_m(k)u(k-m). \end{aligned} \quad (3)$$

为求出控制律 $u(k)$, 采用小波网络逼近控制器的时变系数. 虽然式(3)是由基本的广义预测控制导出的隐式算法, 由于直接采用小波网络逼近式(3)的时变系数, 未必保留了广义预测控制的特性, 本文不妨将式(3)的控制结构视为一种特定的自适应控制算法.

3 小波网络(Wavelet networks)

3.1 网络结构(Networks structure)

小波网络^[5,6]的结构如图1所示:

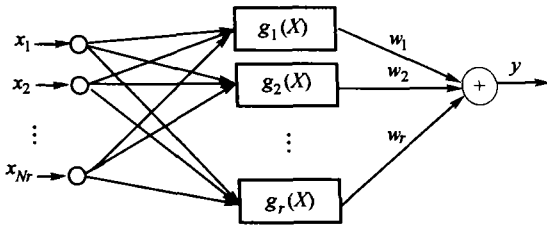


图1 小波网络结构图

Fig. 1 Structure of wavelet networks

对任一 $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 可由如图1所示的小波网络描述^[6]:

$$f(x) \approx y = \sum_{l=1}^r w_l g_l(X). \quad (4)$$

其中 w 为权值,

$$g(x) = \prod_{i=1}^{Nr} g(x_i) = \prod_{i=1}^{Nr} \Psi(2^j x_i - h)$$

为小波基函数, j, h 分别表示伸缩参数和平移参数, $r = (2j+1)(2h+1)$, $\Psi(\cdot)$ 为小波母函数. 可事先根据信号的时频域特性确定 j, h , 那么网络的可调参数只有权值 w , 且与输出呈线性关系, 可采用较简单的算法来修正小波网络参数.

3.2 小波建模(Modeling with wavelet networks)

本文采用图1所示的小波网络来逼近控制器的时变系数:

$$\begin{cases} l_i(k) \approx \sum_{l=1}^r w_{i,l}^l g_l(X_k), & i = 0, \dots, n, \\ p_i(k) \approx \sum_{l=1}^r w_{i,l}^p g_l(X_k), & i = 1, \dots, N, \\ \lambda_i(k) \approx \sum_{l=1}^r w_{i,l}^\lambda g_l(X_k), & i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (5)$$

由引理1的推导过程可知, 控制器参数取决于原系统的状态(输入和输出). 因此, k 时刻, 取小波网络的输入为

$$X_k = [y(k), \dots, y(k-n), y_r(k+1), \dots, y_r(k+N), u(k-1), \dots, u(k-m)]^T;$$

小波网络输出为

$$[\hat{l}_0(k), \dots, \hat{l}_n(k), \hat{p}_1(k), \dots, \hat{p}_N(k), \hat{\lambda}_1(k), \dots, \hat{\lambda}_m(k)]^T.$$

将式(5)代入(3)可得

$$u(k) = \phi^T(k) \hat{\theta}(k). \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} \phi(k) = & [g_1 y(k), \dots, g_r y(k), \dots, g_1 y(k-n), \dots, \\ & g_r y(k-n), g_1 y_r(k+1), \dots, g_r y_r(k+1), \dots, \\ & g_1 y_r(k+N), \dots, g_r y_r(k+N), g_1 u(k-1), \dots, \\ & g_r u(k-1), \dots, g_1 u(k-m), \dots, g_r u(k-m)]^T, \\ \hat{\theta}(k) = & [w_{0,1}^l(k), \dots, w_{0,r}^l(k), \dots, w_{n,1}^l(k), \dots, w_{n,r}^l(k), \\ & w_{1,1}^p(k), \dots, w_{1,r}^p(k), \dots, w_{N,1}^p(k), \dots, w_{N,r}^p(k), \\ & w_{1,1}^\lambda(k), \dots, w_{1,r}^\lambda(k), \dots, w_{m,1}^\lambda(k), \dots, w_{m,r}^\lambda(k)]^T. \end{aligned}$$

利用小波网络逼近控制器中的时变系数, 网络权值的学习不同于常规的非线性逼近, 无法得到输入输出样本. 由于小波网络训练的目标是使得系统输出与期望输出的误差最小, 那么可采取间接训练; 取性能指标为

$$J = E\{[y_r(k) - y(k)]^2\}.$$

采用如下算法^[7]修正小波网络权值 $w(k)$:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + \frac{\mu \phi(k-1) e(k)}{1 + \phi(k-1)^T \phi(k-1)}, \\ e(k) = y_r(k) - y(k). \end{cases} \quad (7)$$

4 稳定性分析(Stability analysis)

引理2^[8] 若系统(1)是逆稳定的, 则有

$$|u(k-1)| \leq k_1 + k_2 \max_{0 \leq i \leq k} |y(i)|,$$

其中 $0 \leq k_1 < \infty, 0 < k_2 < \infty$.

引理3^[8] 若给出的实标量序列 $\{s(k)\}$, $\{d_1(k)\}$, $\{d_2(k)\}$ 和列向量序列 $\{\sigma(k)\}$ 满足下述条件:

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s^2(k)}{d_1(k) + d_2(k) \sigma^T(k) \sigma(k)} \rightarrow 0$;
- 2) $0 < d_1(k) < \kappa < \infty, 0 < d_2(k) < \kappa < \infty$, κ 为一正常数;

3) $\|\sigma(k)\| \leq o_1 + o_2 \max_{0 \leq \tau \leq k} |s(\tau)|$, 式中 $0 < o_1 < \infty, 0 < o_2 < \infty$. 那么有

① $\{\|\sigma(k)\|\}$ 有界;

② $\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) \rightarrow 0$.

定理1 若非线性系统(1)满足:

- 1) $\partial f / \partial u(k-1) > 0$;

2) 系统是逆稳定的;

3) 存在 $\hat{\theta} = \theta^0$, 使得 $y(k) = y_r(k)$.

取 $0 < \mu < 2/k_{\max}$, 则由式(1), (6)和(7)组成的闭环系统具有如下性质:

① $\|\hat{\theta}(k) - \theta^0\| \leq \|\hat{\theta}(k-1) - \theta^0\| \leq \dots \leq \|\hat{\theta}(0) - \theta^0\|$;

② 闭环系统输入输出 $u(k), y(k)$ 有界;

③ $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \rightarrow 0$.

证 令 $\tilde{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \theta^0$, 取

$$V(k) = \tilde{\theta}^T(k)\tilde{\theta}(k) = \|\tilde{\theta}(k)\|^2,$$

由定理1中的条件3)可得, 存在

$$u^0(k-1) = \phi^T(k-1)\theta^0,$$

使得

$$\begin{aligned} y_r(k) &= f(y(k-1), \dots, y(k-n), \\ &\quad u^0(k-1), u(k-2), \dots, u(k-m)) = \\ &= f(y(k-1), \dots, y(k-n), \\ &\quad \phi^T(k-1)\theta^0, u(k-2), \dots, u(k-m)), \\ e(k) &= y_r(k) - y(k) = \\ &= f(y(k-1), \dots, y(k-n), \phi^T(k-1)\theta^0, \\ &\quad u(k-2), \dots, u(k-m)) - \\ &= f(y(k-1), \dots, y(k-n), \phi^T(k-1)\tilde{\theta}(k-1), \\ &\quad u(k-2), \dots, u(k-m)) = \\ &= \delta(\phi^T(k-1)\tilde{\theta}(k-1)). \end{aligned}$$

式中 $\delta = \partial f / \partial u(k-1) |_{\zeta}$, ζ 介于 $u^0(k-1)$ 与 $u(k-1)$ 之间, $0 < \delta \leq k_{\max} < +\infty$.

由式(7)及定理1的条件可推得:

$$\begin{aligned} V(k) - V(k-1) &= \\ \|\tilde{\theta}(k)\|^2 - \|\tilde{\theta}(k-1)\|^2 &= \\ (\tilde{\theta}(k-1) + \frac{\mu\phi(k-1)e(k)}{1+\phi(k-1)^T\phi(k-1)})^T &(\tilde{\theta}(k-1) + \\ \frac{\mu\phi(k-1)e(k)}{1+\phi(k-1)^T\phi(k-1)}) &- \tilde{\theta}^T(k-1)\tilde{\theta}(k-1) = \\ 2\frac{\mu\phi^T(k-1)\tilde{\theta}(k-1)e(k)}{1+\phi(k-1)^T\phi(k-1)} + \frac{\mu^2\phi^T(k-1)\phi(k-1)e^2(k)}{(1+\phi(k-1)^T\phi(k-1))^2} &= \\ \Omega(k) \frac{\mu e^2(k)}{1+\phi(k-1)^T\phi(k-1)}. \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \Omega(k) &= -\frac{2}{\delta} + \frac{\mu\phi^T(k-1)\phi(k-1)}{1+\phi^T(k-1)\phi(k-1)} \leq \\ &= -\frac{2}{k_{\max}} + \mu = -\tau < 0. \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\tau \triangleq \frac{2}{k_{\max}} - \mu > 0$. 所以

$$V(k) \leq V(k-1).$$

类推地有

$$V(k) \leq V(k-1) \leq \dots \leq V(0),$$

即

$$\begin{aligned} \|\hat{\theta}(k) - \theta^0\| &\leq \\ \|\hat{\theta}(k-1) - \theta^0\| &\leq \dots \leq \|\hat{\theta}(0) - \theta^0\|. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} V(k) - V(0) &= \\ V(k) - V(k-1) + V(k-1) - \\ V(k-2) + \dots + V(1) - V(0) &= \\ \sum_{i=1}^k \Omega(i) \frac{\mu e^2(i)}{1+\phi(i-1)^T\phi(i-1)} &\leq \\ -\tau \sum_{i=1}^k \frac{\mu e^2(i)}{1+\phi(i-1)^T\phi(i-1)}. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{e^2(i)}{1+\phi(i-1)^T\phi(i-1)} &\leq \\ \frac{1}{\mu\tau} (V(0) - V(k)) &\leq \frac{1}{\mu\tau} V(0) \triangleq \epsilon. \end{aligned}$$

式中 ϵ 为一非负常数. 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^2(k)}{1+\phi(k-1)^T\phi(k-1)} \rightarrow 0. \quad (9)$$

由 y_r 的有界性可得

$$|y(k)| = |y_r(k) - e(k)| \leq k_3 + \max_{0 \leq j \leq k} |e(j)|. \quad (10)$$

由原系统的逆稳定条件和引理2可得

$$|u(k-1)| \leq k_1 + k_2 \max_{0 \leq j \leq k} |y(j)|. \quad (11)$$

结合式(10), (11)可得, 存在 k_4, k_5 , 使得

$$|u(k-1)| \leq k_4 + k_5 \max_{0 \leq j \leq k} |e(j)|. \quad (12)$$

综合式(10), (11)和(12), 由小波函数 $g(\cdot)$ 的有界性可知, 存在 k_6, k_7 , 使得

$$\|\phi(k-1)\| \leq k_6 + k_7 \max_{0 \leq j \leq k} |e(j)|. \quad (13)$$

综合式(9), (13)和引理3可知:

1) ϕ 有界, 系统输入输出 $u(k), y(k)$ 有界;

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \rightarrow 0$.

证毕.

由于定理1的条件3)过严, 为此, 可适当放宽为: 存在 $\hat{\theta} = \theta^0$, 使得

$$|e(k)| = |y(k) - y_r(k)| \leq \rho,$$

其中 $\rho \geq 0$. 那么可采用带死区的最小二乘法, 此时定理1的结论依旧成立, 只是结论3变为 $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) \rightarrow \rho$.

5 仿真实例(Simulation result)

取被控对象为

$$y(k) = \frac{5y(k-1)y(k-2)}{1 + y(k-1)^2 + y(k-2)^2} + u(k-1),$$

经过验证该系统满足假设条件.

仿真中,输入信号为幅值为5的方波,

$$u(1) = -1, u(2) = 1, u(3) = 0,$$

$$y(1) = y(2) = 0, y(3) = 0,$$

$$N = 3, N_u = 1,$$

小波网络参数为 $j = h = 4, r = 81$. 仿真结果如图2所示,横坐标表示仿真步数,纵坐标表示幅值.由仿真结果可看到,本文的方法能够取得较好的跟踪效果.

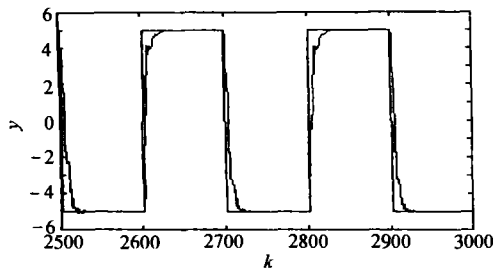


图2 跟踪方波信号曲线

Fig. 2 Simulation curves of square wave

6 结论(Conclusion)

本文针对一类非线性系统,将其等价为一线性时变系统,在此基础上设计了自适应控制器,利用小波网络直接辨识控制器参数,算法简单、有效.为了使小波网络较好地逼近控制器参数,需要较多的网络隐层节点,从而影响了闭环控制系统的实时性.对于实时性要求较高的系统,如何简化小波网络的结构来提高控制的实时性有待于进一步的研究.

参考文献(References):

- [1] LU P. Approximate nonlinear receding-horizon control laws in closed form [J]. *Int J Control*, 1998, 7(1): 19-34.
- [2] BADR A. Application of tracking multi-model control to a nonlinear thermal process [J]. *Int J Systems Science*, 1990, 21(9): 1795-1803.
- [3] 郭健,朱瑞军,胡维礼.一类非线性系统的自适应广义预测控制[J]. *控制与决策*, 2001, 16(3): 258-261.
(GUO Jian, ZHU Ruijun, HU Weili. Adaptive GPC for a class of nonlinear system [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 258-261.)
- [4] 王伟.广义预测控制理论及其应用[M].北京:科学出版社, 1998.
(WANG Wei. *Generalized Predictive Control Theory and Application* [M]. Beijing: Science Press, 1998.)
- [5] ZHANG Qinghua, BENVENISTE A. Wavelet networks [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(6): 889-898.
- [6] 吕朝霞.非线性系统的内模控制研究[D].南京:南京理工大学, 2002.
(LÜ Zhaoxia. *Research on the IMC of nonlinear system* [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2000.)
- [7] AHMED M S. Neural-net-based direct adaptive control for a class of nonlinear plants [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(1): 119-124.
- [8] 古德温,孙贵生.自适应滤波、预测与控制[M].北京:科学出版社, 1992.
(GOODWIN G C, SIN K S. *Adaptive Filtering Prediction and Control* [M]. Beijing: Science Press, 1992.)

作者简介:

郭健 (1974—),男,2002年于南京理工大学自动化系获博士学位.主要研究领域为:预测控制,小波神经网络等. E-mail: gjg@263.sina.com;

陈庆伟 (1963—),男,教授.主要研究方向为智能控制系统及数字交流伺服系统的设计;

吴晓蓓 (1958—),男,教授.主要研究方向为智能控制理论及神经网络在控制中的应用等;

胡维礼 (1941—),男,教授,博士生导师.主要研究方向为:非线性控制,智能控制理论在伺服系统中的应用等;

吴宏鑫 (1939—),男,研究员,博士生导师.主要从事智能控制,自适应控制,航天控制等方面的研究.