

极点配置固定滞后稳态 Kalman 平滑器

邓自立, 孙书利

(黑龙江大学 应用数学研究所, 黑龙江大学 自动化系, 哈尔滨 150080)

摘要: 基于稳态 Kalman 预报器和白噪声估计理论, 应用控制理论中的极点配置原理, 提出了极点配置固定滞后稳态 Kalman 平滑器. 它们不仅是全局渐近稳定的, 而且通过配置平滑器的极点可使初始平滑估值的影响按指数衰减迅速消失. 它们避免了计算最优初始平滑估值, 可减小计算负担. 一个雷达跟踪系统的仿真例子说明了其有效性.

关键词: 极点配置; 白噪声估值器; 固定滞后 Kalman 平滑器; Kalman 滤波方法

中图分类号: O211.64 **文献标识码:** A

Pole assignment fixed-lag steady-state Kalman smoothers

DENG Zi-li, SUN Shu-li

(Institute of Applied Mathematics and Department of Automation, Heilongjiang University, Heilongjiang Harbin 150080, China)

Abstract: Based on steady-state Kalman predictor and white noise estimation theory, using the pole assignment principle in control theory, the pole assignment fixed-lag steady-state Kalman smoothers were presented. Not only they were globally asymptotically stable, but also the effect of the initial smoothing estimate could fast be forgotten as exponentially decaying by assigning poles of smoothers. They avoided to compute the optimal initial smoothing estimates, so that the computational burden might be reduced. A simulation example for a radar tracking system shows their effectiveness.

Key words: pole assignment; white noise estimators; fixed-lag Kalman smoother; Kalman filtering method

1 引言(Introduction)

Kalman 平滑器广泛应用于通讯、信号处理等领域中. 文献[1]和[2]提出的最优固定滞后 Kalman 平滑器的缺点是要求计算最优初值, 从而增加了计算负担. 本文引入了稳态 Kalman 平滑器全局渐近稳定性新概念, 提出了一种具有全局渐近稳定性的极点配置固定滞后稳态 Kalman 平滑器, 避免了计算最优初值, 且通过配置 Kalman 平滑器的极点可快速消除平滑初值的影响. 考虑线性离散随机系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2)$$

其中状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 观测 $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^r$, $v(t) \in \mathbb{R}^m$, Φ, Γ, H 为适当维数的常阵.

假设 1 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是带零均值、方差阵各为 $Q > 0$ 和 $R > 0$ 的相互独立的白噪声.

假设 2 初始观测时刻 $t_0 = -\infty$.

假设 3 系统是完全可观、完全可控的.

问题是: 基于 $(y(t+N), y(t+N-1), \dots)$, 求固

定滞后稳态 Kalman 平滑器 $\hat{x}(t|t+N)$, $N > 0$ 固定.

2 引理(Lemma)

引理 1^[3] 对于系统(1), (2)在假设 1~3 下, 有稳态最优 Kalman 预报器

$$\hat{x}(t+1|t) = \Phi \hat{x}(t|t-1) + \Phi K \epsilon(t), \quad (3)$$

$$\epsilon(t) = y(t) - H \hat{x}(t|t-1), \quad (4)$$

$$K = \Sigma H^T Q_\epsilon^{-1}, \quad Q_\epsilon = H \Sigma H^T + R. \quad (5)$$

其中 T 为转置号, K 为稳态滤波增益阵, 预报误差方差阵 Σ 是如下 Riccati 方程的唯一正定解

$$\Sigma = \Phi [\Sigma - \Sigma H^T (H \Sigma H^T + R)^{-1} H \Sigma] \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T. \quad (6)$$

它可用迭代法求解^[3]. 新息 $\epsilon(t)$ 可由(3)和(4)任取初值 $\hat{x}(0|-1)$ 递推计算.

引理 2^[3] 对于系统(1), (2)在假设 1~3 下, 有稳态最优白噪声估值器

$$\hat{w}(t|t+N) = \hat{w}(t|t+N-1) + M_w(N) \epsilon(t+N) \quad (7)$$

带初值 $\hat{w}(t|t) = 0, N = 1, 2, \dots$. 估值器增益为

$$M_w(N) = Q\Gamma^T[(I_n - KH)^T\Phi^T]^{N-1}H^TQ_\epsilon^{-1}, \quad (8)$$

$$\hat{v}(t | t+N) = \hat{v}(t | t+N-1) + M_v(N)\epsilon(t+N), \quad (9)$$

带初值 $\hat{v}(t | t) = RQ_\epsilon^{-1}\epsilon(t)$, $N = 1, 2, \dots$, 估值器增益为

$$M_v(N) = -RK^T\Phi^T[(I_n - KH)^T\Phi^T]^{N-1}H^TQ_\epsilon^{-1}. \quad (10)$$

引理 3^[4] 若 (Φ, H) 为完全可观对, 则存在 $n \times m$ 阵 T_0 可任意配置 $\Phi + T_0H$ 的特征值.

引理 4^[2] 系统(1), (2)在假设 1~3 下, 有固定滞后稳态最优 Kalman 平滑器

$$\begin{aligned} \hat{x}(t | t+N) = & \Phi\hat{x}(t-1 | t-1+N) + \Gamma\hat{w}(t-1 | t-1+N) + \\ & K_N\epsilon(t+N), \end{aligned} \quad (11)$$

$$K_N = \Sigma[(I_n - KH)^T\Phi^T]^N H^T Q_\epsilon^{-1}. \quad (12)$$

3 极点配置固定滞后稳态最优 Kalman 平滑器 (Pole assignment fixed-lag steady-state optimal Kalman smoothers)

由式(3)和(4)看到, 稳态 Kalman 预报器 $\hat{x}(t+1 | t)$ 的计算仅与初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 有关. Kalman 滤波理论在系统可观和可控性假设下证明了它的渐近稳定性, 即 $\hat{x}(t+1 | t)$ 的计算渐近地与初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 选取无关. 但 Kalman 平滑器(11)的稳定性具有特殊性. 在计算上, 若从 $t_0 = 0$ 开始递推计算, 由式(4)看到 $\epsilon(t)$ 的值与初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 有关, 因而, 由(7), (9)两式可知 $\hat{w}(t | t+N)$ 和 $\hat{v}(t | t+N)$ 的值也与初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 有关. 从而由式(11) $\hat{x}(t | t+N)$ 的值与初值 $\hat{x}(0 | N)$ 和初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 两者有关, 于是引入如下全局渐近稳定的定义.

定义 若稳态 Kalman 平滑器 $\hat{x}(t | t+N)$ 的值渐近地与初值 $\hat{x}(0 | N)$ 和 $\hat{x}(0 | -1)$ 两者选取无关, 则称其为全局渐近稳定的.

定理 1 系统(1), (2)在假设 1~3 下, 若 Φ 是稳定矩阵, 则固定滞后稳态最优 Kalman 平滑器(11)是全局渐近稳定的.

证 参考文献[3], 从略.

定理 2 系统(1), (2)在假设 1~3 下, 若 Φ 是不稳定矩阵, 则有全局渐近稳定的极点配置稳态 Kalman 平滑器

$$\begin{aligned} \hat{x}(t | t+N) = & \Psi\hat{x}(t-1 | t-1+N) + \Gamma\hat{w}(t-1 | t-1+N) + \\ & K_N\epsilon(t+N) - T_0y(t-1) + T_0\hat{v}(t-1 | t-1+N). \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\Psi = \Phi + T_0H$, 可选 T_0 使 Ψ 为稳定矩阵, 且可

任意配置 Ψ 的特征值.

证 在式(2)两边取射影运算^[3]有

$$\begin{aligned} T_0y(t-1) = & \\ T_0H\hat{x}(t-1 | t-1+N) + T_0\hat{v}(t-1 | t-1+N). \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)与(11)相加得式(13). 由引理 3 可选取 T_0 使得 $\Psi = \Phi + T_0H$ 为稳定矩阵, 且可任意配置的特征值. 于是类似定理 1 可证明式(13)是全局渐近稳定的. 证毕.

注 已给初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 后, $\hat{x}(t+N) = \Gamma\hat{w}(t-1 | t-1+N) + K_N\epsilon(t+N) - T_0y(t-1) + T_0\hat{v}(t-1 | t-1+N)$ 是已知的. 为了考查初值 $\hat{x}(0 | N)$ 的影响, 则由式(13)可得 $\hat{x}(t | t+N)$ 的传递函数表达式

$$\hat{x}(t | t+N) = (I_n - q^{-1}\Psi)^{-1}z(t+N). \quad (15)$$

其中 q^{-1} 是单位滞后算子. 它的极点由 $\det(I_n - q^{-1}\Psi) = 0$ 的根决定, 而 $\det(I_n - q^{-1}\Psi) = q^{-n}\det(qI_n - \Psi)$, 因此, $\hat{x}(t | t+N)$ 的极点由 Ψ 的特征值决定. 配置 $\hat{x}(t | t+N)$ 的极点即配置 Ψ 的特征值.

定理 3 系统(1), (2)在假设 1~3 下, 在取初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 之后, 若极点配置 Kalman 平滑器(13)的转移阵 $\Psi = \Phi + T_0H$ 的特征值被配置为 n 个不同的绝对值小于 1 的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. 记 Ψ 的谱半径为 $\lambda_{\max} = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$, $0 < \lambda_{\max} < 1$, 则它的初始平滑估值 $\hat{x}(0 | N)$ 的影响将以 $\lambda_{\max}^t$ 的速率衰减趋于零, 即 $|\delta(t)| \leq c\lambda_{\max}^t$, c 为常数, $\delta(t) = \hat{x}(t | t+N) - \hat{x}_0(t | t+N)$, 其中最优平滑器 $\hat{x}_0(t | t+N)$ 在取初值 $\hat{x}(0 | -1)$ 后由下式计算,

$$\hat{x}_0(t | t+N) = \hat{x}(t | t-1) + \sum_{i=0}^N K_i\epsilon(t+i). \quad (16)$$

证 从略.

为了快速消除初始平滑估值的影响, 应配置 Ψ 的特征值靠近原点, 即 Ψ 的谱半径 $\lambda_{\max}$ 越小, 初值影响衰减越快.

4 仿真例子 (Simulation example)

考虑雷达跟踪系统^[3]

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad (17)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t) + v(t). \quad (18)$$

其中 T 为采样周期, 状态 $x(t) = [s(t), \dot{s}(t), \ddot{s}(t)]^T$, $s(t)$, $\dot{s}(t)$ 和 $\ddot{s}(t)$ 分别为运动目标(例如导弹、飞机、坦克等)在时刻 tT 的位置、速度和加速度,

$y(t)$ 是对位置 $s(t)$ 的观测信号, $v(t)$ 是观测噪声, ρ 是模型参数, $w(t)$ 和 $v(t)$ 是带零均值、方差阵各为 σ_w^2 和 σ_v^2 的独立高斯白噪声. 问题是求极点配置稳态 Kalman 跟踪平滑器 $\hat{x}(t|t+2)$.

在仿真中取 $T = 1, \sigma_w^2 = 1, \sigma_v^2 = 1, \rho = 0.8$, $x(0) = [0, 0, 0]^T$. 注意本例 Φ 是一个不稳定矩阵, 它有两个在单位圆上的特征值 1, 故应实行极点配置. 考虑极点配置 (即配置 Ψ 的特征值):

情形 1 Ψ 的特征值为 $\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = 0.2, \lambda_3 = 0.3$.

情形 2 Ψ 的特征值为 $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.85, \lambda_3 = 0.9$.

可验证系统是完全可观完全可控的.

任取 Kalman 预报器初值 $\hat{x}(0|-1) = [5, 2, 1]^T$ 后, 再任取 Kalman 平滑器初值 $\hat{x}(0|2) = [10, 10, 4]^T$, 用定理 2 对两种情形仿真结果如图 1~3 所示, 其中用实线表示真实状态 $x(t)$, 用短虚线和长虚线分别表示情形 1 和情形 2 的极点配置 Kalman 平滑器 $\hat{x}(t|t+2)$. 可看到在情形 1 下, Ψ 的特征值接近原点, 初始平滑估值 $\hat{x}(0|2)$ 的影响在几步之后就可忽略不计, 使 $\hat{x}(t|t+2)$ 跟踪真实状态 $x(t)$. 在情形 2 下, Ψ 的特征值接近单位圆周, 初值 $\hat{x}(0|2)$ 的影响经过一个缓慢的过渡过程才能消失.

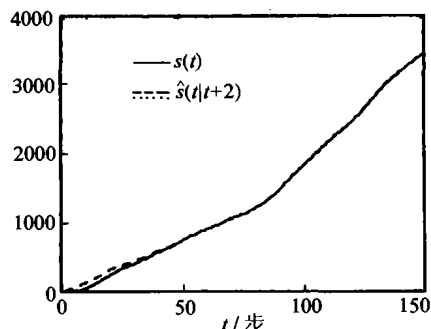


图 1 位置 $s(t)$ 和极点配置 Kalman 平滑器 $\hat{s}(t|t+2)$

Fig. 1 Position $s(t)$ and pole-assignment Kalman smoother $\hat{s}(t|t+2)$

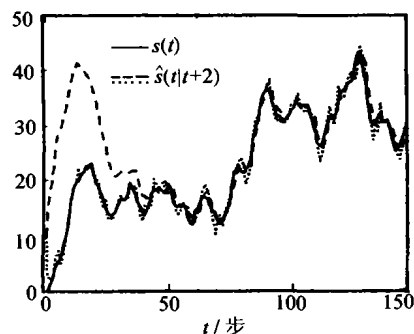


图 2 速度 $s(t)$ 和极点配置 Kalman 平滑器 $\hat{s}(t|t+2)$

Fig. 2 Velocity $s(t)$ and pole-assignment Kalman smoother $\hat{s}(t|t+2)$

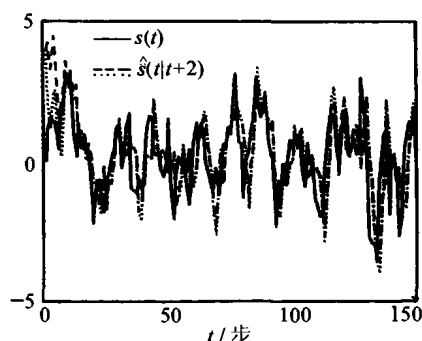


图 3 加速度 $s(t)$ 和极点配置 Kalman 平滑器 $\hat{s}(t|t+2)$

Fig. 2 Acceleration $s(t)$ and pole-assignment

Kalman smoother $\hat{s}(t|t+2)$

5 结论 (Conclusion)

本文基于稳态 Kalman 预报器和白噪声估值器, 应用极点配置的原理, 提出了一种极点配置稳态 Kalman 平滑器. 对不稳定系统, 可以通过极点配置保证 Kalman 平滑器具有全局渐近稳定性, 且可配置 $\Psi = \Phi + T_0 H$ 的特征值充分接近原点, 使平滑初值影响快速消失, 使极点配置 Kalman 平滑器快速逼近稳态最优平滑器. 可用 Ψ 的谱半径大小来控制平滑初值影响消失速率. 由于避免了最优初值的计算, 故可减小计算负担.

参考文献 (References):

- [1] MEDITCH J S. *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control* [M]. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [2] 孙书利, 邓自立. 一种新的带白噪声估值器的固定滞后 Kalman 平滑器 [J]. 信息与控制, 2002, 31(4): 366-340.
(SUN Shuli, DENG Zili. New fixed-lag Kalman smoothing with white noise estimators [J]. *Information and Control*, 2002, 31(4): 336-340.)
- [3] 邓自立. Kalman 滤波与 Wiener 滤波, 现代时间序列分析方法 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
(DENG Zili. *Kalman Filtering and Wiener Filtering, Modern Time Series Analysis Method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001.)
- [4] CHEN C T. *Linear System Theory and Design* [M]. New York: Holt Rinehart and Winston, 1984.

作者简介:

邓自立 (1938—), 男, 现为黑龙江大学自动化系教授, 主要研究方向为状态估计, 最优滤波, 信号处理等;

孙书利 (1971—), 男, 1996 年毕业于黑龙江大学数学系, 1999 年获该校控制理论与控制工程专业硕士学位, 现为哈尔滨工业大学在职博士生, 主要研究方向为 Wiener 滤波, Kalman 滤波等, E-mail: sunsl@hlju.edu.cn.