

基于多车道交通流动态离散模型的递阶优化控制问题与算法

谭满春

(暨南大学 信息科学技术学院, 广东 广州 510632)

摘要: 建立了一个基于多车道动态离散交通流模型的高速公路入口匝道流量优化控制模型. 为了降低优化控制问题求解的复杂程度, 把它分解为两层递阶控制问题. 讨论了两层求解的算法, 并给出了算例及仿真结果.

关键词: 自动化公路系统; 高速公路; 动态离散模型; 优化控制; 算法

中图分类号: O221; U491 **文献标识码:** A

Hierarchical optimal control problem and its algorithm based on traffic flow discrete model in multilane freeway

TAN Man-chun

(College of Information Science and Technology, Jinan University, Guangdong Guangzhou 510632, China)

Abstract: An optimal control model of on-ramp metering was constructed, which was based on the dynamic discrete traffic flow model in multilane freeway. In order to reduce the complexity, the control problem was decomposed to a bilevel hierarchical control problem. Its algorithm and an example of simulation were also presented.

Key words: automated highway system; freeway; dynamic discrete model; optimal control; algorithm

1 引言(Introduction)

自动化公路系统(automated highway system, AHS)中车辆自动驾驶是智能运输系统(ITS)研究中的一个重要课题. 车辆自动驾驶涉及交通、计算机、电子通讯技术等广泛的领域, 由于它的复杂性, 所以目前对它的研究不是针对一般路网的车辆而是主要集中在高速公路的车辆自动驾驶. 多车道高速公路交通流的建模是车辆自动驾驶的理论基础. 文[1]中提出了一个包含多车道的高速公路交通流动态离散模型(为了叙述的方便、简捷, 下面用模型(DM)表示它). 模型(DM)主要由以下关于交通密度、流量和平均速度的动态方程组成:

$$\begin{aligned} \rho^s(t+1, i, l) = & \rho^s(t, i, l) + \frac{T}{L_i} [q^s(t, \phi(i, l)) - \\ & q^s(t, i, l) + u^s(t, i, l) - e^s(t, i, l)] + \\ & \sum_{y \in C_i} \eta_{yi}^s(t, i) \rho^s(t, i, y) - \sum_{y \in C_i} \eta_{iy}^s(t, i) \rho^s(t, i, l), \end{aligned} \quad (1)$$

$$v(t, i, l) = v_f b_i \exp \left[-0.5 \left(\frac{\rho(t, i, l)}{\rho_{cr}} \right)^2 \right], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} q(t, i) = & \alpha(\rho(t, i+1))\rho(t, i)v(t, i) + \\ & (1-\alpha(\rho(t, i+1)))\rho(t, i+1)v(t, i+1). \end{aligned} \quad (3)$$

其中各变量的意义及模型(DM)的约束条件参看文[1]或附录. 该模型中既考虑了车辆更换车道这一现实, 也考虑了车辆的起讫(OD)点. 文献[2,3]中考虑的是高速公路上只有一条车道的情况. 文献[4]中考虑了车辆改道现象, 但没有考虑车辆的起讫(OD)点. 分析表明文[2~4]中的交通流模型都可以看成模型(DM)的特殊情形. 在理论上模型(DM)推广了其他一些已知模型, 更能模拟多车道交通流. 因为模型中变量繁多, 所以如何把它运用于实际交通管理与控制是一个值得探索的课题. 本文将该模型应用于高速公路的入口匝道流量调节, 建立优化控制模型, 并讨论其算法.

2 多车道高速公路交通流优化控制模型 (Traffic flow optimal control model in multilane freeway)

高速公路的交通控制中要考虑的因素是行程时间、服务流量、入口匝道等待时间, 即:

1) 行程时间最小

$$\min J_1 = \sum_{i \in A_h} \sum_{l \in C_i} L_i \rho(t, i, l) T.$$

2) 服务流量最大

$$\max J_2 = \sum_{i \in A_h} \sum_{l \in C_i} L_i \rho(t, i, l) v(t, i, l) T.$$

3) 入口匝道等待时间最小

$$\min J_3 = \sum_{r \in S} \sum_{s \in S_i \in A_h} w^{rs}(t, i) T.$$

所以控制目标 J 常常可以选择以上三个指标中的一个或者是它们的加权和:

$$\min J = \beta_1 J_1 - \beta_2 J_2 + \beta_3 J_3. \quad (4)$$

其中 $\beta_i (i = 1, 2, 3)$ 是非负的加权系数, 满足 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$.

高速公路最优控制问题(P1)描述为: 已知初始状态 $\rho(0, i, l), v(0, i, l)$, 并实测到高速公路首末两端的状态(密度、速度)序列以及匝道需求量序列 $d^r(t, i)$. 在满足模型(DM)中的交通流方程及约束条件下, 求一控制序列 $u^r(t, i), \eta_{yl}^r(t, i)$ 和 $e^r(t, i)$, 使式(4)中目标函数 J 取最小值.

显然问题(P1)是一个非线性数学规划. 其解通常不是唯一的, 因为所有的控制变量 $u^r(t, i), \eta_{yl}^r(t, i)$ 和 $e^r(t, i)$ 比约束方程或不等式的个数要多.

3 递阶控制问题的算法 (Algorithm to hierarchical control problem)

直接求解优化问题(P1)是很复杂的, 把它分解为递阶控制问题(如图1), 可以降低优化问题求解的复杂程度. 上层(又叫协调层)不考虑车辆改道情况, 根据目前的交通状态及交通需求确定各入口匝道的调节率. 下层(又叫路段层)根据上层给定的入口匝道流量, 以及给定的车道交通分配策略, 确定本路段车辆改道率.

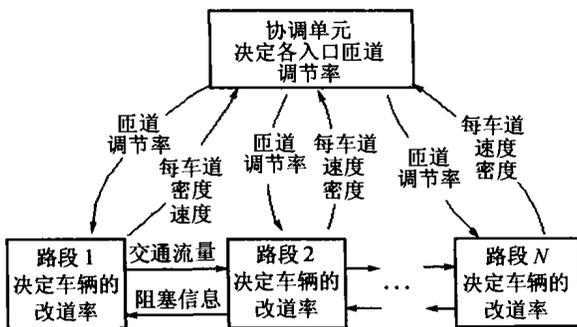


图1 双层优化控制结构

Fig. 1 Structure of bilevel optimal control

下面分别讨论上下层控制问题的算法.

1) 上层(协调层)控制问题.

在这一层中, 不考虑车辆的改道情况, 只考虑各路段车辆的平均密度、速度、流量. 这相当于把多车道的高速公路当成单车道来处理.

令

$$\rho^{rs}(t, i) = \sum_{l \in C_i} \rho^{rs}(t, i, l),$$

$$q^{rs}(t, i) = \sum_{l \in C_i} q^{rs}(t, i, l),$$

不考虑下游阻塞交通对上游的影响, 这时模型(DM)可以简化为:

$$\rho^{rs}(t+1, i) = \rho^{rs}(t, i) + \frac{T}{L_i} [h^{rs}(t, i) - g^{rs}(t, i)], \quad (5)$$

$$v(t, i) = v_f b_i \exp [-0.5 (\frac{\rho(t, i)}{n_i \rho_{cr}})^2], \quad (6)$$

$$q(t, i) = \rho(t, i) v(t, i). \quad (7)$$

式(5)中路段 i 的流入交通量 $h^{rs}(t, i)$ 来自路段的上游或者入口匝道, 流出交通量 $g^{rs}(t, i)$ 或者流入路段的下游或者由出口匝道驶出.

上层(协调层)控制问题(P2)描述为: 已知初始状态 $\rho(0, i), v(0, i)$, 及高速公路首末两端的状态(密度、速度)序列以及匝道需求量序列 $d^r(t, i)$. 在满足交通流方程(5)~(7)及模型(DM)的各约束条件下, 求一控制序列 $u^r(t, i)$ 和 $e^r(t, i)$, 使式(4)中目标函数 J 取最小值.

问题(P2)是一个非线性规划问题. 如果取消速度约束(3), 模型中的速度都用一个估计值代替, 这时问题(P2)就简化成为一个线性规划问题(P3). 所以问题(P2)可以用下面的迭代法求解.

用 $X = (u^r(t, i), \rho^{rs}(t, i), h^{rs}(t, i), g^{rs}(t, i))$ 表示路段的变量集合.

步骤1 初始化. 找一个初始可行解

$$X^0(t) = \{u^0(t), \rho^0(t), h^0(t), g^0(t)\},$$

外层计数器 $n = 0$.

步骤2 根据式(6)寻找一个路段平均速度 $v_i^{(n)}(t)$ 的估计值. 内层计数器 $m = 0$.

步骤2.1 寻找下降方向

$Y^{(m)}(t) = \{u^{(m)}(t), \rho^{(m)}(t), h^{(m)}(t), g^{(m)}(t)\}$. 根据路段平均速度的估计值 $v_i^{(n)}(t)$, 求解下层线性规划问题:

$$\min \nabla J(X^{(m)}) Y^{(m)},$$

s.t. 式(2)~(4), 模型(DM)中各约束条件.

步骤2.2 用可接受步长法^[5]寻找步长 $\lambda^{(m)}$.

步骤 2.3 更新解 $X^{(m+1)} = X^{(m)} + \lambda^{(m)} Y^{(m)}$.

步骤 2.4 内层迭代收敛性检测. 如果 $X^{(m+1)} \approx X^{(m)}$, 转向步骤 3; 否则, $m = m + 1$, 转向步骤 2.1.

步骤 3 外层迭代收敛性检测. 如果 $v_i^{(n+1)}(t) \approx v_i^{(n)}(t)$ 则程序终止, 当前解是优化解. 否则, $n = n + 1$, 并转向步骤 2.

2) 下层(路段层)控制问题.

对于每一路段, 根据上层给定的入口匝道流量, 确定本路段车辆改道率. 在这一层里如何合理分配各类车辆到适当的车道, 要充分考虑 OD 相同车辆是否刚刚进入主线, 是否将驶离主线等具体情况, 其算法与分配原则有关. 与通常的在一个路网中来考虑交通分配问题不同, 这里要考虑在同一路段中的交通分配问题, 这是自动化公路系统(AHS)要研究的核心问题之一.

为了方便描述高速公路的交通流状态, 将高速公路划分成本文的理想路段. 每一理想路段(以下就简称为路段)上至多与一个入口匝道或一个出口匝道相连, 入口匝道都在这一路段的起点处, 出口匝道都在这一路段的终点处(如图 2); 同一路段上车道数目相同且各车道长度基本相等. 对每路段的车道, 由内侧向外编号.

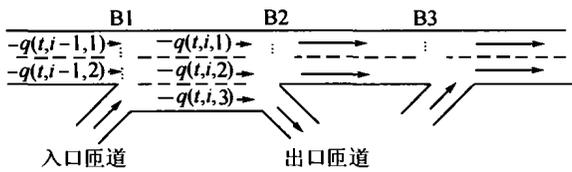


图 2 高速公路的分段

Fig. 2 Segment of freeway

为了建立路段层控制问题, 假设车辆在路段交界处(如 B1, B2, B3)不发生换道现象; 刚由入口匝道汇入主线的车辆在第一路段内不马上换道; 在任一理想路段内, 车辆至多换道一次. 控制目标是使在同一路段内各车道的车辆密度相等, 即

$$\rho^{rs}(t, i, l) = \frac{1}{n_i} \rho^{rs}(t, i).$$

由于车辆在路段交界处不发生换道现象, 即车辆的换道应该在路段中进行, 那么 $q^s(t, \phi(i, l)) = q^s(t, i - 1, l)$. 对每路段的车道, 由内侧向外编号, 这样可以保证车辆在跨越路段时所在车道顺序不变.

因为由入口匝道汇入主线的车辆在第一路段内不马上换道, 在任一理想路段内, 车辆至多换道一次, 密度动态方程变成:

$$\rho^{rs}(t + 1, i, l) =$$

$$\rho^{rs}(t, i, l) + \frac{T}{L_i} [q^{rs}(t, i - 1, l) - q^{rs}(t, i, l) + u^{rs}(t, i, l) - e^{rs}(t, i, l)] + \sum_{y \in C_i} \eta_{yl}^{rs}(t, i) \rho^{rs}(t, i, y) - \sum_{y \in C_i} \eta_{ly}^{rs}(t, i) \rho^{rs}(t, i, l).$$

其中

$$u^{rs}(t, i, l) = \begin{cases} u^{rs}(t, i), & l = n_i, \\ 0, & l \neq n_i, \end{cases}$$

$$e^{rs}(t, i, l) = \begin{cases} e^{rs}(t, i), & l = n_i, \\ 0, & l \neq n_i. \end{cases}$$

由于在协调层已经求出 $\rho^{rs}(t, i)$, $u^{rs}(t, i)$ 和 $e^{rs}(t, i)$, 所以路段层的控制问题就已经转换成求解一个多元一次方程组, 且未知数 $\eta_{yl}^{rs}(t, i)$ 通常多于方程的个数. 这说明它一定有解, 且解不唯一. 因此可以选择适当的解使车辆的改道现象尽可能少.

前面假设了同一路段中各车道车辆密度相等, 路段层的控制问题就变得比较容易求解. 如果取消这一假设, 该控制问题将变得更复杂些, 这是有待进一步研究的问题.

4 算例(Example)

假定一段长度为 40 km 的单向多车道高速公路路段, 并按每段 10 km 分成 4 小段, 第 2, 3 段包含入口匝道(见图 3). 路段 1, 2 均含 2 条车道, 路段 3, 4 均含 4 条车道. 由于各路段车辆都由路段 4 的下游驶出, 故本算例中可以不考虑车辆的 OD.

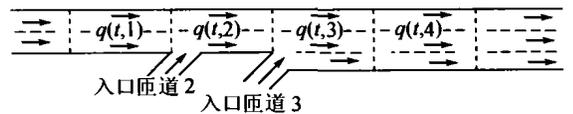


图 3 路段与车道示意图

Fig. 3 Segments and lanes in freeway

假设车辆在由路段 $(i - 1, l)$ 到路段 (i, l) 时不改变车道, 这时模型(DM)中路段车辆守恒方程就可以简化成为

$$\rho(t + 1, i, l) = \rho(t, i, l) + \frac{T}{L_i} [q(t, i - 1, l) - q(t, i, l)] + \frac{T}{L_i} [u(t, i, l) - e(t, i, l)] + \frac{T}{L_i} \sum_{y \in C_i} \eta_{yl}(t, i) q(t, i, y) - \frac{T}{L_i} \sum_{y \in C_i} \eta_{ly}(t, i) q(t, i, l),$$

且

$$e(t, i, l) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

设各车道自由车速 $v_f = 90 \text{ km/h}$, 临界密度 $\rho_{cr} = 37.3 \text{ veh}/(\text{km} \cdot \text{lane})$, 采样周期 $T = 5 \text{ min}$, 入口匝道 2、3 的交通需求均为 1200 veh/h , 各路段(车道)的初始密度是

$$\begin{aligned} \rho(0, i, l) &= 20, \quad i = 1, 3, 4, \quad l \in C_i, \\ \rho(0, i, l) &= 30, \quad i = 2, \quad l \in C_2. \end{aligned}$$

初始速度由式(6)确定.

在满足模型(DM)中交通流方程和通行能力约束条件下, 求一控制序列 $u(t, 2), u(t, 3)$ 和 $\eta_{yl}(t, i)$, 使目标函数 $J_3 = \sum_{i \in A_h} w(t, i) T$ 取最小值.

因篇幅所限, 只列出了部分仿真结果(见表 1 和图 4). 表 1 给出了有代表性的前 7 个时间段内的入口匝道调节率, 图 4 则给出了前 35 个时间段内各路段平均密度与时间的关系.

表 1 前 7 个时间段内的入口匝道调节率

Table 1 On-ramp metering in 7 time interval

t	1	2	3	4	5	6	7
$u(t, 2)$	1200	1200	1200	1200	1200	1128	954
$u(t, 3)$	1200	1200	1200	1200	1200	1200	1200

假设车道内交通流分配原则是: 各车道的车辆平均密度相同. 仿真得到的第 2、3 时间段内的车辆改道比例为:

$$\begin{aligned} \eta_{21}(t, 2) &= 0.3071, \quad \eta_{21}(t, 3) = 0.2566, \\ \eta_{32}(t, 3) &= 0.5132 \quad (t = 2, 3), \\ \eta_{yl}(t, i) &= 0 \quad (t = 2, 3; i = 1, 4 \text{ or } y < l). \end{aligned}$$

图 4 显示了各路段平均密度与时间的关系, 由图 4 可以看出到第 20 个时间段后, 本算例中各车道的交通趋于“稳定”, 即各路段的车辆密度(速度)都趋于某一常量, 没有突变现象.

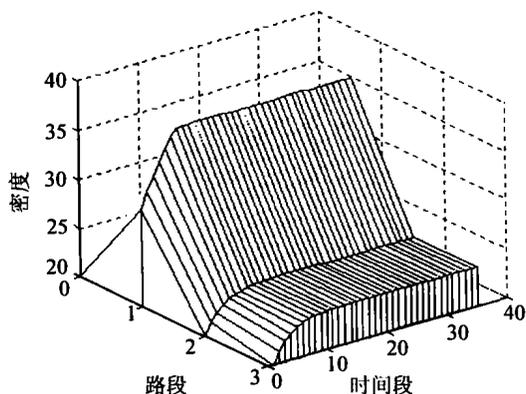


图 4 各路段平均密度与时间的关系图

Fig. 4 Density-time relation on all segments

参考文献(References):

- [1] 谭满春, 唐松安, 徐建闽. 多车道高速公路的动态离散交通流模型[J]. 中国公路学报, 2002, 15(2): 91-94. (TAN Manchun, TANG Song-an, XU Jianmin. Dynamic discrete traffic model of freeway with multiple lanes [J]. *China J of Highway and Transport*, 2002, 15(2): 91-94.)
- [2] BROUCKE M, VARAIYA P. A theory of traffic flow in automated highway systems [J]. *Transportation Research C*, 1996, 4(4): 181-210.
- [3] CHEN O J. *A dynamic traffic control model for real time freeway operations* [D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [4] ALVAREZ L, HOROWITZ R, CHAO S, et al. Optimal desired traffic flow patterns for automated highway systems [A]. *Proc of the American Control Conf* [C]. Philadelphia: Pennsylvania, 1998.
- [5] FRETCHER R. *Practical Methods of Optimization* [M]. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 1987.

附录(Appendix)

模型(DM)中记号及其主要约束条件.

1) 模型(DM)中的记号.

用有向强连通图 $G(M, A)$ 表示一个只包含一条高速公路的道路交通网络, 其中 M 是网络节点集, A 为有向弧集, 即路段集.

A_h : 高速公路各路段(编号)的集合, $A_h \subset A$; 高速公路各路段 i 按顺序编号, 即 $i = 1, 2, \dots$, 路段 $i(i \geq 2)$ 的上游路段就是 $i-1$; 与高速公路路段相连的入口匝道也用 i 表示;

OD (rs): 表示车辆的起讫点分别为 r, s ; 即用“OD (rs) 车辆”表示起点为 r , 讫点为 s 的车辆; $C_i = [l, n_i]$ 表示路段 $i \in A_h$ 上所有车道的集合, 其中 n_i 是路段 i 上车道总数; l 表示某一车道编号, 即 $l \in C_i$;

$\rho^s(t, i, l)$: 路段 $i \in A_h$ 的第 l 车道上 OD (rs) 车辆在时刻 t 的平均密度(veh/km);

$q^s(t, i, l)$: 在时间段 $[tT, (t+1)T]$ 内离开路段 $i \in A_h$ 的第 l 车道, 流入下游的 OD (rs) 车辆数除以 T (veh/h);

$v(t, i, l)$: 路段 $i \in A_h$ 的第 l 车道上的车辆在时刻 t 的平均速度(km/h);

$d^s(t, i)$: 入口匝道 i 上 OD (rs) 车辆在时刻 t 的交通需求(veh/h);

$u^s(t, i)$: 在时间段 $[tT, (t+1)T]$ 内由入口匝道 i 进入高速公路主线的 OD (rs) 车辆数除以 T (veh/h);

$w^s(t, i)$: 入口匝道 i 上 OD (rs) 车辆在时刻 t 的排队数量(veh);

$e^s(t, i)$: 在时间段 $[tT, (t+1)T]$ 内由出口匝道 i 驶离高速公路主线的 OD (rs) 车辆数除以 T (veh/h);

$\eta_{yl}^s(t, i)$: 在时间段 $[tT, (t+1)T]$ 内路段 i 上的车辆中

(下转第 864 页)

- [5] SEVASTIANOV S V, WOEGINGER G J. Makespan minimization in open shops: a polynomial time approximation scheme [J]. *Mathematical Programming*, 1998, 82: 191 - 198.
- [6] MASUDA T, ISHII H. Two machine open shop scheduling problem with bi-criteria [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1994, 52(3): 253 - 259.
- [7] ADIRI I, AMIT N. Openshop and flowshop scheduling to minimize sum of completion times [J]. *Computers & Operations Research*, 1984, 11: 275 - 284.
- [8] CLIFF S, JOEL W. On the existence of schedules that are near-optimal for both makespan and total weighted completion time [J]. *Operations Research Letters*, 1997, 21(3): 115 - 122.
- [9] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization

and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey [J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1979, 5(6E): 287 - 326.

作者简介

韩兵 (1958—),男,1987年和1993年毕业于西北大学航天工程系,分别获硕士和博士学位,现为上海交通大学自动化所副教授.研究方向为控制系统故障诊断与容错控制,计算机集成制造系统,生产过程调度.发表论文20余篇. E-mail: bhan88@hotmail.com;

席裕庚 (1946—),男,1968年毕业于哈尔滨军事工程学院,1984年在德国慕尼黑工业大学获得博士学位,现为上海交通大学自动化系教授,博士生导师.主要从事复杂系统控制理论和智能机器人的研究.

(上接第858页)

由第 y 车道换到第 l 车道的车辆数与车道 (i, y) 上车辆总数的比例:

L_i : 路段 $i \in A$ 的长度(km); T : 采样周期(h),应满足:

$$0 < T \leq \frac{L_i}{v_i}, \forall i \in A_h;$$

$\phi(i, l)$: 路段 (i, l) 的上游路段 $i-1$ 中与车道 l 相近的车道集合,即 $\phi(i, l) = \{(i-1, y) : |l-y| \leq 1, y \in C_{i-1}\}$,若 $i=1$ 则 $\phi(1, l)$ 是空集;

v_i : 自由流速度; ρ_{cr} : 临界密度; b_i : 期望系数($0 \leq b_i \leq 1$);

$$u(t, i) = \sum_{r,i} u^r(t, i), \quad d(t, i) = \sum_{r,i} d^r(t, i).$$

2) 模型(DM)的主要约束条件.

入口匝道流量约束:

$$u(t, i) \leq \sum_{r,i} [d^r(t, i) + \frac{1}{T} w^r(t, i)];$$

每一车道的交通密度不超过阻塞密度 ρ_{jam} :

$$0 \leq \rho(t, i, l) \leq \rho_{jam};$$

每一个入口匝道的等待车辆数 $w(t, i)$ 不能超过一个最大排队数 $w_{i,max}$ ($0 \leq w(t, i) \leq w_{i,max}$).

作者简介:

谭满春 (1968—),男,工学博士,副教授.主要研究方向:最优化,智能控制与应用. E-mail: tanmc@jnu.edu.cn.