

基于聚类 and SVD 算法的模糊逻辑系统结构辨识

祖家奎^{1,2}, 戴冠中², 赵淳生¹, 卢京潮²

(1. 南京航空航天大学 超声电机研究中心, 江苏 南京 210016; 2. 西北工业大学 自动控制系统, 陕西 西安 710072)

摘要: 为了研究模糊逻辑系统新的结构辨识方法, 提出采用基于山峰函数的减法聚类算法构造模糊逻辑系统的初始结构, 并利用奇异值分解(SVD)算法分析了模糊规则与奇异值、累积贡献率以及索引向量的关系, 从而实现了模糊逻辑结构的优化. 最后, 对该算法的可行性和有效性进行了仿真验证和性能比较, 取得了较好的效果.

关键词: 减法聚类; 奇异值分解; 模糊逻辑系统; 结构辨识

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Structure identification of fuzzy logic system based on clustering and SVD algorithm

ZU Jia-kui^{1,2}, DAI Guan-zhong², ZHAO Chun-sheng¹, LU Jing-chao²

(1. Research Center of Ultrasonic Motors, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Jiangsu Nanjing 210016, China;

2. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Shanxi Xi'an 710072, China)

Abstract: Aimed to explore the new algorithms of structure identification for fuzzy logic systems, a substraction clustering algorithm based on mountain functions to set up the initial fuzzy logic structure was used, and singular value decomposition (SVD) was adopted to analyze the relationships between fuzzy rules and singular values, cumulative contribution ratios, index vectors. Meanwhile, the optimized structure of fuzzy model was obtained. Finally, simulations and performance comparison show that the optimized algorithm was feasible and effective.

Key words: subtraction clustering; singular value decomposition (SVD); fuzzy logic system; structure identification

1 引言 (Introduction)

近年来, 基于规则的模糊建模以其众多优点成为一个活跃的研究领域. 在模糊建模中, 一般要求所建模型既要有较好的拟合精度, 又要有较简单的模糊结构. 建立简洁的模糊规则不仅有利于模糊模型的解释和理解, 也有利于参数优化效率的提高, 防止模型的过拟合问题. 目前, 众多聚类算法在模糊逻辑系统的结构辨识中得到了广泛应用, 据此而得到的模糊结构往往是以拟合精度作为指标进行聚类的, 模糊规则集中包含了一些冗余的规则, 难以保证其结构的最优化. Wang 和 Mendel^[1] 提出采用正交最小二乘算法选择最重要的模糊规则; Yen 和 Wang^[2] 则采用特征值分解简化模糊模型, 这些方法在模糊结构精简方面取得了较好的效果^[3].

本文基于山峰函数的减法聚类算法^[4]构造初始模糊逻辑系统的结构, 并采用奇异值分解^[5]算法对模糊规则加以分析, 根据规则在整个系统中的累积贡献率^[6]对模糊结构进行精简和优化. 同时, 对本文

所述方法的可行性和有效性进行了仿真验证.

2 模糊逻辑系统的描述 (Description of fuzzy logic system)

考虑一般情况下的多输入单输出模糊逻辑系统, 其模糊规则可以表述如下:

R^l : IF x_1 is F_1^l , and $\cdots$, and x_n is F_n^l , THEN y is G^l . (1)

式中 F_i^l 和 G^l 分别为 $U_i \subset R$ 和 $V \subset R$ 上的模糊集合, 且 $X = (x_1, \cdots, x_n)^T \in U_1 \times \cdots \times U_n$ 和 $y \in V$ 分别为输入和输出变量, $l = 1, 2, \cdots, M$ 为模糊规则数.

采用中心平均模糊消除器、乘积推理规则、高斯隶属函数以及单点模糊化的模糊逻辑系统数学描述如下:

$$f(X) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l \prod_{k=1}^n u_{F_k^l}(x_k)}{\sum_{l=1}^M \prod_{k=1}^n u_{F_k^l}(x_k)} = \sum_{l=1}^M \bar{y}^l \varphi_l(X), \quad (2)$$
$$\varphi_l(X) =$$

$$\frac{\prod_{k=1}^n u_{F_k^l}(x_k)}{\sum_{l=1}^M \prod_{k=1}^n u_{F_k^l}(x_k)} = \frac{\prod_{k=1}^n \exp[-(x_k - m_{F_k^l})^2 / 2\sigma_{F_k^l}^2]}{\sum_{l=1}^M \prod_{k=1}^n \exp[-(x_k - m_{F_k^l})^2 / 2\sigma_{F_k^l}^2]} \quad (3)$$

其中 $\bar{y}^l$ 为 $u_{G^l} = 1$ 时所对应的点, $u_{F_k^l}(x_k)$ 为前提模糊集合的隶属函数, $\varphi_l(X)$ 为规则 l 的模糊基函数.

设给定的输入输出数据对 $(X^{(i)}, y^{(i)})$, 其中 $i = 1, 2, \dots, N$, 可将 N 个如式(2)的方程以矩阵的形式加以描述:

$$Y = \Phi \theta. \quad (4)$$

其中 $Y = [y^{(1)}, \dots, y^{(N)}]^T \in \mathbb{R}^N$, $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_M] \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 且 $\phi_i = [\varphi_i^{(1)}, \dots, \varphi_i^{(N)}]^T \in \mathbb{R}^N$ 为模糊基矩阵, $\theta = [\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^M]^T \in \mathbb{R}^M$.

3 模糊逻辑系统的结构辨识 (Structure identification of fuzzy logic system)

3.1 减法聚类法与初始结构 (Subtraction clustering and initial structure)

模糊系统初始结构的确定涉及模糊规则的提取、输入输出空间的模糊划分、初始参数的选取等诸多问题. 目前的聚类算法如最近邻聚类法、 K 均值聚类法、模糊 C 均值法等, 通常需要预先确定聚类数, 同时提取规则没有考虑输入输出数据的相关特性, 有较大的随意性. 本文采用基于山峰函数的减法聚类法来确定模糊系统的初始结构, 自适应的确定聚类数及相关参数.

考虑 N 个数据点, 每个数据点都是聚类中心的候选者, 该算法首先构造表征数据 $X^{(i)}$ 密度指标的山峰函数

$$M_i^1(X^{(i)}) = \sum_{j=1}^N \exp[-(\|X^{(i)} - X^{(j)}\|^2)/(\alpha/2)^2]. \quad (5)$$

其中 α 为邻域半径. 若一个数据点有多个邻近的相关数据点, 则该数据点具有较高的山峰值, 半径以外的数据对该点的密度指标贡献甚微.

选择具有最高密度指标的数据点作为第一个聚类中心 X_c^1 , M_c^1 为其相应的密度指标. 下一个聚类中心的获取需要消除已有聚类中心的影响, 因此需要修改公式(5)的密度指标山峰函数

$$M_i^k(X^{(i)}) = M_i^{k-1}(X^{(i)}) - M_c^{k-1} \exp[-(\|X^{(i)} - X_c^{k-1}\|^2)/(\beta/2)^2]. \quad (6)$$

其中 $\beta = 1.5\alpha$, 通过顺序的削去山峰函数来选择新

的聚类中心. 当新聚类中心 X_c^k 相应的密度指标 M_c^k 与 M_c^1 相比小于某个值 δ 时,

$$M_c^k/M_c^1 < \delta, \quad (7)$$

终止聚类中心的搜索.

本文将上述算法应用于模糊模型初始结构辨识中, 自适应的提取聚类中心 (X_c^l, y_c^l) , 从而构成第 l 条模糊规则:

$$R^l: \text{IF } X \text{ 接近于 } X_c^l, \text{ THEN } y \text{ 接近于 } y_c^l.$$

同时选取 X_c^l 作为式(3)中 $m_{F_k^l}$ 的初始值, 以与 X_c^l 最邻近的另一个聚类中心 X_c^j 距离的一半作为式(3)中 $\sigma_{F_k^l}$ 的初始值, 进而确定模糊模型的初始结构, 并采用最小二乘法和最陡下降法所组成的混合算法对后件参数和前提参数进行训练.

3.2 基于 SVD 的结构分析与优化 (Structure optimization based on SVD algorithm)

实矩阵的奇异值定义和奇异值分解描述如下:

设 $P \in \mathbb{R}^{N \times M}$, 则存在 N 阶正交矩阵 U 和 M 阶正交矩阵 V , 使得下式成立

$$P = U \Sigma V^T. \quad (8)$$

其中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_M) \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 且 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_M \geq 0$ 为矩阵 P 的奇异值, U 的列向量和 V 的行向量分别是 PP^T 和 P^TP 的特征向量. 式(8)为矩阵 P 的奇异值分解.

经 3.1 节所述而建立的模糊逻辑系统可以表示成式(4)的形式, 对模糊基矩阵 Φ 进行奇异值分解, 可得到相应的 $U_\Phi, \Sigma_\Phi, V_\Phi$, 且矩阵 Φ 的秩 $\text{rank}(\Phi) = \text{rank}(\Sigma_\Phi)$. 当矩阵 Φ 的秩 $\text{rank}(\Phi) = r = M$ 时, 表明模糊模型前提推理所对应的输入聚类空间是线性独立的; 当 $\text{rank}(\Phi) = r < M$, 矩阵 Φ 是病态矩阵, 则表明输入聚类空间是线性相关的, 即在模糊规则中含有冗余规则, 这些冗余规则要么出现重复和相似, 要么对系统的贡献甚小. 根据 SVD 的几何解释^[7], σ_i 的大小反映了矩阵 Φ 所携带的变异信息, 从模糊的角度, 则表明相应模糊规则对模型的贡献. 对模糊模型进行结构优化时, 可以忽略相对较小的 σ_i , 为此定义模糊规则累积贡献率

$$Q_m = (\sum_{i=1}^r \sigma_i) / (\sum_{j=1}^M \sigma_j). \quad (9)$$

选择累积贡献率 Q_m , 也即确定了优化规则数 r , 实验表明 Q_m 与系统的逼近精度有关.

在确定优化规则数后, 如何确定 σ_i 所对应模糊基矩阵 Φ 中的列向量位置则是一个关键问题. SVD 通常采用 Golub-Reinsch 算法^[5]来实现, 奇异值的计算结果是按从大到小排列, 但无法确定对应的列向

量位置.注意到 V_Φ 是 $\Phi^T \Phi$ 的正交奇异向量矩阵, V_Φ 中隐含了 Φ 的列与 σ_i 相关的位置信息,为此定义索引向量 $I_{SVD}^{[2]}$:

$$I_{SVD} = [I_{SVD_1}, I_{SVD_2}, \dots, I_{SVD_M}]^T = \text{diag}[(V_{\Phi_1} \ V_{\Phi_1}^T) + (V_{\Phi_2} \ V_{\Phi_2}^T) + \dots + (V_{\Phi_r} \ V_{\Phi_r}^T)]. \quad (10)$$

其中 $V_\Phi = [V_{\Phi_1}, V_{\Phi_2}, \dots, V_{\Phi_r}]$ 包含了 V_Φ 的前 r 个列向量. I_{SVD} 中前 r 个最大值所在的位置反映了 Φ 中最重要的 r 个列(规则)所在的位置.由此,优化后的式(4)可简化为

$$Y = \Phi^{(r)} \theta^{(r)}, \quad (11)$$

$$\theta^{(r)} = \sum_{i=1}^r (1/\sigma_i) U_{\Phi_i}^T Y V_{\Phi_i}. \quad (12)$$

其中 U_{Φ_i}, V_{Φ_i} 分别为 U_Φ, V_Φ 的前 r 个列向量.

4 仿真验证(Simulation and testing)

考虑文献[7]中例3.1所提供的差分方程

$$y(k+1) = 0.3y(k) + 0.6y(k-1) + g[u(k)]. \quad (13)$$

式中未知函数的形式为 $g(u) = 0.6\sin(\pi u) + 0.3\sin(3\pi u) + 0.1\sin(5\pi u)$, 系统输入为 $u(k) = \sin(2\pi k/250)$. 为了辨识此系统,使用如下串行-并行辨识器:

$$\hat{y}(k+1) = 0.3\hat{y}(k) + 0.6\hat{y}(k) + \hat{f}[u(k)]. \quad (14)$$

式中 $\hat{f}[u(k)]$ 取式(2)所描述的模糊逻辑系统.

取初始250个时刻输入输出作为训练样本,根据上述聚类算法对数据进行聚类,提取出35条模糊规则以及相应的初始参数,并利用混合算法对参数进行训练100步,其训练次数与均方根误差(RMSE)的关系如图1所示,从中可看出减法聚类在确定模糊模型初始结构和参数方面的有效性.同时,取前800个时刻的输入组成验证样本,在全规则(35条)条件下模糊模型预测输出和误差如图2所示,其性能指标均方根误差(RMSE)、最大误差(MAXE)和最小误差(MINE)见表1所示.

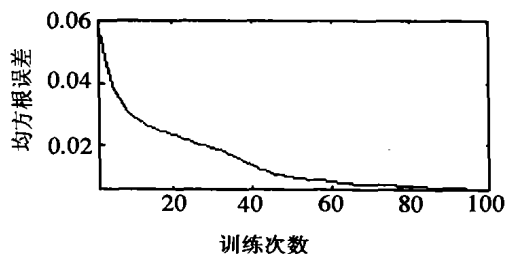


图1 训练误差曲线
Fig. 1 The curve of training error

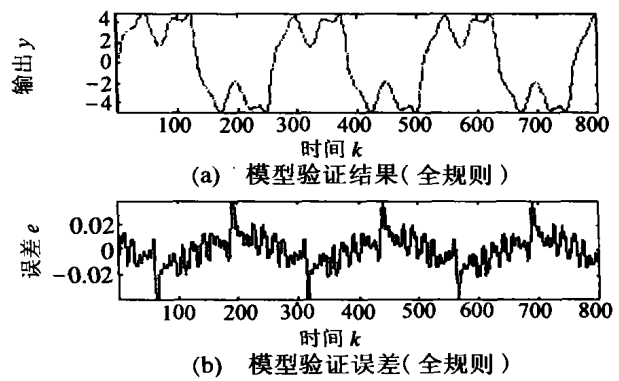


图2 模型验证
Fig. 2 Testing the model

为了检验模糊模型结构的冗余性,针对上述已建立的含有35条模糊规则的系统,采用SVD算法对其结构进行优化.通过计算可得,其模糊基矩阵的最大奇异值 $\max(\sigma_i) = 3.56219$, 最小奇异值 $\min(\sigma_i) = 0.00352$, 奇异值之间相差较大,忽略较小的奇异值,选择不同的累积贡献率对模糊规则进行精简.在累积贡献率 $Q_m = 0.61229$, 且精简后的模糊规则数为12的条件下,优化模糊模型的预测输出和误差结果如图3所示,其相应性能指标见表1所示.然而,针对式(13)的系统,文献[7]中却使用了40条模糊规则,且 $RMSE = 0.03127$.此外,为了进一步验证SVD算法,本文利用上述800个验证样本,就系统在不同累积贡献率条件下的性能指标进行了比较,如表1所示.从中可以看出模糊模型结构精简优化的必要性和有效性.

表1 优化模糊模型之间的性能比较

Table 1 Performance comparison of reduced fuzzy model

M	Q_m	RMSE	MAXE	MINE
35	1.0000	0.01028	0.03855	-0.03854
30	0.9894	0.01177	0.03951	-0.03958
25	0.9346	0.01896	0.06029	-0.06028
22	0.8850	0.02464	0.06457	-0.06485
16	0.7409	0.03275	0.08448	-0.08507
12	0.6123	0.05464	0.91131	-0.19184

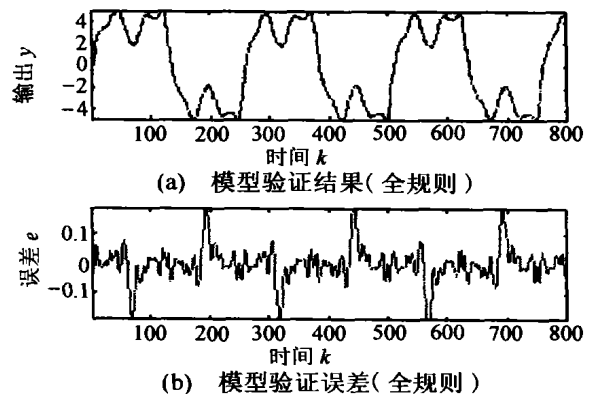


图3 精简模型验证
Fig. 3 Testing the reduced model

5 结论(Conclusion)

应用减法聚类 and SVD 算法对模糊逻辑系统的结构进行分析和优化,能够删除冗余模糊规则获得简洁合理的模糊结构,而且该算法概念清晰,方法简便.通过仿真验证,可以看出基于山峰函数的减法聚类在确定模糊模型初始结构和提高训练速度方面效果明显;SVD 算法在模糊规则累积贡献率和性能指标的指导下,模糊逻辑系统能够获得十分简洁有效的模糊结构.此混合结构优化策略为模糊逻辑系统的结构辨识提供了一种有效的途径.

参考文献(References):

- [1] WANG Lixin, MENDEL J M. Fuzzy basis function, universal approximation and orthogonal least squares learning [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(5): 807 - 814.
- [2] YEN J, WANG Liang. Applying statistical information criteria for optimal fuzzy model construction [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1998, 6(6): 362 - 372.
- [3] MENDEL J M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems* [M]. Englell-Wood, NJ: Prentice Hall, 2001.
- [4] YAGER R R, FILEV D P. Approximate clustering via the mountain method[J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1994, 24(8): 1274 - 1284.
- [5] GOLUB G H, VAN C F. *Matrix Computation* [M]. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 1989.
- [6] 王惠文. 偏最小二乘回归方法及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(WANG Huiwen. *Partial Least-Squares Regression Method and Application* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999.)
- [7] 王立新. 自适应模糊逻辑系统与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1996.
(WANG Lixin. *Adaptive Fuzzy Logic System and Control* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1996.)

作者简介:

祖家奎 (1974 —), 男, 现在南京航空航天大学超声电机研究中心从事博士后相关课题的研究. 主要研究方向为模糊控制, 神经网络, 工业自动化控制, 超声电机的驱动与控制等. E-mail: gao@xuzhou.net;

戴冠中 (1937 —), 男, 西北工业大学教授、博士生导师. 主要研究方向为复杂控制系统, 计算机控制与智能控制系统, 计算机网络, 信息安全等;

郭淳生 (1938 —), 男, 教授、博士生导师, 现任南京航空航天大学超声电机研究中心主任, 曾获国家科技进步三等奖、国家发明四等奖以及省、部级科技进步二等奖多项, 另有国家发明专利一项和实用新型专利二项. 目前主要从事压电超声电机的研究和应用;

卢京潮 (1957 —), 男, 教授. 主要研究方向为系统辨识, 现代控制理论, 工业自动化控制等.

(上接第 614 页)

- [12] YAN X G, WANG J C, LU X Y, et al. Decentralized output feedback robust stabilization for a class of nonlinear composite large-scale systems with similarity [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(2): 294 - 299.
- [13] YAN X G, DAI G Z. Decentralized output feedback robust control for nonlinear large-scale systems [J]. *Automatica*, 1998, 34(11): 1469 - 1472.
- [14] 陈兵, 张嗣瀛. 一类具有相似结构的组合大系统的鲁棒控制 [J]. 控制理论与应用, 1998, 15(2): 203 - 209.
(CHEN Bing, ZHANG Siying. Robust control of uncertain nonlinear interconnected systems with similar structure [J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(2): 203 - 209.)
- [15] 刘粉林, 刘媛, 王银河, 等. 基于状态观测器的非理想输入不确定组合大系统的输出反馈分散镇定 [J]. 控制理论与应用, 2001, 18(1): 21 - 25.
(LIU Fenlin, LIU Yuan, WANG Yinhe, et al. Based state observer decentralized output feedback stability of uncertainty composite systems with imperfect inputs [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 16(1): 21 - 25.)

作者简介:

王银河 (1962 —), 男, 教授. 1990 年毕业于四川师范大学数学系, 获理学硕士学位, 2000 年 3 月毕业于东北大学自动控制系统, 获工学博士学位, 2000 年 3 月入西北工业大学控制科学与技术博士后流动站做博士后研究工作. 感兴趣的研究方向: 复杂控制系统的结构分析和鲁棒控制, 自适应控制, 智能控制等. E-mail: yhwang@stu.edu.cn;

戴冠中 (1937 —), 男, 教授, 博士生导师. 感兴趣的研究方向: 网络环境下复杂系统控制与信息安全, 非线性系统的新型神经网络和模糊控制器设计等.