文章编号: 1000-8152(2003)04-0838-05

基于向量图分析的自适应滤波快速算法

谢胜利[1], 田森平[2], 柳书棠[1]

(1. 华南理工大学 无线电与自动控制研究所,广东 广州 510640; 2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院,广东 广州 510640)

摘要: 对自适应滤波算法进行了讨论,提出了基于向量图分析的快速算法.该方法与目前所有自适应滤波算法不同,将数学中的几何分析方法引入到自适应滤波的研究中,通过探讨最小均方(LMS)算法的向量图结构及其算法收敛的几何特征,在基于几何分析的基础上,寻找有效的快速算法.仿真结果表明了所获算法的有效性及优越性,从而为自适应滤波算法的研究开辟了另一条新的途径.

关键词: 自适应滤波; 向量图结构; 几何分析; 快速算法

中图分类号: TN912.3 **文献标识码**: A

Fast algorithms of adaptive filtering based on vector plots analysis

XIE Sheng-li[1], TIAN Sen-ping[2], LIU Shu-tang[1]

(1. Institute of Radio and Automatic Control, South China University of Technology, Guangdong Guangzhou 510640, China;
2. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangdong Guangzhou 510640, China)

Abstract: Adaptive filtering algorithms were discussed and a fast algorithm was proposed based on vector plots analysis, which was different from the present adaptive filtering algorithms. It applied the approaches of mathematical geometrical analysis into the study of adaptive filtering and tried to seek an effective and fast algorithm on the basis of geometrical analysis, through inquiring into vector plots structure of least mean squares (LMS) algorithm and geometrical feature of algorithm convergence. Numerical simulations indicate the efficiency and superiority of this new algorithm. Thus, a new approach is in prospect for the research of adaptive filtering algorithms.

Key words: adaptive filtering; vector plots structure; geometric analysis; fast algorithm

1 引言(Introduction)

在最近 10 年中,自适应滤波器已经广泛应用于干扰抵消、信道均衡、系统辨识及阵列处理等领域.在众多的自适应算法中,如 Widrow 和 Hoff 提出的著名的最小均方算法(LMS)以它的鲁棒性及复杂度低而成为算法实现中采用最多的算法.图 1 为自适应滤波器原理框图.

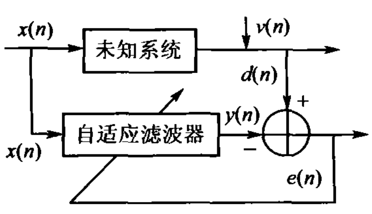

图 1 自适应滤波器原理框图

Fig. 1 Adaptive filtering diagram

基于最速下降法的最小均方误差(LMS)算法的迭代公式如下:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - x^{\mathrm{T}}(n)w(n), \\ w(n+1) &= w(n) + 2\mu e(n)x(n). \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $w(n)$ 为自适应滤波器在时刻 n 的权矢量, $x(n)$ 为时刻 n 的输入信号矢量, $d(n)$ 为期望输出值, $v(n)$ 为干扰信号, $e(n)$ 是误差信号, L 是自适应滤波器的长度, μ 是步长因子, LMS 算法的收敛条件为: $0 < \mu < 1/\lambda_{\max}$, $\lambda_{\max}$ 是输入信号自相关矩阵的最大特征值.

虽然 LMS 算法因其具有计算量小、易于实现等优点而被广泛采用,但是它有一个主要的缺点,其收敛速度依赖于输入信号的统计特征,信号的相关性使得算法的收敛速度降低.这一缺点导致人们研究旨在去除输入信号序列的相关性的改进算法以及其它各种加快收敛速度的快速算法,如 Ozeki 等人(1984)提出的仿射投影算法(APAS)[1]; Hoya 等人(1998)所提出的快速算法——弱 XLMS 算法[2]及文献[3~7]相应提出的改进算法.本文对此问题的研究将另辟途径,将数学中的几何分析方法引入到该问题的研究中,通过探讨 LMS 算法的向量图结构及其算法收敛的几何特征,而在几何分析的基础上寻

收稿日期: 2002-06-13; 收修改稿日期: 2002-11-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60172069).

找有效的快速算法.仿真结果表明所获新算法的有效性及优越性.从而为自适应滤波算法的研究开辟了另一条新的途径.

2　向量图分析(Analysis of vector plots)

针对 LMS 算法,为了寻求更好的新算法,下面将对 LMS 算法所构成的向量图进行分析.设 w^* 是滤波器系数 w_k 调整的最佳值.记 $\hat{w}_k = w_k - w^*$,则 LMS 算法(1)可写为

$$\hat{w}_{k+1} = \hat{w}_k + \mu e_k x_k. \tag{2}$$

其中为简单起见,将式(1)中的 2μ 记为 μ.

要使 $\hat{w}_k = w_k - w^* \to 0$(在给定收敛意义下),则只要使 $\|\hat{w}_k\| \to 0$(在相应收敛意义下),即在式(2)所确定的算法中,$\hat{w}_k$ 的长度 $\|\hat{w}_k\|$ 要逐渐减小.而由式(2)不难得到如图 2 所示向量图关系.

若还考虑向量 $\hat{w}_{k-1}$,则有如图 3 所示的几种几何关系.

这样图 2(a)对应图 3(a)和图 3(b),而图 2(b)对应图 3(c)至图 3(f).

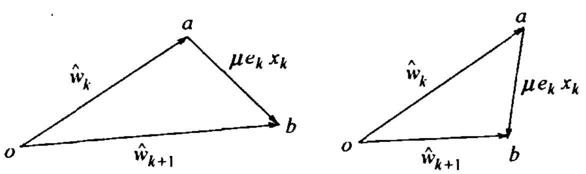

图 2　向量分析图

Fig. 2　Plots of vector analysis

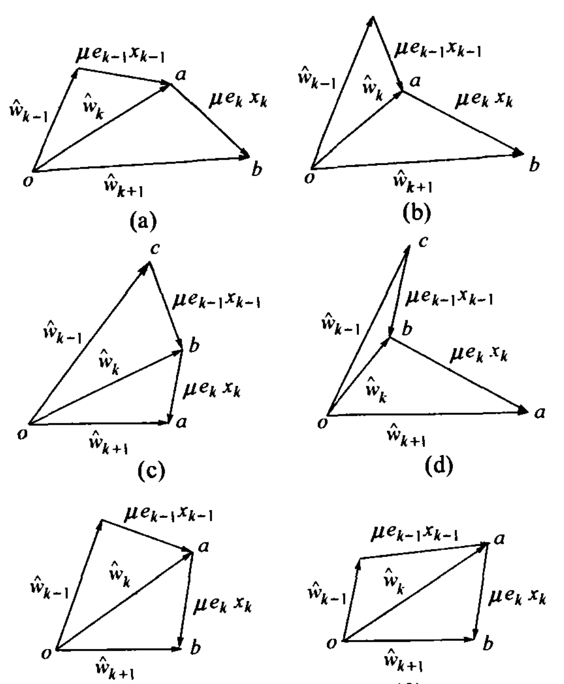

图 3　向量分析图

Fig. 3　Plots of vector analysis

为了获得有效的快速算法,下面将在对上图进行分析的基础上,寻找对 $\hat{w}_{k+1}$ 重新进行调整的方法.本文先讨论图 2(a)以及它所对应的图 3(a)和图 3(b).在图 2(a)中,过 $\hat{w}_k$ 的终点作 $\hat{w}_k$ 的垂线交 $\hat{w}_{k+1}$ 于点 c,则有 $\|\overrightarrow{oc}\| \leqslant \|\hat{w}_{k+1}(t)\|$,且 $\|\overrightarrow{oc}\| > \|\hat{w}_k(t)\|$(见图 4).再过 a 点作线段 $\overrightarrow{ad}$ 交 $\overrightarrow{ob}$ 于 d 点,只有 $\overrightarrow{oa}$ 与 $\overrightarrow{ad}$ 的夹角小于 90°,则 $\|\overrightarrow{od}\|$ 才有可能小于 $\|\hat{w}_k(t)\|$(见图 5).记 $\overrightarrow{ad} = \hat{e}_k$,并取 $\hat{w}^*_{k+1} = \overrightarrow{od}$ 来调整 $\hat{w}_{k+1}$,则对应的算法

$$\hat{u}^*_{k+1} = \hat{u}_k + \hat{e}_k,\ k = 1,2,3,\cdots \tag{3}$$

满足条件 $\|\hat{w}^*_{k+1}\| < \|\hat{w}_k\|$.

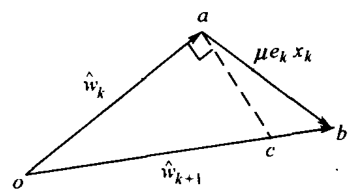

图 4　向量分析图

Fig. 4　Plots of vector analysis

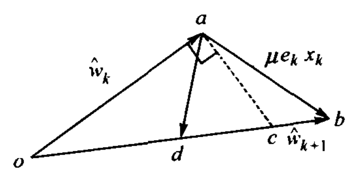

图 5　向量分析图

Fig. 5　Plots of vector analysis

现在的问题是,如何确定 $\hat{e}_k$ 使得 $\overrightarrow{oa}$ 与 $\overrightarrow{ad}$ 的夹角 β 小于 90°.因为有 $\hat{w}_k = \hat{w}_{k-1} + \mu e_{k-1} x_{k-1}$,下面本文将利用 $\hat{w}_{k-1}$ 的信息来寻找这种关系.先看图 3(a)的情形,此时对应的图为图 6,选取 $\overrightarrow{ad}$ 垂直于 $\mu e_{k-1} x_{k-1}$,只要 $\angle\alpha > 0$,则有 $\angle\beta < 90°$,从而只要选择 $\hat{e}_k$ 使得它垂直于 $\mu e_{k-1} x_{k-1}$ 即可.显然

$$\hat{e}_k = \mu e_k x_k - \frac{(\mu e_{k-1} x_{k-1})^{\mathrm{T}} \mu e_k x_k}{\|\mu e_{k-1} x_{k-1}\|^2} \mu e_{k-1} x_{k-1} \tag{4}$$

垂直于 $\mu e_{k-1} x_{k-1}$.

于是当 $\|\hat{w}_{k-1}\| < \|\hat{w}_k\|$ 时,即可得一种新的算法结构

$$w_{k+1} = w_k + \hat{e}_k = \\ w_k + \mu\left(e_k x_k - \frac{(e_{k-1} x_{k-1})^{\mathrm{T}} e_k x_k}{\|e_{k-1} x_{k-1}\|^2} e_{k-1} x_{k-1}\right),\ k = 1,2,3,\cdots. \tag{5}$$

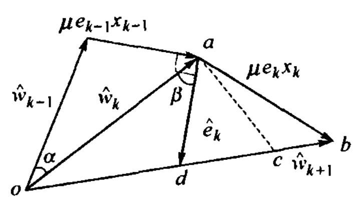

图 6　向量分析图

Fig. 6　Plots of vector analysis

现在再考虑图2(a)所对应的另一种情形,即图3(b)的情形.在这种情况下,再作 $\mu e_{k-1}x_{k-1}$ 的垂线,则达不到减小 $\|\hat{w}_{k+1}\|$ 的目标.此时将过 a 点作 $\mu e_k x_k$ 的垂线交 $\overrightarrow{ob}$ 于 d 点,见图7.记 $\overrightarrow{ad} = \hat{e}_k$,则有 $\|\overrightarrow{od}\| < \|\hat{w}_{k+1}\|$,且 $\overrightarrow{od} = \hat{w}_k + \hat{e}_k$,,其中要求 $\hat{e}_k \perp \mu e_k x_k$. 经考验

$$\hat{e}_k = \mu e_k x_k - \frac{\|\mu e_k x_k\|^2}{(\mu e_k x_k)^{\mathrm{T}} \mu e_{k-1} x_{k-1}} \mu e_{k-1} x_{k-1} \quad (6)$$

垂直于 $\mu e_k x_k$.

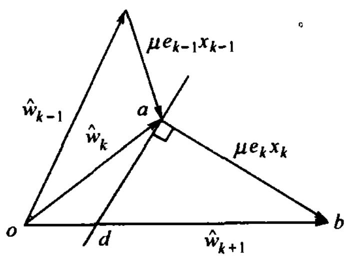

图7 向量分析图

Fig. 7 Plots of vector analysis

从而当 $\|\hat{w}_{k-1}\| \geqslant \|\hat{w}_k\|$ 时,又可得一种算法结构

$$w_{k+1} = w_k + \hat{e}_k =$$

$$w_k + \mu\left(e_k x_k - \frac{\|e_k x_k\|^2}{(e_k x_k)^{\mathrm{T}} e_{k-1} x_{k-1}} e_{k-1} x_{k-1}\right),\ k = 1,2,3,\cdots. \quad (7)$$

总之,在图2(a)的情况下,可得一种初步的算法结构,即当 $\|w_k + \mu e_k x_k\| > \|w_k\|$ 时,

$$w_{k+1} = \begin{cases} w_k + \mu\left(e_k x_k - \dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm{T}} e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2} e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad\qquad \|\hat{w}_{k-1}\| < \|\hat{w}_k\|; \\ w_k + \mu\left(e_k x_k - \dfrac{\|e_k x_k\|^2}{(e_k x_k)^{\mathrm{T}} e_{k-1}x_{k-1}} e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad\qquad \|\hat{w}_{k-1}\| \geqslant \|\hat{w}_k\|, \\ k = 1,2,3,\cdots. \end{cases} \quad (8)$$

下面,本文再考虑图2(b)所对应的情形.先看 $\|\hat{w}_{k-1}\| > \|\hat{w}_k\|$ 的情形,即图3(c)和图3(d).在图3(c)中,过 a 点作 $\mu e_{k-1}x_{k-1}$ 的垂线交 $\hat{w}_{k+1}$ 于 d 点,见图8.同前理,取 $\overrightarrow{ad} = \hat{e}_k$,则有 $\|\overrightarrow{od}\| < \|\hat{w}_{k+1}\|$,且 $\overrightarrow{od} = \hat{w}_k + \hat{e}_k$,其中要求 $\hat{e}_k \perp \mu e_{k-1}x_{k-1}$. 仍取 $\hat{e}_k$ 为(4)的形式,此时对应的算法结构为

$$w_{k+1} =$$

$$w_k + \mu\left(e_k x_k - \frac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm{T}} e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2} e_{k-1}x_{k-1}\right),\ k = 1,2,3,\cdots. \quad (9)$$

而对于图3(d),就保持老算法结构不变,即

$$w_{k+1} = w_k + \mu e_k x_k,\ k = 1,2,3,\cdots. \quad (10)$$

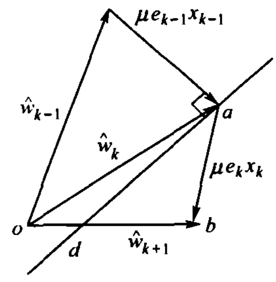

图8 向量分析图

Fig. 8 Plots of vector analysis

最后,本文再考虑图3(e)和图3(f)的情形.对图3(e),同前类似,过 a 点作 $\mu e_{k-1}x_{k-1}$ 的垂线交于 d 点,见图9.同前理,可选取相应的算法结构为

$$w_{k+1} = w_k + \mu\left(e_k x_k - \frac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm{T}} e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2} e_{k-1}x_{k-1}\right). \quad (11)$$

而对于图3(f),仍保持老算法结构不变,即

$$w_{k+1} = w_k + \mu e_k x_k,\ k = 1,2,3,\cdots. \quad (12)$$

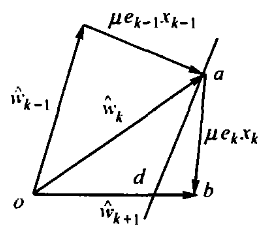

图9 向量分析图

Fig. 9 Plots of vector analysis

综合以上四种情况,在图2(b)的情况之下,得到初步的算法结构,即当 $\|w_k + \mu e_k x_k\| \leqslant \|w_k\|$ 时,

$$w_{k+1} =$$

$$w_k + \mu\left(e_k x_k - \frac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm{T}} e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2} e_{k-1}x_{k-1}\right),\ k = 1,2,3,\cdots. \quad (13)$$

其中,$\sigma = 0,1$.

以便更好的描述图3(e)与图3(f)相互的转换过程,扩大 σ 的范围使之有 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

3 新算法的结构(Structure of new algorithm)

从上节对LMS算法向量图的分析,要加快算法的收敛性,本文初步获得了在不同情况下的新算法结构,即

当 $\|w_k + \mu e_k x_k\| > \|w_k\|$ 时,

$$w_{k+1} =$$

$$\begin{cases} w_k+\mu\left(e_k x_k-\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad \|\hat w_{k-1}\| < \|\hat w_k\|; \\ w_k+\mu\left(e_k x_k-\dfrac{\|e_k x_k\|^2}{(e_k x_k)^{\mathrm T}e_{k-1}x_{k-1}}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad \|\hat w_{k-1}\| \geqslant \|\hat w_k\|, \\ k=1,2,3,\cdots. \end{cases} \tag{14}$$

当 $\|w_k+\mu e_k x_k\| \leqslant \|w_k\|$ 时,

$$\begin{cases} w_{k+1}= \\ w_k+\mu\left(e_k x_k-\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ k=1,2,3,\cdots. \end{cases} \tag{15}$$

其中 $0\leqslant\sigma\leqslant1$.

为了综合和简化算法结构,在结构(14)中也引入 σ 因子,即当 $\|w_k+\mu e_k x_k\| > \|w_k\|$ 时,

$$w_{k+1}= \begin{cases} w_k+\mu\left(e_k x_k-\sigma\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad \|\hat w_{k-1}\| < \|\hat w_k\|, \\ w_k+\mu\left(e_k x_k-\sigma\dfrac{\|e_k x_k\|^2}{(e_k x_k)^{\mathrm T}e_{k-1}x_{k-1}}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad \|\hat w_{k-1}\| \geqslant \|\hat w_k\|. \end{cases} \tag{16}$$

其中, $\sigma\in[0,1]$.

在式(16)的第二个等式中,令

$$\sigma = h\frac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_k x_k\|^2\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}, \tag{17}$$

因为

$$(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k\leqslant \|e_k x_k\|^2\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2, \tag{18}$$

则有 $\sigma\leqslant h$,从而只要 $h\in[0,1]$,则有 $\sigma\in[0,1]$. 将式(17)代入式(16)有

$$w_{k+1}= \begin{cases} w_k+\mu\left(e_k x_k-\sigma\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad \|\hat w_{k-1}\| < \|\hat w_k\|, \\ w_k+\mu\left(e_k x_k-h\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \qquad \|\hat w_{k-1}\| \geqslant \|\hat w_k\|. \end{cases} \tag{19}$$

由于 σ,h 均是[0,1]中待选的参数,故式(19)可合并为

$$\begin{cases} w_{k+1}=w_k+\mu\left(e_k x_k-\sigma\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ \|\hat w_k+\mu e_k x_k\| > \|\hat w_k\|. \end{cases} \tag{20}$$

最后综合式(15)和式(20),本文获得了一种总体的新的算法结构

$$\begin{cases} w_{k+1}=w_k+\mu\left(e_k x_k-\sigma\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}\right), \\ k=1,2,3.\cdots. \end{cases} \tag{21}$$

其中, $\sigma\in[0,1]$ 是一个待选定的参数.

算法(21)的结构形式是结合了迭代过程中各种不同情况而得到的,参数 σ 的不同取值对应着迭代过程中的不同情况. 而在迭代中各种情况也可能在交替进行,从而 σ 在学习过程中应是个变数;且应随学习过程的收敛而自适应的进行调整,本文选取

$$\sigma=\alpha(1-\mathrm e^{-\beta\|e_k\|}). \tag{22}$$

其中, $(\alpha,\beta)\in(0,1)\times[0,+\infty)$ 为可调节常数,他们决定着自适应因子 σ 随误差变化的幅度.

综上所述,本文可获得具有自适应调节因子的新的滤波算法

$$\begin{cases} w_{k+1}=w_k+\mu(e_k x_k-\alpha(1- \\ \qquad \mathrm e^{-\beta\|e_k\|})\dfrac{(e_{k-1}x_{k-1})^{\mathrm T}e_k x_k}{\|e_{k-1}x_{k-1}\|^2}e_{k-1}x_{k-1}), \\ k=1,2,3,\cdots. \end{cases} \tag{23}$$

4 数值仿真比较(Comparison by numerical simulations)

下面通过计算机仿真来说明由几何分析所得的新算法优于通常的算法,采用的计算机模拟仿真条件为

1) 自适应滤波阶数 $L=4$;

2) 未知系统的 FIR 系数为 $w^*=[9,0.9,0.385,-0.771]^{\mathrm T}$;

3) 参考输入信号 $x(n)$ 是零均值,方差为1的高斯白噪声.

图10至图13是在不同参数组取值情况下,即 $(\mu,\beta,\alpha,L)=(0.03,1,0.55,4)$; $(0.05,0.7,0.1,4)$; $(0.07,0.9,0.3,4)$; $(0.15,0.4,0.4,4)$, 两种算法收敛曲线的比较. 从图10至图13可清楚地看出,基于几何分析所得出的新算法的收敛速度优于通常算法.

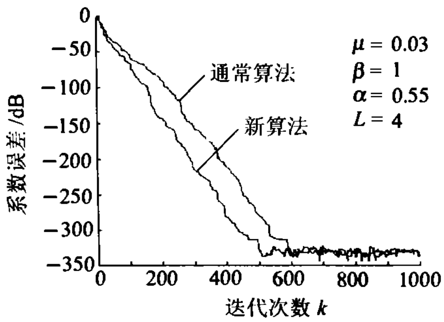

图 10 新算法与 LMS 算法收敛曲线比较
Fig. 10 Compare new algorithm with LMS algorithm

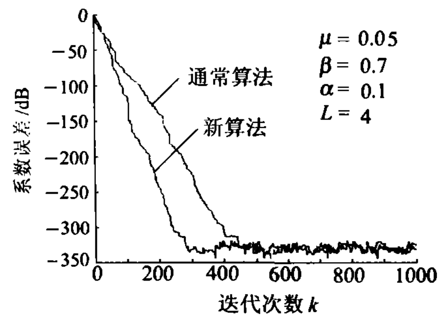

图 11 新算法与 LMS 算法收敛曲线比较
Fig. 11 Compare new algorithm with LMS algorithm

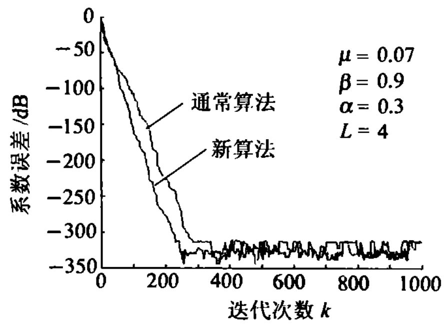

图 12 新算法与 LMS 算法收敛曲线比较
Fig. 12 Compare new algorithm with LMS algorithm

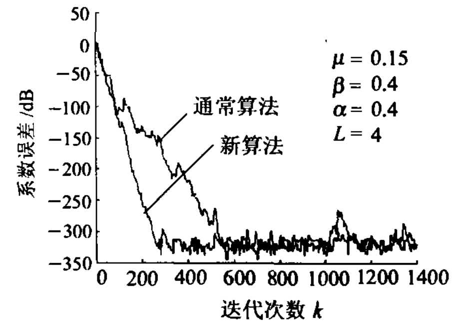

图 13 新算法与 LMS 算法收敛曲线比较
Fig. 13 Compare new algorithm with LMS algorithm

5 结束语(Conclusions)

本文通过探讨 LMS 算法的向量图结构及其算法收敛的几何特征,在基于几何分析的基础上,对自适应滤波算法进行了讨论,并提出了相应的与目前所有自适应滤波算法结构不同的快速滤波算法.仿真结果表明了所获得算法的有效性及优越性,从而为自适应滤波探索出了一条全新的途径.

参考文献(References):

[1] OZEKI K, UMEDA T. An adaptive filtering using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties [J]. *Electronics and Communications*, 1984,67(2):126 - 132 (in Japanese).

[2] HOYA T, LOKE Y, CHAMBERS J A, et al. Application of the leaky extended LMS(XLMS) algorithm in stereophonic acoustic echo cancellation [J]. *Signal Processing*, 1998,64(1):87 - 91.

[3] DOUGLAS S C. Performance comparison of two implementations of the Leaky LMS adaptive filter [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*,1997,45(8):2125 - 2129.

[4] WU G B, ZHU J Z. A LMS adaptive filtering algorithm with variable step size [J]. *Acta Electronica Sinica*, 1994,22(1):55 - 60.

[5] QIN J F, OU'YANG J Z. A novel variable step size LMS adaptive filtering algorithm based on sigmoid function [J]. *J of Data Acquisition & Processing*, 1997, 12(3):171 - 194.

[6] GAO Ying, XIE Shengli. A variable step size LMS adaptive filtering algorithm and its analysis [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(8):1094 - 1363.

[7] ZHOU Yuanjian, XIE Shengli. An adaptive filtering algorithm with rotating factor for multi channel echo cancellation [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(10):1360 - 1363.

作者简介:

谢胜利 (1958 —),男,华南理工大学无线电与自动控制研究所教授,博士生导师,IEEE 高级会员.出版学术专著(国家"九五"重点图书)1 部,发表学术论文 70 多篇,4 次获得省部级科技奖励.主要研究方向为非线性系统学习控制,机器人系统,自适应多路回波消除,盲信号处理以及图像处理等.Email: adshlxie@scut.edu.cn;

田森平 (1961 —),男,1988 年在华中师范大学获硕士学位,1999 年在华南理工大学获博士学位,现为华南理工大学自动化系副教授.于微分方程定性和稳定性理论、迭代学习控制算法与计算机仿真等方面发表了近 20 篇论文.目前感兴趣的研究方向是非线性系统的迭代学习控制理论与算法;

柳书棠 (1962 —),男,副教授,华南理工大学工学博士,现为华南理工大学电子信息学院副教授.在非线性系统迭代学习控制、自适应信号处理、混沌与保密通讯等方面发表论文 20 多篇.目前感兴趣的领域是自适应滤波理论及图像无线传输.