

多机器总完成时间和 makespan 近似最优的开放式车间调度方法

韩 兵, 席裕庚

(上海交通大学 自动化系, 上海 200030)

摘要: 研究了多机器开放式车间调度问题, 采用离散事件系统调度使 makespan 最小化和总完成时间最小. 给出了在确定处理机器的条件下, 不同批次的作业总完成时间最优的排序定理, 以及选择机器处理作业的指标优化定理. 利用给出的若干定理建立了总完成时间最优的调度方法. 作者利用加权总完成时间最优算法来近似求解 makespan 最小化和总完成时间最优的调度问题. 作者也利用论文的理论结果给出了一个三机器开放式车间情况的实际算例.

关键词: 开放式车间; 离散事件系统; 加权总完成时间; 近似最优调度

中图分类号: TP273.1

文献标识码: A

Schedule methodology of approximate optimal cost of total time and makespan for multi-machines in open shop

HAN Bing, XI Yu-geng

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, China)

Abstract: The schedule for multi-machines of open shop was investigated. The model of open shop schedule was described by the discrete event dynamic system. As a result, the theorem of sequencing jobs of the different batches in the condition of a certain machine for total time optimum, and the theorem of choosing the processing machine for a certain job among machines at minimum cost were derived. Based on these theorems, the methodology of open shop schedule was built in the approximate optimum of the total time. The optimal cost of weighted total time approximating the optimal cost of total time and makespan was proposed. The example of optimal schedule was presented for three machines of open shop.

Key words: open shop; discrete event system; weight total time; approximate optimal schedule

1 引言(Introduction)

对于 makespan 和总完成时间最小化的多机器开放式车间分层调度问题表示如下. 有 n 个作业 $J_1, J_2, \dots, J_n$ 在 m 个机器 $M_1, M_2, \dots, M_m$ 上处理, 对应机器 M_j 和作业 J_i 处理时间为 p_{ij} . 作业处理的次序是任意的, 作业不能被两个或多个机器同时处理, 任何机器每次只能处理一个的作业. 假定不允许抢先, 任何处理一旦开始就必须完成而不能中断. 开放式车间调度问题的实际例子, 可以在测试仪器设备时遇见. 单元检查通过一系列诊断测试, 不必按任何指定的次序完成. 每一个试验经常需要不同的测试设备, 测试设备不能同时进行两个试验. 上述情况在测试电子系统组件和众多修复设备时经常遇到, 修理也可以按任意次序完成. 作者的目标是使作业完成时间的总和最小, 完成时间总和要服从 makespan 最

小, 其中 C_i 是作业的 J_i 完成时间, 并且

$$C_{\max} = \max_i C_i.$$

G. J. Kyparisis, Christos Koulamas^[1]也研究了两个机器开放式车间调度问题, 采用递阶目标使 makespan 最小化并且使总完成时间最小, 表明这个问题不同于密切相关的最小化总完成时间调度问题. 他们发展了一个可用于三种专门的情况的多项式-时间算法和当一个机器起主要作用时的近似最佳多项式-时间启发式算法, 也扩充一些结果到三机器开放式车间的特殊的情形之中.

2 问题的形式化描述(Format discription of problems)

为了得到一般性结果, 本文首先研究总完成时间指标的调度方法, 按引言约定定义开放式车间调度问题如下:

$$\min \sum_{i=1}^n C_i, \quad (2.1)$$

$$x_{il+1} = x_{il} + b_{il}, x_{i0} = 0, \quad (2.2)$$

$$b_{il} = p'_{ij} + p_{ij}, \quad (2.3)$$

$$u_{il} = j; u_{il} \notin \{u_{l-1}, \dots, u_1\}, \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} p'_{ij}, p_{ij} \geq 0; u_{il} \in u_l, \\ u_l = \{u_{il}, u_{il} \notin \{u_{l-1}, \dots, u_1\}\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

在机器上被处理次数相同的全部作业集合称为对应的批次集合. C_i 为第 i 个作业的总完成时间, x_{il} 是作业 i 第 l 批处理的完成时间, $p_{ij} \geq 0$ 是作业 i 在机器 j 上的处理时间, $p'_{ij} \geq 0$ 是作业 i 在机器 j 上的等待时间, u_{il} 为选择第 i 个作业到特定机器处理的调度安排. 式(2.1)~(2.5)给出了一个描述开放式车间调度问题的离散事件系统.

引理 1 按总完成时间 $\min \sum_{i=1}^n C_i$ 性能指标最优的开放式车间调度问题等价于总最小等待时间 $\min \sum_i \sum_j p'_{ij}$ 性能指标最优的开放式车间调度问题.

证 由式(2.1)~(2.5),

$$\min \sum_{i=1}^n C_i = \min \sum_{i=1}^n x_{im} = \min \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m b_{il},$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m b_{il} = \min \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m (p_{iu_l} + p'_{iu_l}),$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m (p_{iu_l} + p'_{iu_l}) =$$

$$\min \sum_i \sum_l p_{iu_l} + \min \sum_i \sum_l p'_{iu_l},$$

因为每个作业必须且只能在不同机器上处理一次:

$$\min \sum_i \sum_l p_{iu_l} + \min \sum_i \sum_l p'_{iu_l} =$$

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_l p'_{iu_l} + p = \min \sum_l \sum_i p'_{iu_l} + p,$$

等价于 $\min \sum_l \sum_i p'_{iu_l}$. **证毕.**

引理 1 说明按最优总完成时间指标的调度问题, 可以按等待时间最优指标求解. 两问题的等价性是由于开放式车间调度问题的处理时间完全已知, 并且每个作业只能在不同机器上处理一次的特殊性决定的.

3 总完成时间指标的开放式车间调度方法 (Total time index for schedule method of open shop)

直接求解开放式车间调度问题是困难的, 最好

的方法是先得到确定条件下问题的最优排序, 然后利用这些定理建立调度方法.

定理 1 对应某台机器和 n 个作业, 按一定顺序处理, 总完成时间最小的作业调度为使

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} p'_{ij} = \sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} p_{kj},$$

当且仅当加工顺序按处理时间从小到大排列时

$$p_{1j} \leq p_{2j} \leq \dots \leq p_{n_j}.$$

证 根据引理 1, 总完成时间最小的作业调度为使等待总时间最小, 因为

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} p'_{ij} = \sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} p_{kj} =$$

$$(n_a - 1)p_{1j} + (n_a - 2)p_{2j} + \dots + p_{n_a-1},$$

不失一般性, 若取作业顺序为 $p_{2j}, p_{1j}, \dots, p_{n_a j}$, 因为 $p_{2j} \geq p_{1j}$, 则有

$$(n_a - 2)p_{1j} + p_{2j} \geq (n_a - 1)p_{1j} \Rightarrow$$

$$(n_a - 2)p_{1j} + (n_a - 1)p_{2j} \geq$$

$$(n_a - 1)p_{1j} + (n_a - 2)p_{2j},$$

$$\sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} p_{kj} =$$

$$(n_a - 2)p_{1j} + (n_a - 1)p_{2j} + \dots + p_{n_a-1} \geq$$

$$(n_a - 1)p_{1j} + (n_a - 2)p_{2j} + \dots + p_{n_a-1} =$$

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} p'_{ij}.$$

用数学归纳法可进一步证明, 按处理时间大小顺序排列处理作业, 总等待时间最小. **证毕.**

当上述作业按一定顺序排列时, 中间插入一些固定处理时间, 最小等待时间的最优序列排列顺序不变, 可由下面定理 2 描述和证明.

定理 2 对应第 j 台机器和 n 个作业, 按一定顺序处理, 若每一时间段插入一后面批次处理作业时间 Δp_{kj} , 此批作业最小等待总时间是

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} p'_{ij} = \min \sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} (p_{kj} + \Delta p_{kj}),$$

当且仅当加工顺序按处理时间从小到大排列时 $p_{1j} \leq p_{2j} \leq \dots \leq p_{n_a j}$.

证 同一机器存在最优的后面批次处理时间 Δp_{kj} ,

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} p'_{ij} = \min \sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} (p_{kj} + \Delta p_{kj}),$$

因为 Δp_{kj} 已知, 则 $\sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} \Delta p_{kj}$ 为一固定不变量,

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} p'_{ij} = \sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} \Delta p_{kj} + \min \sum_{h=2}^n \sum_{k=1}^{h-1} p_{kj}.$$

由定理1得证最小等待总时间加工顺序按处理时间从小到大排列时 $p_{1j} \leq p_{2j} \leq \dots \leq p_{n_j}$. 证毕.

上述定理表达了第一批处理的作业排序与后面批次作业处理的时间有关,考虑后批次处理作业的此次最优处理排序的次序不变.

定理3 对于任意作业 J_1, J_2 , 对应第一次处理完成时间或规定必须等待的时间 $x_2 \geq x_1$, 作业 J_1, J_2 处理时间为 p_1, p_2 , 如果满足 $0 \leq p_1 \leq x_2 - x_1$ 则最小等待时间为零, 否则最小等待时间为 $\min(p_1 - x_2 + x_1, p_2 + x_2 - x_1)$, p_1 与 $p_2 + 2(x_2 - x_1)$ 比较小者优先处理.

证 为了避免两作业处理冲突, 并使等待时间最小, 上述定理的证明是求解下列约束优化问题

$$\begin{aligned} \min & (p'_1 + p'_2), \\ \text{s.t. } & p'_1 \geq p'_2 \geq 0, \\ & \max(x_1 + p'_1, x_2 + p'_2) \geq \\ & \min(x_1 + p'_1 + p_1, x_2 + p'_2 + p_2). \end{aligned}$$

上述约束表示等待时间必须为正值, 两作业处理时间区间不能重叠, 由上式得

$$\begin{aligned} \max & (p'_1, x_2 - x_1 + p'_2) \geq \\ \min & (p'_1 + p_1, x_2 - x_1 + p'_2 + p_2). \end{aligned}$$

当取 $p'_1 = p'_2 = 0$ 为极小时, 如果 $0 \leq p_1 \leq x_2 - x_1$, 则

$$\begin{aligned} 0 & \leq p_1 \leq x_2 - x_1 + p_2, \\ \max & (p'_1, x_2 - x_1 + p'_2) = \max(0, x_2 - x_1) = \\ & x_2 - x_1 \geq p_1 = \min(p_1, x_2 - x_1 + p_2) = \\ \min & (p'_1 + p_1, x_2 - x_1 + p'_2 + p_2). \end{aligned}$$

上式成立, 说明 $p'_1 = p'_2 = 0$ 是最小等待时间并满足约束的规划最优解; 反之, 如果 $0 \leq x_2 - x_1 < p_1$, 由

$$\begin{aligned} \max & (x_1 + p'_1, x_2 + p'_2) \geq \\ \min & (x_1 + p'_1 + p_1, x_2 + p'_2 + p_2) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \max & (x_1 - x_2 + p'_1, p'_2) \geq \\ \min & (x_1 - x_2 + p'_1 + p_1, p'_2 + p_2). \end{aligned}$$

如果取 $p'_1 = p'_2 = 0$, 则

$$\begin{aligned} \max & (x_1 - x_2 + p'_1, p'_2) = \max(x_1 - x_2, 0) = 0 \geq \\ \min & (x_1 - x_2 + p'_1 + p_1, p'_2 + p_2) = \\ \min & (x_1 - x_2 + p_1, p_2) > 0 \end{aligned}$$

矛盾; 如果 $p_1 - x_2 + x_1 \leq p_2 + x_2 - x_1$, 取 $p'_1 = 0$, 优化指标 $\min(p'_1 + p'_2) = \min p'_2$, 满足

$\max(x_1 - x_2, p'_2) \geq \min(x_1 - x_2 + p_1, p'_2 + p_2)$, 即满足

$$p'_2 \geq \min(x_1 - x_2 + p_1, p'_2 + p_2),$$

可知最小的 p'_2 满足边界条件

$$p'_2 = \min(x_1 - x_2 + p_1, p'_2 + p_2),$$

$$p'_2 = x_1 - x_2 + p_1;$$

如果

$$p_1 - x_2 + x_1 \geq p_2 + x_2 - x_1,$$

取 $p'_2 = 0$, 同理可证 $p'_1 = p_2 + x_2 - x_1$. 证毕.

定理4 已知对于任意作业 J_1, J_2 , 对应第一次处理完成时间或规定必须等待的时间 $x_2 \geq x_1$, 设第一批作业处理时间为 p_{11}, p_{12} , 等待时间为 p'_{11}, p'_{12} ; 第二批作业处理时间为 p_{21}, p_{22} , 等待时间为 p'_{21}, p'_{22} , 则增加 p'_{12} 不能使 $\min p'_{12} + p'_{22}$ 减少.

证 令

$$\begin{aligned} \Delta p'_{12} &= p'_{12} - x_1 \geq 0, \\ x_2 &= x_1 + \Delta p'_{12} + p_{12}, \end{aligned}$$

由定理3得

$$\begin{aligned} p'_{22} &= \\ \max & \{0, \min(p_{21} - x_2 + x_1, p_{22} + x_2 - x_1)\} = \\ \max & \{0, \min(p_{21} - \Delta p'_{12} - p_{12}, p_{22} + \Delta p'_{12} + p_{12})\}, \\ p'_{12} + p'_{22} &= \\ x_1 + p_{12} + \max & \{\Delta p'_{12}, \min(p_{21} - \\ & p_{12}, p_{22} + 2\Delta p'_{12} + p_{12})\}. \end{aligned}$$

如果 $p_{21} - p_{12} \leq 0$, 则取 $\Delta p'_{12} = 0$,

$$\begin{aligned} p'_{12} + p'_{22} &= \min(p'_{12} + p'_{22}), \\ \min & (p'_{12} + p'_{22}) = \\ x_1 + p_{12} + \max & \{0, \min(p_{21} - p_{12}, p_{22} + p_{12})\} = \\ & x_1 + p_{12}. \end{aligned}$$

如果 $p_{22} + p_{12} \geq p_{21} - p_{12} \geq 0$, 则取

$$\begin{aligned} 0 & \leq \Delta p'_{12} \leq p_{21} - p_{12}, \\ \min & (p'_{12} + p'_{22}) = \\ x_1 + p_{12} + \max & \{0, \min(p_{21} - p_{12}, p_{22} + p_{12})\} = \\ & x_1 + p_{21}. \end{aligned}$$

证毕.

定理4说明, 增加第一批处理的作业等待时间, 不能使第一、第二批处理的作业等待时间之和减少, 因此不必考虑专门调整第一批作业时间来影响同一作业第二批处理的完成时间.

定理5 任意两个机器的两作业的处理时间为 $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$, 每个作业仅能在一台机器上处理一次, 对作业按机器等待时间和处理最优排序: 1) 如

果对应处理序列为 $p_{11}, \dots, p_{21}, \dots$ 和 $p_{12}, \dots, p_{22}, \dots$, 则 $p_{1j} = \min \{p_{11}, p_{12}\}$, j 为最优作业处理等待时间的机器编号; 2) 对应处理序列为 $p_{11}, \dots, p_{21}, \dots$ 和 $p_{22}, \dots, p_{12}, \dots$ 时, 如果 $p_{11} < p_{12}$ 则最优作业处理的机器编号 $j = 1$, 若满足 $p_{22} < p_{21}$, 则最优作业处理等待时间的机器编号 $j = 2$, 且两者必有一种情况成立.

证 对情况 1), 因为

$$\sum_i C_i^* = \min_{u_i \in U} \sum_i C_i = \min_{u_i \in U} \sum_i (p_{iu'_1} + p_{iu_1}) = \min_j p_{1j} + \min_{u_i \in U} \sum_{i \neq 1} (p_{iu'_1} + p_{iu_1}),$$

所以

$$p_{1j} = \min_j p_{1j} = \min \{p_{11}, p_{12}\};$$

对情况 2),

$$\sum_i C_i^* = \min_{u_i \in U} \sum_i C_i = \min_{u_i \in U} \sum_i (p_{iu'_1} + p_{iu_1}) = \min \{p_{11}, p_{12} + p_{12}'\} + \min_{u_i \in U} \sum_{i \neq 1} (p_{iu'_1} + p_{iu_1}),$$

如果 $p_{11} < p_{12}$,

$$p_{11} = \min \{p_{11}, p_{12} + p_{12}'\} = \min \{p_{11}, p_{12}\},$$

$$\sum_i C_i^* = \min_{u_i \in U} \sum_i C_i = \min_{u_i \in U} \sum_i (p_{iu'_1} + p_{iu_1}) = \min \{p_{22}, p_{21} + p_{21}'\} + \min_{u_i \in U} \sum_{i \neq 2} (p_{iu'_1} + p_{iu_1}).$$

如果 $p_{22} < p_{21}$,

$$p_{22} = \min \{p_{22}, p_{21} + p_{21}'\} = \min \{p_{22}, p_{21}\}.$$

进一步, 如果 $p_{11} > p_{12}$ 成立, 根据队列排序有 $p_{11} > p_{12} > p_{22}$, 同时又有 $p_{22} > p_{21}$, 则 $p_{11} > p_{12} > p_{22} > p_{21}$ 成立, 再由队列排序有 $p_{11} > p_{12} > p_{22} > p_{21} > p_{11}$, 矛盾, 说明定理证毕. 上述定理可推广至多个机器多个作业的情形. 由于作业在一个批次内只能在一台机器处理一次, 反复使用这个定理, 按机器分割作业集合的方法, 使总完成时间最小.

可以根据定理 1~4 来构造优化队列, 所得结果为 $\sum C_i$ 指标下的最优调度方法.

总完成时间指标调度方法:

1) 对每一个作业按每一台机器由定理 1 进行排序;

2) 从队列第一个作业开始, 由定理 5 对作业 $i \in A_j$ 按完成最小来确定机器加工集合 A_j ;

3) 对 A_j 中的作业按定理 1 或定理 3 进行排序;

4) 计算 x_{il} , 由式(2.4) 和 1) 的方法确定在下一批处理的 A_j 集合;

5) 对 A_j 中的作业按定理 2、3 进行排序;

6) 重复 3) 和 4) 的工作直至最后一批处理作业排序完成.

4 近似总完成时间和 makespan 最优调度方法 (Approximately total time and optimal shedule method of makespan)

对于总完成时间和 makespan 最优指标, 构造优化调度队列更困难. 由文献可知它是一个 NP 难题, 所以采用近似最优方法才有实际意义. 作者利用总完成时间和加权总完成时间指标来近似总完成时间和 makespan 最优指标, 并得到实际性能对于原问题指标的一个上界.

定理 6 对应某台机器和 n 个作业, 按一定顺序处理, 最小等待加权总等待时间为

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} \omega_i p_{ij}' = \sum_{h=2}^n \omega_h \sum_{k=1}^{h-1} p_{kj},$$

当且仅当加工顺序按处理时间与权系数之比从小到大排列时

$$p_{1j}/\omega_1 \leq p_{2j}/\omega_2 \leq \dots \leq p_{n_j}/\omega_{n_j}.$$

定理 6 证明类似总完成时间对应定理.

定理 7 对应第 j 台机器和 n 个作业, 按一定顺序处理, 若每一时间段插入一固定时间 Δp_{kj} , 最小等待总时间是

$$\min_{u=j} \sum_{i \in A_j} \omega_i p_{ij}' = \min \sum_{h=2}^n \omega_h \sum_{k=1}^{h-1} (p_{kj} + \Delta p_{kj}),$$

当且仅当加工顺序按处理时间从小到大排列时

$$p_{1j}/\omega_1 \leq p_{2j}/\omega_2 \leq \dots \leq p_{n_j}/\omega_{n_j}.$$

定理 7 证明类似总完成时间对应定理.

定理 8 对于任意作业 J_1, J_2 , 对应第一次处理完成时间或规定必须等待的时间 $x_2 \geq x_1$, 作业 J_1, J_2 要处理时间为 p_1, p_2 , 如果满足 $0 \leq p_1 \leq x_2 - x_1$, 则最小等待时间, 否则最小等待时间为

$$\min \{\omega_2(p_1 - x_2 + x_1), \omega_1(p_2 + x_2 - x_1)\},$$

$\omega_2(p_1 - x_2 + x_1)$ 与 $\omega_1(p_2 + x_2 - x_1)$ 比较小者优先处理. 定理 8 证明类似总完成时间对应定理.

定理 9 已知对于任意作业 J_1, J_2 , 对应第一次处理完成时间或规定必须等待的时间 $x_2 \geq x_1$, 设第一批作业处理时间为 p_{11}, p_{12} , 等待时间为 p_{11}', p_{12}' ; 第二批作业处理时间为 p_{21}, p_{22} , 等待时间为 p_{21}', p_{22}' , 则增加 p_{12}' 不能使 $\min (\omega_1 p_{12}' + \omega_2 p_{22}')$ 减少.

定理 9 讨论的第一批处理和第二批处理是同一作业, 故加权后不影响定理结果, 证明可参见定理 4. 定理 5 也适用于加权总完成时间最优的情况.

- [5] SEVASTIANOV S V, WOEGINGER G J. Makespan minimization in open shops: a polynomial time approximation scheme [J]. *Mathematical Programming*, 1998, 82: 191 - 198.
- [6] MASUDA T, ISHII H. Two machine open shop scheduling problem with bi-criteria [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1994, 52(3): 253 - 259.
- [7] ADIRI I, AMIT N. Openshop and flowshop scheduling to minimize sum of completion times [J]. *Computers & Operations Research*, 1984, 11: 275 - 284.
- [8] CLIFF S, JOEL W. On the existence of schedules that are near-optimal for both makespan and total weighted completion time [J]. *Operations Research Letters*, 1997, 21(3): 115 - 122.
- [9] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization

and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey [J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1979, 5(6E): 287 - 326.

作者简介

韩兵 (1958—),男,1987年和1993年毕业于西北大学航天工程系,分别获硕士和博士学位,现为上海交通大学自动化所副教授.研究方向为控制系统故障诊断与容错控制,计算机集成制造系统,生产过程调度.发表论文20余篇. E-mail: bhan88@hotmail.com;

席裕庚 (1946—),男,1968年毕业于哈尔滨军事工程学院,1984年在德国慕尼黑工业大学获得博士学位,现为上海交通大学自动化系教授,博士生导师.主要从事复杂系统控制理论和智能机器人的研究.

(上接第858页)

由第 y 车道换到第 l 车道的车辆数与车道 (i, y) 上车辆总数的比例;

L_i : 路段 $i \in A$ 的长度(km); T : 采样周期(h),应满足:

$$0 < T \leq \frac{L_i}{v_i}, \forall i \in A_h;$$

$\phi(i, l)$: 路段 (i, l) 的上游路段 $i-1$ 中与车道 l 相近的车道集合,即 $\phi(i, l) = \{(i-1, y): |l-y| \leq 1, y \in C_{i-1}\}$,若 $i=1$ 则 $\phi(1, l)$ 是空集;

v_i : 自由流速度; ρ_{cr} : 临界密度; b_i : 期望系数($0 \leq b_i \leq 1$);

$$u(t, i) = \sum_{r,i} u^r(t, i), d(t, i) = \sum_{r,i} d^r(t, i).$$

2) 模型(DM)的主要约束条件.

入口匝道流量约束:

$$u(t, i) \leq \sum_{r,i} [d^r(t, i) + \frac{1}{T} w^r(t, i)];$$

每一车道的交通密度不超过阻塞密度 ρ_{jam} :

$$0 \leq \rho(t, i, l) \leq \rho_{jam};$$

每一个入口匝道的等待车辆数 $w(t, i)$ 不能超过一个最大排队数 $w_{i,max}$ ($0 \leq w(t, i) \leq w_{i,max}$).

作者简介:

谭满春 (1968—),男,工学博士,副教授.主要研究方向:最优化,智能控制与应用. E-mail: tanmc@jnu.edu.cn.