文章编号：1000-8152(2003)06-0879-05

一类分布参数系统的反馈能稳性

陈显强[1]，赵 怡[2]
(1.广东广播电视大学 理工部，广东 广州 510091；2.中山大学 数学系，广东 广州 510275)

摘要：研究了一类分布参数系统在有限维输出反馈下的指数能稳性，用构造有限维观测输出反馈控制器的方法，得到这一类系统反馈指数能稳的充分条件.

关键词：反馈指数能稳性；非线性性；分布参数系统；有限维输出反馈控制器
中图分类号：O175；O231 **文献标识码**：A

Feedback stabilization of a class of distributed parameter systems

CHEN Xian-qiang[1], ZHAO Yi[2]
(1. Department of Science and Engineering, Guangdong Radio & TV University, Guangdong Guangzhou 510091, China;
2. Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangdong Guangzhou 510275, China)

Abstract: Using a finite dimensional feedback controller with an observer, the feedback stabilization of a class of distributed parameter systems was studied. The sufficient condition of the feedback stabilization for the distributed parameter systems was obtained.

Key words: feedback stabilization; nonlinearity; distributed parameter system; finite dimensional feedback controller with an observer

1 引言(Introduction)

考虑具有下列一般形式的半线性分布参数控制系统

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + Au(t) = Bf(t) + Fu(t),\ u(0) = u_0, \tag{1}$$

$$y(t) = Cu(t). \tag{2}$$

其中状态变量 $u(t)$ 属于无穷维 Hilbert 空间 H，A 是 H 中具有稠定义域 $D(A)$ 的闭线性算子. $f(t) = (f_1(t),\cdots,f_r(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$ 是控制输入. F 是满足某种条件的非线性映射. $y(t)$ 是观测输出.

控制算子 $B:\mathbb{R}^r \to H$ 定义如下：

$$Bf(t) = \sum_{i=1}^{r} b_i f_i(t),\ b_i \in H,\ 1 \leqslant i \leqslant r. \tag{3}$$

$b_i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 称为控制输入的触发器(actuator).

观测算子 $C:H \to \mathbb{R}^p$ 定义如下：

$$y(t) = Cu(t) = (y_1(t),\cdots,y_p(t))^{\mathrm{T}} = ((c_1,u(t)),\cdots,(c_p,u(t)))^{\mathrm{T}},\ c_j \in H, 1 \leqslant j \leqslant p. \tag{4}$$

$c_j(1 \leqslant j \leqslant p)$ 称为状态观测的传感器(sensor).

记号$(\cdot,\cdot)$表示 H 中的内积，$|\cdot|$ 表示 H 中元素的范数.算子的范数表示为 $\|\cdot\|$.

对于线性的情形，即忽略非线性因素 F 时，这类控制问题的研究从20世纪70年代开始就吸引了很多学者的注意.开始是在 $H = L^2(\Omega)$ 上，如文[1]及[2]，后来推广到一般 Hilbert 空间上，如文[3]和[4].这类控制问题直接来源于力学系统和工程控制系统，具有很强的应用背景，参见文[1~4]，特别是文[2]中所引的大量关于工程系统的文献.文[5,6]中研究的反馈控制问题也归入系统(1).并且，文[1~6]中系统的主线性算子 A 都满足下面的假设1.

然而，实际的控制系统总不可避免地具有非线性的因素，线性只是非线性的一种理想化的近似.因此，非线性问题的研究受到人们的极大重视和关注，非线性系统稳定性的判定问题尤其重要.

但如文[7]中所指出的，相对于线性系统而言，"非线性系统的分析和设计要困难得多".例如，当本文仿照线性系统的做法，将非线性系统(1)按空间 H

收稿日期：2002-01-18；收修改稿日期：2003-02-28.
基金项目：国家自然科学基金项目(19871094)；广东省自然科学基金项目(990229).

的直和分解,通过投影分成子系统时,非线性系统(1)的各子系统是耦合在一起的,很难单个地分析和估计它们.

本文首先在线性情形将文[3]中在 $H = L^2(\Omega)$ 且 A 是自共轭算子的特殊情形推广到一般 Hilbert 空间 H 上且 A 可以是非自共轭的情形.然后进一步讨论了带有非线性项的形如(1)的半线性系统的有限维反馈稳定问题,得到经由有限维的观测输出反馈控制器达到系统指数稳定的充分条件的结果.

2 假设和引理(Assumption and lemma)

假设 1 设 H 是可分 Hilbert 空间,A 是 H 中具有稠定义域 $D(A)$ 的闭线性算子.A 具有离散点谱 $\sigma_p(A) = \{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$ 且

$$-\infty < \mathrm{Re}\,\lambda_1 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_n \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_{n+1} \leqslant \cdots,\ \mathrm{Re}\,\lambda_n \to \infty,$$

与特征值 $\{\lambda_i\}$ 对应的线性无关特征向量为 $\{\phi_{i1},\cdots,\phi_{im_i}\}$,且全体特征向量 $\{\phi_{ij},1\leqslant j\leqslant m_i,i\geqslant 1\}$ 构成 H 的规范完全正交基,并且存在某个实数 $c>0$ 使得:当 $j\geqslant n_0$ 时,$|\mathrm{Im}\,\lambda_j|\leqslant c\mathrm{Re}\,\lambda_j$.

用文[8]中讨论半群性质类似的方法可以证明下列引理 1.

引理 1 在假设 1 之下,设 $T(t)$ 是由 $-A$ 在 H 上生成的半群,则下列结论成立:

1) 对任给 $u = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m_i}(u,\phi_{ij})\phi_{ij}\in H$,有

$$T(t)u = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\mathrm{e}^{-\lambda_i t}(u,\phi_{ij})\phi_{ij},\ t\geqslant 0;$$

2) $T(t)u\in D(A),\ t>0$,

$$D(A)=\{u;u\in H,\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}|\lambda_i|^2(u,\phi_{ij})^2<\infty\},$$

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_i(u,\phi_{ij})\phi_{ij};$$

3) $T(t)u = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{m_i}\lambda_i\mathrm{e}^{-\lambda_i t}(u,\phi_{ij})\phi_{ij},\ t\geqslant 0$;

4) $T(t)$ 可微半群;

5) $T(t)$ 是紧半群;

6) $T(t)$ 是解析半群.

假设 2 设非线性映射 $F:H\to H$ 满足

$$|F(u)-F(v)|\leqslant \tilde{L}|u-v|,\ \forall u,v\in H,F(0)=0.$$

根据文[8]中第 355 页定理 5 及推论得出下面的引理 2.

引理 2 在假设 1 和 2 之下,系统(1)在 H 上是适定的:对每个初值 $u_0\in H$,方程(1)有唯一整体解

$$u(t)\in C([0,+\infty),H),\ u(t)\in D(A),\ t>0,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\in C((0,+\infty),H).$$

设 $\omega>0$ 是给定的常数,取正整数 l 使得 $\mathrm{Re}\,\lambda_{l+1}>\omega$,且取 $n>l$.以下记

$$\alpha_j = \mathrm{Re}\,\lambda_j,\ j=1,2,\cdots,$$
$$L = m_1+\cdots+m_l,$$
$$N = m_1+\cdots+m_n.$$

定义投影算子 P_n 和 Q_n 如下:

$$P_n u = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(u,\phi_{ij})\phi_{ij},\ Q_n = I-P_n,$$

$$P_{l,n}u = \sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i}(u,\phi_{ij})\phi_{ij},\forall u\in H.$$

记

$$u_{ij}(t)=(u(t),\phi_{ij}),\ 1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m_i,$$
$$u_i(t)=(u_{i1}(t),\cdots,u_{im_i}(t))^{\mathrm{T}},\ 1\leqslant i\leqslant n.$$
$$B_{ij}(t) = ((b_1,\phi_{ij}),\cdots,(b_r,\phi_{ij}))$$

是 r 维行向量,$1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m_i$.

$$\overline{B_i} = \begin{bmatrix} B_{i1}\\ \vdots \\ B_{im_i}\end{bmatrix}\text{是 } m_i\times r \text{ 矩阵}.$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \overline{B_1}\\ \vdots \\ \overline{B_l}\end{bmatrix}\text{是 } L\times r \text{ 矩阵}.$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \overline{B_{l+1}}\\ \vdots \\ \overline{B_n}\end{bmatrix}\text{是}(N-L)\times r \text{ 矩阵}.$$

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} u_1(t)\\ \vdots \\ u_l(t)\end{bmatrix}\text{是 } L \text{ 维列向量}.$$

$$x_2(t) = \begin{bmatrix} u_{l+1}(t)\\ \vdots \\ u_n(t)\end{bmatrix}\text{是}(N-L)\text{ 维列向量}.$$

$$A_1 = \mathrm{diag}\,(-\lambda_1 I_{m_1},\cdots,-\lambda_l I_{m_l}),$$
$$A_2 = \mathrm{diag}\,(-\lambda_{l+1} I_{m_{l+1}},\cdots,-\lambda_n I_{m_n}).$$

在以特征向量 $\{\phi_{ij}\}$ 为基底时,矩阵 A_1 理解为算子 P_lAP_l,$x_1(t)$ 理解为 $\sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{j=1}^{m_i}(u(t),\phi_{ij})\phi_{ij}$,其余类推.于是系统(1)分解为

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t)+B_1f(t)+P_lF(u(t)),\\ \dot{x}_2(t) = A_2x_2(t)+B_2f(t)+P_{l,n}F(u(t)),\\ Q_n\dot{u}(t) = -AQ_nu(t)+Q_nBf(t)+Q_nF(u(t)).\end{cases}$$

其中 $Q_nBf(t)$ 称为控制溢出.

类似地记

$$C_{ij}=\begin{bmatrix}(c_1,\phi_{ij})\\ \vdots\\ (c_p,\phi_{ij})\end{bmatrix}$$是 p 维列向量, $1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m_i$,

$\overline{C_i}=[C_{i1},\cdots,C_{im_i}]$ 是 $p\times m_i$ 矩阵.

$C_1=[\overline{C_1},\cdots,\overline{C_l}]$ 是 $p\times L$ 矩阵.

$C_2=[\overline{C_{l+1}},\cdots,\overline{C_n}]$ 是 $p\times(N-L)$ 矩阵.

于是式(2)为

$$y(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+S_nQ_nu(t).$$

其中 $S_n:Q_nH\to\mathbb{R}^p$,

$$S_nu=\begin{bmatrix}(Q_nc_1,u)\\ \vdots\\ (Q_nc_p,u)\end{bmatrix},\ \forall u\in Q_nH.$$

$S_nQ_nu(t)$ 称为观测溢出.

假设3 有限维的线性系统 (A_1,B_1,C_1) 是能控和能观的.

由文[10]和[11]知,假设3成立的充要条件是: $\operatorname{rank}\bar{B}_i=m_i$, $\operatorname{rank}\bar{C}_i=m_i$, $1\leqslant i\leqslant l$.

3 基于观测器输出的反馈控制器与闭环系统(Feedback controller with observer and closed loop control system)

利用有限维线性系统状态观测器理论所提供的方法和设计思想,本文采用下列的Luenberger型有限维观测器和控制器.

$$\dot z_1(t)=A_1z_1(t)+G_1C_1(x_1(t)-z_1(t))+G_1C_2(x_2(t)-z_2(t))+G_1S_nQ_nu(t)+B_1f(t),\tag{5}$$

$$\dot z_2(t)=A_2z_2(t)+B_2f(t),\tag{6}$$

$$f(t)=F_1z_1(t).\tag{7}$$

其中 G_1 和 F_1 分别为待定的 $L\times p$ 和 $r\times L$ 矩阵.

在这样的反馈控制下,式(1),(2)变为下列的闭环系统:

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot z_1\\ Q_n\dot u\\ \dot x_2\\ \dot z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & B_1F_1 & 0 & 0 & 0\\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 & G_1S_n & G_1C_2 & -G_1C_2\\ 0 & Q_nBF_1 & -AQ_n & 0 & 0\\ 0 & B_2F_1 & 0 & A_2 & 0\\ 0 & B_2F_1 & 0 & 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ z_1\\ Q_nu\\ x_2\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P_lF(u(t))\\ 0\\ Q_nF(u(t))\\ P_{l,n}F(u(t))\\ 0\end{bmatrix}.\tag{8}$$

记

$$w(t)=\begin{bmatrix}w_1(t)\\ w_2(t)\end{bmatrix},\ w_1(t)=\begin{bmatrix}x_1\\ z_1\\ Q_nu\end{bmatrix},\ w_2(t)=\begin{bmatrix}x_2\\ z_2\end{bmatrix},\ |w(t)|=(|w_1(t)|^2+|w_2(t)|^2)^{\frac12}.$$

本文往下讨论闭环系统(8)的指数稳定性.

4 闭环系统的指数稳定性(Exponential stability of closed loop systems)

首先,讨论线性的情形,即 $F=0$ 的情形.这时闭环系统(8)为

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot z_1\\ Q_n\dot u\\ \dot x_2\\ \dot z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & B_1F_1 & 0 & 0 & 0\\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 & G_1S_n & G_1C_2 & -G_1C_2\\ 0 & Q_nBF_1 & -AQ_n & 0 & 0\\ 0 & B_2F_1 & 0 & A_2 & 0\\ 0 & B_2F_1 & 0 & 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ z_1\\ Q_nu\\ x_2\\ z_2\end{bmatrix},\tag{9}$$

并且

$$x_2(t)-z_2(t)=e^{A_2t}(x_{20}-z_{20})$$

满足

$$|x_2(t)-z_2(t)|\leqslant e^{-\alpha_{l+1}t}|x_{20}-z_{20}|,\ t\geqslant 0.\tag{10}$$

将式(9)分解为下列两个子系统

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot z_1\\ Q_n\dot u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & B_1F_1 & 0\\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 & G_1S_n\\ 0 & Q_nF_1 & -AQ_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ z_1\\ Q_nu\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G_1C_2e^{A_2t}(x_{20}-z_{20})\\ 0\end{bmatrix}.\tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}\dot x_2\\ \dot z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_2 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_2F_1z_1\\ B_2F_1z_1\end{bmatrix}.\tag{12}$$

注意到式(11)是一个与式(12)无关的系统,即式(9)解耦成式(11)和(12).因此可以先独立估计式(11).

因为

$$\begin{bmatrix} I_L & 0 \\ I_L & I_L \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_L & 0 \\ -I_L & I_L \end{bmatrix},$$

且

$$\begin{bmatrix} I_L & 0 \\ -I_L & I_L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 & B_1F_1 \\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_L & 0 \\ I_L & I_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1+B_1F_1 & B_1F_1 \\ 0 & A_1-G_1C_1 \end{bmatrix}.$$

根据假设3,由极点配置定理,存在 F_1 和 G_1 使得 $A_1+B_1F_1$ 和 $A_1-G_1C_1$ 的特征值分别为 $\{-\eta_1,\cdots,-\eta_L\}$ 和 $\{-\eta_{L+1},\cdots,-\eta_{2L}\}$ 且满足

$$\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{2L},\ \alpha_{l+1} < \eta_1 < \alpha_{n+1}.$$

记

$$A_{11} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1F_1 \\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1F_1 & 0 \\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 & 0 \\ 0 & 0 & -AQ_n \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_1S_n \\ 0 & Q_nBF_1 & 0 \end{bmatrix},$$

则 A_{11} 生成的半群 $e^{A_{11}t}$ 满足

$$\| e^{A_{11}t} \| \leqslant M_1 e^{-\eta_1 t},\ t \geqslant 0,$$

其中 $M_1 \geqslant 1$ 为一个与 n 无关的常数.又 $-AQ_n$ 生成的半群 e^{-AQ_nt} 满足

$$\| e^{-AQ_nt} \| \leqslant e^{-\alpha_{n+1}t},\ t \geqslant 0.$$

所以,$\tilde{A}$ 生成的半群 $e^{\tilde{A}t}$ 满足

$$\| e^{\tilde{A}t} \| \leqslant M_1 e^{-\eta_1 t},\ t \geqslant 0. \tag{13}$$

根据半群的扰动理论由 $\tilde{A}+\tilde{B}$ 生成的半群满足

$$\| e^{(\tilde{A}+\tilde{B})t} \| \leqslant M_1 e^{-(\eta_1 - M_1\|\tilde{B}\|)t},\ t \geqslant 0.$$

注意到 A_1,F_1,G_1 的范数与 l 有关而与 n 无关. B_1, B_2,C_1,C_2 的范数是一致有界的,与 l 和 n 都无关.又

$$\| Q_nB \| \leqslant (|Q_nb_1|^2 + \cdots + |Q_nb_r|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\| S_n \| \leqslant (|Q_nc_1|^2 + \cdots + |Q_nc_p|^2)^{\frac{1}{2}},$$

当 $n \to \infty$ 时,$\| Q_nB \| \to 0$, $\| S_n \| \to 0$.所以,当 $n \to \infty$ 时,$\| \tilde{B} \| \to 0$.取 n 充分大使得 $\alpha_{l+1} < \eta_1 - M_1\|\tilde{B}\|$,并记 $\eta = \eta_1 - M_1\|\tilde{B}\|$,则

$$\omega < \alpha_{l+1} < \eta < \eta_1,$$

$$\| e^{(\tilde{A}+\tilde{B})t} \| \leqslant M_1 e^{-\eta t},\ t \geqslant 0.$$

对于子系统(11),由常数变易公式知

$$w_1(t) = e^{(\tilde{A}+\tilde{B})t}w_{10} + \int_0^t e^{(\tilde{A}+\tilde{B})(t-s)} G_1C_2e^{A_2s}(x_{20}-z_{20})\mathrm{d}s.$$

由此直接估计可得

$$| w_1(t) | \leqslant M_2 e^{-\alpha_{l+1}t},\ t \geqslant 0. \tag{14}$$

其中

$$M_2 = M_1(|w_{10}| + \|G_1\|\|C_2\|(\eta-\alpha_{l+1})^{-1}|x_{20}-z_{20}|).$$

其次在式(14)的基础上估计式(12).

记

$$A_{22} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} B_2F_1 \\ B_2F_1 \end{bmatrix},$$

则 $\| B_{22} \| \leqslant \sqrt{2}\| B_2 \| \| F_1 \|$,由 A_{22} 生成的半群满足 $\| e^{A_{22}t} \| \leqslant e^{-\alpha_{l+1}t},\ t \geqslant 0$. 由

$$w_2(t) = e^{A_{22}t}w_{20} + \int_0^t e^{A_{22}(t-s)}B_{22}z_1(s)\mathrm{d}s,$$

用与式(14)相同的方法可得

$$| w_2(t) | \leqslant M_3 e^{-\omega t},\ t \geqslant 0. \tag{15}$$

其中

$$M_3 = |w_{20}| + \sqrt{2}M_2\|F_1\|\|B_2\|(\alpha_{l+1}-\omega)^{-1}.$$

综合式(14)和(15)得到闭环系统(9)的指数稳定性结论如下:

定理 1 设假设1和假设3成立,则对任给的 $\omega > 0$,存在常数 K,使得系统(9)从任何初值 w_0 出发的轨线 $w(t)$ 满足

$$| w(t) | \leqslant K |w_0| e^{-\omega t},\ t \geqslant 0. \tag{16}$$

其中 K 是依赖于 A_1,F_1,G_1 以及 B 和 C 的一个常数.

其次,讨论非线性的情形.这时,从式(8)不能独立于 x_2 和 z_2 而分解出 x_1,z_1 和 Q_nu,因此不能独立于 x_2 和 z_2 而单独估计 x_1,z_1 和 Q_nu.并且,先取定 l 再选取充分大的 $n > l$,这种在线性情形能成功地处理观测增益 S_n 和控制增益 Q_uB 的方法到非线性情形也失效了.所以,在非线性时,取 $n = l$.记 $x_1(t) = P_nu(t)$,这时式(8)简化为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{z}_1 \\ Q_n\dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1F_1 & 0 \\ G_1C_1 & A_1-G_1C_1+B_1F_1 & G_1S_n \\ 0 & Q_nBF_1 & -AQ_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \\ Q_nu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_nF(u(t)) \\ 0 \\ Q_nF(u(t)) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$w(t)=\begin{bmatrix}x_1\\ z_1\\ Q_n u\end{bmatrix},\ \tilde{F}(w(t))=\begin{bmatrix}P_n F(u(t))\\ 0\\ Q_n F(u(t))\end{bmatrix},\tag{18}$$

由

$$w(t)=\mathrm{e}^{(\tilde{A}+\tilde{B})t}w_0+\int_0^t \mathrm{e}^{(\tilde{A}+\tilde{B})(t-s)}\tilde{F}(w(s))\mathrm{d}s,\tag{19}$$

并注意到

$$|\tilde{F}(w(s))|=|F(u(s))|\leqslant \tilde{L}|u(s)|\leqslant \tilde{L}|w(s)|.$$

应用 Gronwall 不等式可得

$$|w(t)|\leqslant M_1|w_0|\mathrm{e}^{-(\eta_1-M_1\|\tilde{B}\|-M_1\tilde{L})t}.\tag{20}$$

所以,只要适当地选取 F_1 和 G_1 使得相应的 η_1 和 M_1 满足

$$\eta_1-M_1\|\tilde{B}\|-M_1\tilde{L}>0,\tag{21}$$

那么闭环耦合系统(17)指数稳定,即有下列的定理.

定理 2 设假设 1,2 和 3 成立,如果控制算子 B 和观测算子 C 及反馈算子 G_1 和 F_1 的选取使得 $\eta=\eta_1-M_1\|\tilde{B}\|-M_1\tilde{L}>0$,那么闭环系统(17)指数稳定且 $|w(t)|\leqslant M_1|w_0|\mathrm{e}^{-\eta t},t\geqslant 0$,其中 M_1 和 η_1 为式(13)中所给出.

参考文献(References):

[1] SAKAWA Y. Feedback stabilization of linear diffusion systems [J]. *SIAM J Control and Optimization*, 1983,21(5):667 - 676.

[2] BALAS M J. Model control of certain flexible dynamic systems [J]. *SIAM J Control and Optimization*, 1978,16(3):450 - 462.

[3] BALAS M J. Finite-dimensional controllers for linear distributed parameter systems: exponential stability using residual mode filters [J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, 133(2):283 - 296.

[4] BALAS M J. Stable feedback control of linear distributed parameter systems: . time and frequency domain conditions [J]. *J of Mathematical Analysis and Applications*, 1998,225(1):144 - 167.

[5] YOU Yuncheng. Inertial manifolds and stabilization in nonlinear elastic systems with structural damping [A]. *Differeqntial Equations with Applications to Mathematical Physics* [C]. Boston: Academic Press, 1993:335 - 346.

[6] XU Chengzhong, BAILLIEUL J. Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993,38(12):1754 - 1765.

[7] 胡跃明,胡终须,毛宗源,等.非线性控制系统的近似化方法[J].控制理论与应用,2001,18(2):160 - 165.
(HU Yueming, HU Zhongxu, MAO Zongyuan, et al. Approximation methods of nonlinear control systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(2): 160 - 165.)

[8] 周鸿兴,王连文.线性算子半群理论及其应用[M].济南:山东科学技术出版社,1994:160 - 355.
(ZHOU Hongxing, WANG Lianwen. *Semigroups of linear operators theory and applications* [M]. Jinan: Shandong Science and Technology Press, 1994:160 - 355.)

[9] YOSHIYUKI S. Controllability for partial differential equations of parabolic type [J]. *Siam J Control and Optimization*, 1974,12(3):389 - 400.

[10] YOSHIYUKI S. Observability and related problems for partial differential equations of parabolic type [J]. *SIAM J Control and Optimization*, 1975,13(1):14 - 27.

作者简介:

陈显强 (1962 —),男,理学博士,现为广东广播电视大学理工部副教授,目前主要研究兴趣为动力系统与控制系统相关理论问题及其应用. E-mail: xqchen@gdrtvu.edu.cn;

赵 怡 (1940 —),男,现为中山大学数学系教授,博士生导师,目前主要研究兴趣为无穷维动力系统与控制系统. E-mail: stszy@zsu.edu.cn.