

关于 Sontag-Type 控制的注记

叶华文¹, 戴冠中¹, 王 红²

(1. 西北工业大学 自动控制系, 陕西 西安 710072; 2. 南开大学 数学科学学院, 天津 300071)

摘要: 基于控制李雅普诺夫函数的 Sontag-Type 控制是仿射系统鲁棒镇定中的重要控制律. 首先揭示该控制律本质上是一种变结构控制且闭环的切换面总可达, 受此启发并为了相对容易地构造控制李雅普诺夫函数, 运用零状态可检测概念定义弱控制李雅普诺夫函数, 并证明了基于弱控制李雅普诺夫函数的 Sontag-Type 控制的优化镇定性. 文中还证明, 在温和条件下, 基于弱控制李雅普诺夫函数的 Sontag-Type 控制为仿射系统的输入到状态镇定控制.

关键词: 控制李雅普诺夫函数; 变结构控制; 零状态可检测; 鲁棒镇定

中图分类号: O231

文献标识码: A

Notes on Sontag-Type control

YE Hua-wen¹, DAI Guan-zhong¹, WANG Hong²

(1. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Shanxi Xi'an 710072, China;

2. College of Mathematics Science, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: The Sontag-Type control based on the control Lyapunov function (CLF) is an important control law in robust stabilization of affine systems. Firstly, the authors pointed out that this control law is essentially a kind of variable structure control and that the switch surfaces of the resulted closed-loop are always reachable. Motivated by this and in order to comparatively easily construct CLFs, the authors defined the weak control Lyapunov function (WCLF) by using the concept of zero-state-detectability and then proved the optimal stabilization property of the Sontag-Type control based on the WCLF. Finally, the authors proved that the Sontag-Type control based on the the WCLF is an input-to-state stabilizer of the affine system under a mild condition.

Key words: control Lyapunov function; variable structure control; zero-state-detectability; robust stabilization

1 引言 (Introduction)

针对仿射系统, 学者 E D Sontag 提炼出控制李雅普诺夫函数 (CLF) 概念, 并基于 CLF 构造了一类具有特殊结构的控制律^[1]——Sontag-Type 控制, 该控制律的结构形式及 CLF 的抽象方式对近段鲁棒镇定研究起到重要促进作用^[2,3].

本文将揭示, Sontag-Type 控制实质上是一种变结构控制, 而且所得切换系统的切换面总可达. 基于这样的认识, 本文将运用零状态可检测概念定义弱控制李雅普诺夫函数 (WCLF), 以便相对容易地构造 CLF, 并通过典型例子说明定义 WCLF 的合理性. 随后, 本文集中讨论基于 WCLF 的 Sontag-Type 控制的优化镇定性、温和条件下的输入到状态镇定性.

本文考察光滑仿射系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ x &\in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f(0) = 0.\end{aligned}\quad (1)$$

也将关注如下状态输出系统的零状态可检测性:

$$\dot{x} = f(x), y = [L_g V(x)]^T. \quad (2)$$

其中 V 为 C^1 正定径向无界函数, $L_g V(x)$ 表示 V 沿向量场 g 的李导数. 函数 V 正定是指, 对所有 x 有 $V(x) \geq 0, V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 其径向无界是指 $V(x) \rightarrow \infty (|x| \rightarrow \infty)$. 下文中能量函数特指 C^1 正定径向无界函数.

定义 1^[4] 称状态输出系统

$$\dot{x} = f(x), y = h(x)$$

为零状态可检测 (ZSD), 如果

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, h(x(t; x_0)) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = 0.$$

称该系统零状态可观测 (ZSO), 如果

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, h(x(t; x_0)) = 0 \Rightarrow x(t; x_0) = 0.$$

其中 x_0 为初始条件, $x = x(t; x_0)$ 为 $\dot{x} = f(x)$ 的解. 显然, ZSO 系统必定 ZSD.

定义 2^[1] 称能量函数 V 为系统(1)的控制李雅普诺夫函数(CLF), 如果满足:

$$\forall x \neq 0, [L_g V(x)]^T = 0 \Rightarrow L_f V(x) < 0.$$

很明显, V 是系统(1)的 CLF 并不要求自由动态 $\dot{x} = f(x)$ 全局渐近稳定(GAS), 因为只要在集合 $\Omega = \{x \neq 0 \mid L_g V(x) = 0\}$ 上满足 $\dot{V} = L_f V(x) < 0$, 所谓 Ω -GAS^[5].

基于 CLF V , 文献[1]为系统(1)构造的镇定控制为

$$u_s(x) = -P(x)[L_g V(x)]^T,$$

$$P(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{L_f V(x) + \sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4}}{|L_g V(x)|^2}, & [L_g V(x)]^T \neq 0, \\ c, & [L_g V(x)]^T = 0. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $c > 0$. 此即 Sontag-Type 控制.

Sontag-Type 控制(3)为典型的变结构控制, 因为可以逐一验证该控制律满足变结构控制的3个基本特征^[6]: 1) 控制结构的切换; 2) 切换面可达; 3) 切换面上的动态渐近稳定.

1) $S(x) = [L_g V(x)]^T = 0$ 为闭环的切换面. 在切换面上, 控制为零, 切换面之外则为

$$-\frac{L_f V(x) + \sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4}}{|L_g V(x)|^2} [L_g V(x)]^T.$$

2) $[L_g V(x)]^T \neq 0$ 时, 将式(3)代入式(1)并求 V 沿闭环的时间导数, 得到

$$\dot{V} \leq -\sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4}.$$

由拉萨尔不变集原理^[7]知道, 系统的解进入集合 $E = \{x \in \mathbb{R}^n: \dot{V} = 0\}$, 在 E 中 $L_g V(x) = 0$, 此即证明切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 可达.

3) 由 CLF 定义可知, 切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 上的动态渐近稳定.

2 主要结果(Main results)

2.1 弱控制李雅普诺夫函数定义 (Definition of weak control Lyapunov functions)

上面述及, Sontag-Type 控制(3)是一种变结构控制, 且切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 总是可达的, 这启发作者, 为保证切换面上的动态渐近稳定, 不必有 CLF 定义中的严格不等式 $L_f V(x) < 0$, 而可以减弱为

$L_f V(x) \leq 0$, 同时辅以相应的零状态可检测条件, 于是有

定义 3 称能量函数 V 为系统(1)的弱控制李雅普诺夫函数(WCLF), 如果满足:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, [L_g V(x)]^T = 0 \Rightarrow L_f V(x) \leq 0,$$

$$\dot{x} = f(x), y = [L_g V(x)]^T \text{ ZSD}.$$

应该说, 将 CLF 扩展为 WCLF 是很自然的事情. 正如在渐近稳定性判定中常常得到 $\dot{V} \leq 0$ 而不是 $\dot{V} < 0$, 于是求助拉萨尔不变集原理, 这里将严格不等式减弱为 $L_f V(x) \leq 0$, 同时要求相应的零状态可检测条件.

下面从另一个角度阐述, 为什么如此定义 WCLF.

根据定义 1, 2, 系统(1)存在 CLF V , 实质上意味着状态输出系统(2)ZSD, 但反之不然, 下面是一个典型例子.

例 1 考察系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + (-x_1 + 2x_2)u. \end{cases} \quad (4)$$

以 $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ 为能量函数, 得到状态输出系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ Y = L_g V(x) = (-x_1 + 2x_2)x_2. \end{cases}$$

$Y = 0$ 包括两种情况: ① $x_2 = 0$; ② $x_1 = 2x_2$. 二者都意味着 $x = 0$, 因此该状态输出系统 ZSO.

但是, $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ 不是系统(4)的 CLF, 因为存在估计: 对所有 $x_1 = 2x_2 \neq 0$,

$$L_f V(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_2^2 > 0.$$

即

$$\exists x \neq 0, L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) > 0.$$

上例表明, 就刻画系统(2)的 ZSD 特性而言, “系统(1)存在 CLF V ”与“系统(2)ZSD”相比, 前者对函数 V 施加了较强的限制, 这暗示了弱化的可能性. 但是, 仅凭条件“系统(2)ZSD”设计的 Sontag-Type 控制, 却不一定成为系统(1)的镇定控制. 再次考察例 1, 由于

$$\exists x \neq 0, L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) > 0,$$

切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 上的动态不具有渐近稳定

性.因此,为了镇定目的,除了要求 WCLF V 使“系统(2)ZSD”,还需满足蕴涵式:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, [L_g V(x)]^T = 0 \Rightarrow L_f V(x) \leq 0.$$

2.2 WCLF 的合理性(Rationality of WCLF)

通过例子,本小节从下面两个角度说明定义 WCLF 的合理性:难于构造 CLF 时可以相对容易地构造 WCLF;难于构造 CLF 并不意味着不存在,而可望由 WCLF 重构得到.

例 2 考察系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -e^{x_2}(x_1 + \frac{1}{2}x_2) + u. \end{aligned} \quad (5)$$

以 $V = x_1^2 + x_2^2$ 为能量函数,有

$$L_f V(x) = x_2^2(2x_1 p - e^{x_2}),$$

$$L_g V(x) = 2x_2, \quad p = (1 - e^{x_2})/x_2.$$

首先, $\forall x, L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) = 0$.

其次,状态输出系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -e^{x_2}(x_1 + \frac{1}{2}x_2), \\ y = L_g V(x) = 2x_2 \end{cases}$$

为 ZSO,因此 $V = x_1^2 + x_2^2$ 为系统(5)的 WCLF.

但针对系统(5),很难找到满足下面蕴涵式的能量函数 W :

$$\forall x \neq 0, L_g W(x) = 0 \Rightarrow L_f W(x) < 0.$$

例 3 考察系统

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)v_1 + g_2(x)v_2. \quad (6)$$

$$f = (x_2 x_3 \quad -x_1 x_3 \quad x_1 x_2)^T,$$

$$g_1 = (1 \quad 0 \quad 0)^T, \quad g_2 = (0 \quad 1 \quad 0)^T.$$

可验证 $V = \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$ 为系统(6)的 WCLF.事实上,

$$L_f V(x) = 2x_1 x_2 x_3 - x_2 x_3^2 - x_1^2 x_2,$$

$$L_{g_1} V(x) = x_1 - x_3, \quad L_{g_2} V(x) = x_2,$$

这样

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, L_g V(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$L_f V(x) = 0.$$

而且,容易验证状态输出系统

$$\dot{x} = f(x), \quad y = [L_g V(x)]^T$$

为 ZSO.

现在重构 WCLF V 为

$$W(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3^2)^2 + \frac{1}{2}x_3^2,$$

可检验 W 为系统(6)的 CLF.事实上,

$$L_{g_1} W(x) = x_1 - x_3, \quad L_{g_2} W(x) = x_2 + x_3^2.$$

对所有 $x \neq 0$ 设 $L_{g_1} W(x) = 0, L_{g_2} W(x) = 0$, 于是有

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 \neq 0, \quad x_2 = -x_3^2 \neq 0, \\ L_f W(x) &= -x_3^4 < 0. \end{aligned}$$

即

$$\forall x \neq 0, [L_g W(x)]^T = 0 \Rightarrow L_f W(x) < 0.$$

读者还可以自行验证下面的简单例子.

函数 $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ 为系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3 + ux_2 \end{cases}$$

的 WCLF,而函数 $W = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2$ 则为 CLF.

2.3 优化镇定(Optimal stabilization)

下面证明,基于 WCLF 的 Sontag-Type 控制具有优化镇定性.

定义 4^[8] 称系统(1)的镇定控制 $u = k(x)$ 具有扇形裕度 (α, β) , 如果存在函数 φ 使得

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\varphi(k(x))$$

仍然 GAS. 函数 $\varphi = \text{diag}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, φ_i 满足:

$$\forall s \neq 0, \alpha s^2 < s\varphi_1(s) < \beta s^2 (0 < \alpha < \beta).$$

定理 1 基于 WCLF V 的 Sontag-Type 控制(3)关于下面的性能泛函

$$\begin{cases} J = \int_0^\infty [L(x) + \frac{1}{2P(x)}u^T u]dt, \\ L(x) = \frac{1}{2}P(x)L_g V(x)[L_g V(x)]^T - L_f V(x) \end{cases}$$

为系统(1)的优化镇定控制,并具有扇形裕度 $(1/2, \infty)$ (其中 $P(x)$ 见式(3)).

证 控制(3)的镇定性证明. $[L_g V(x)]^T = 0$ 时, $V = L_f V(x) \leq 0; [L_g V(x)]^T \neq 0$ 时,

$$\dot{V} \leq -\sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4} < 0.$$

此即证明,对所有 $x \in \mathbb{R}^n, \dot{V} \leq 0$, 从而原点为稳定平衡点.

$[L_g V(x)]^T \neq 0$ 时,

$$\dot{V} \leq -\sqrt{|L_f V(x)|^2 + |L_g V(x)|^4},$$

由拉萨尔不变集原理知,切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 可达;由 WCLF 定义,在切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 上有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. 此即证明了原点的全局吸引力.

全局吸引的稳定平衡点为 GAS 平衡点^[5], 控制

(3)的镇定性获证.

现在证明控制(3)极小化泛函 J . 首先, J 为有意义的性能泛函. 事实上,

$[L_g V(x)]^T \neq 0$ 时,

$$L(x) = \frac{1}{2} P(x) L_g V(x) [L_g V(x)]^T - L_f V(x) \geq 0;$$

$[L_g V(x)]^T = 0$ 时, 由 WCLF 的定义,

$$L(x) = -L_f V(x) \geq 0.$$

现在设 $v = u - u_s$, 代入 J 的表达式中得到

$$\begin{aligned} J = \int_0^\infty & \left\{ \frac{1}{2} P(x) L_g V(x) (L_g V(x))^T - L_f V(x) + \right. \\ & \left. \frac{1}{2P(x)} (v + u_s)^T (v + u_s) \right\} dt = \\ & \int_0^\infty \left[-L_g V(x) u - L_f V(x) + \frac{1}{2P(x)} v^T v \right] dt = \\ & \int_0^\infty \left[-\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2P(x)} v^T v \right] dt. \end{aligned}$$

显然 $v = 0$ 使 J 极小, 也即控制(3)极小化泛函 J .

最后, 证明 Sontag-Type 控制(3)具有扇形裕度 $(1/2, \infty)$.

验证闭环 $\dot{x} = f(x) + g(x)\varphi(u_s)$ GAS, φ_i 满

足: $\forall s \neq 0, s\varphi_i(s) > \frac{1}{2}s^2$.

$$\dot{V} = L_f V(x) + L_g V(x)\varphi(u_s) =$$

$$L_f V(x) - \frac{1}{2} P(x) L_g V(x) [L_g V(x)]^T +$$

$$\frac{1}{2} P(x) L_g V(x) [L_g V(x)]^T + L_g V(x)\varphi(u_s) =$$

$$-L(x) - \frac{1}{2} L_g V(x) u_s + L_g V(x)\varphi(u_s) \leq$$

$$L_g V(x) [\varphi(u_s) - \frac{1}{2} u_s] =$$

$$-\frac{1}{P(x)} u_s^T [\varphi(u_s) - \frac{1}{2} u_s] \leq 0.$$

由 $P(x)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 的特性知,

$$\dot{V} = 0 \Rightarrow u_s^T = 0 \Rightarrow L_g V(x) = 0.$$

这说明了切换面 $[L_g V(x)]^T = 0$ 可达, 用前面相同的分析可以推知闭环 $\dot{x} = f(x) + g(x)\varphi(u_s)$ GAS.

下面的例子可说明定理1的意义.

例4 考察系统^[9]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2. \end{cases} \quad (7)$$

以 $V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3$ 为能量函数, 根据拉萨尔不变集原理, 可验证 $u = x_1 - x_3 -$

$(2x_1 + x_3)^3$ 镇定系统(7), 但该控制律没有鲁棒性^[9]. 事实上, 将受扰控制

$$u_p = \kappa u = \kappa [x_1 - x_3 - (2x_1 + x_3)^3]$$

代入式(7)得到

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\kappa - 1)x_1 - x_2 + (1 - \kappa)x_3 - \kappa(2x_1 + x_3)^3, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2. \end{cases}$$

其线性近似系统的特征方程为

$$\lambda^3 + (1 - \kappa)\lambda^2 + \lambda + \kappa - 1 = 0,$$

对所有 $\kappa \neq 1$, 该特征方程至少有一个特征根的实部为正, 因此闭环不稳定.

但可验证,

$$V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3$$

为式(7)的 WCLF. 已知

$$f(x) = (-x_1 - x_2 + x_3, x_1, x_2)^T,$$

$$g(x) = (1, 0, 0)^T,$$

$$L_g V(x) = 2x_1 + x_3,$$

$$L_f V(x) = (2x_1 + x_3)(-x_1 + x_3).$$

首先, $x \in \mathbb{R}^3, L_g V(x) = 0 \Rightarrow L_f V(x) = 0$.

其次, 状态输出系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2, \\ y = L_g V(x) \end{cases}$$

的能观矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

满秩, 故可观测, 也必然为 ZSO.

根据 WCLF $V(x) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3$,

为系统(7)设计 Sontag-Type 控制:

$$u_s(x) =$$

$$\begin{cases} (-x_1 + x_3) - \text{sgn}(2x_1 + x_3) \sqrt{(-x_1 + x_3)^2 + (2x_1 + x_3)^2}, \\ 2x_1 + x_3 \neq 0, \\ 0, 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

由定理1知道, 该控制律具有扇形裕度 $(1/2, \infty)$, 即意味着对任何 $r > \frac{1}{2}$, 受扰控制律 $u_p = ru_s$ 仍然镇定系统(7).

2.4 输入到状态镇定 (ISS stabilization)

输入到状态镇定是一种较强的鲁棒镇定. 文献

[1]曾经证明,如果系统(1)存在 CLF,则在温和的附加条件下,Sontag-Type 控制(3)为系统(1)的输入到状态镇定控制.本节运用 ISS 的原始定义证明,CLF 扩展为 WCLF 后也有类似结论.

考察一般非线性系统

$$\dot{x} = f(x, u), f(0, 0) = 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (8)$$

定义 5^[10] 称系统(8)为输入到状态稳定 (ISS),如果存在函数 $\beta \in KL, \gamma \in K$ 使得对所有 $x_0 \in \mathbb{R}^n, u$ 和 $t \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \max \{ \beta(|x_0|, t), \gamma(\|u(t)\|) \}, \\ \|u(t)\| &= \sup_{s \geq 0} |u(s)|. \end{aligned}$$

K 类、 K_∞ 类以及 KL 类函数的定义见文献[10].

若 $\dot{x} = f(x, k(x) + v)$ 关于 v 为 ISS,则称控制 $u = k(x)$ ISS 镇定系统(8).

文献[1]有结论:如果系统(1)存在 CLF V ,且

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (|L_f V(x)| + |L_g V(x)|^2) = \infty,$$

那么 Sontag-Type 控制(3) ISS 镇定系统(1).

定理 2 系统(1)存在 WCLF V ,且

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (|L_f V(x)| + |L_g V(x)|^2) = \infty,$$

那么 Sontag-Type 控制(3) ISS 镇定系统(1).

证 沿系统 $\dot{x} = f(x) + g(x)[k(x) + v]$ 的解计算 $\dot{V}$,当 $[L_g V(x)]^T \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sqrt{|L_f V|^2 + |L_g V|^4} + [L_g V]v \leq \\ &= -\frac{1}{2}(|L_f V| + |L_g V|^2) + |L_g V||v| = \\ &= -\frac{1}{4}(2|L_f V| + |L_g V|^2) - \frac{1}{4}|L_g V|^2 + |L_g V||v| \leq \\ &= -\frac{1}{4}(2|L_f V| + |L_g V|^2) + |v|^2. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (|L_f V(x)| + |L_g V(x)|^2) = \infty$,因此总存在 K_∞ 函数 ρ 使得 $|x| \geq \rho(|v|) \Rightarrow \dot{V} < 0$. 这意味着^[10]存在 K 函数 γ 使得对所有 $v, t \geq 0$ 和 $x_0 \in \Omega = \{x \mid [L_g V(x)]^T \neq 0\}$, 有

$$|x(t)| \leq \gamma(\|v(t)\|). \quad (9)$$

当 $[L_g V(x)]^T = 0$ 时,注意到

$$\dot{V} = -\sqrt{|L_f V|^2 + |L_g V|^4} + [L_g V]v,$$

扰动 v 不再影响系统动态的耗散特性,同时,由 WCLF 的定义可知闭环为 $\bar{\Omega}$ -GAS^[5], $\bar{\Omega} = \{x \mid [L_g V(x)]^T = 0\}$,因此对所有 $x_0 \in \bar{\Omega}$ 和某个 KL 函数 β ,有估计式^[5]

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t). \quad (10)$$

综合式(9)和(10),根据定义 5,结论得证.

3 结论 (Conclusions)

WCLF 在镇定设计中经常碰到,且构造 WCLF 比构造 CLF 相对容易,因此可以说,提炼 WCLF 概念一定程度地方便了 Sontag-Type 控制的设计.

基于 CLF 的 Sontag-Type 控制具有优化镇定性^[8]和 ISS 镇定性^[1],本文的研究表明,当 CLF 扩展为 WCLF 时也有类似结论.

参考文献 (References):

- [1] SONTAG E D. A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization [J]. *Systems and Control Letters*, 1989, 13 (2): 117 - 123.
- [2] KRSTIC M, LI Z. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3): 336 - 349.
- [3] TEEL A R, PRALY L. On assigning the derivative of disturbance attenuation control Lyapunov function [J]. *Mathematics of Control Signals and Systems*, 2000, 13: 95 - 124.
- [4] BYRNES C I, ISIDORI A, WILLEMS J C. Passivity, feed-back equivalence and the globally stabilization of minimum phase nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1228 - 1240.
- [5] ANDRIANO V, BACCIOTTI A, BECCARI G. Global stability and external stability of dynamic systems [J]. *Nonlinear Analysis*, 1997, 28(7): 1167 - 1185.
- [6] 高为炳. 变结构控制理论基础 [M]. 北京: 中国科学出版社, 1990.
(GAO Weibing. *The Basic Theory of Variable Structure Control* [M]. Beijing: Publishing House of Chinese Science, 1990.)
- [7] LASALLE J P. Stability theory for ordinary differential equations [J]. *J Differential Equations*, 1968, 4: 57 - 65.
- [8] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. *Constructive Nonlinear Control* [M]. London: Springer, 1997.
- [9] GLAD S T. Robustness of nonlinear state feedback — A survey [J]. *Automatica*, 1987, 23(4): 425 - 435.
- [10] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 - 443.

作者简介:

叶华文 (1968 —),男,现为西北工业大学博士后.研究方向为非线性系统反馈镇定设计. E-mail: yehuawen@163.com;

戴冠中 (1937 —),男,教授,博士生导师.研究领域为大系统估计与控制,智能控制,信息融合,信息安全等;

王红 (1962 —),女,教授,博士生导师.研究领域为微分几何理论及应用,非线性系统的几何理论等.