区间矩阵二次稳定的充分必要条件

毛维杰

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室, 先进控制研究所 浙江 杭州, 310027)

摘要: 提出了区间矩阵二次稳定的充分必要条件, 以及相应的稳定裕度的计算方法. 结论以线性矩阵不等式 (LMI) 的形式给出. 利用功能强大的 LMI 工具, 求解非常方便. 所给实例表明, 该方法用于确定区间矩阵的鲁棒稳定性及其稳定裕度, 非常有效.

关键词: 区间矩阵; 二次稳定性; 稳定裕度; 线性矩阵不等式 (LMI)

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Necessary and sufficient condition for quadratic stability of interval matrices

MAO Wei-jie

(National Lab of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Zhejiang Hangzhou, 310027, China)

Abstract: A necessary and sufficient condition was presented for the quadratic stability of interval matrices and a related calculation method of stability margin. The results were obtained in terms of LMIs. With the powerful LMI toolbox, it was very convenient to solve this problem. Examples showed that this method is effective in determining the robust stability and related stability margin of interval matrices.

Key words: interval matrices; quadratic stability; stability margin; linear matrix inequality (LMI)

1 引言 (Introduction)

近年来关于区间系统的鲁棒稳定性研究已引起了国内外控制界的广泛关注, 其研究对象主要包括区间多项式与区间矩阵系统. 区间矩阵的鲁棒稳定性分析要比区间多项式困难, 主要表现在顶点与棱边稳定性原理已不再适用^[1]. 尽管如此, 区间矩阵的鲁棒稳定性研究也已取得了许多成果^[1-14]. 当然, 其中大部分都是保证区间矩阵鲁棒稳定的充分条件. 文[1]对其之前的区间矩阵的鲁棒稳定性研究成果作了比较全面的综述, 若要了解详细情况, 可查阅其中引用的文献. 文[6]提出了区间矩阵鲁棒稳定的充分必要条件, 即当且仅当所有的二维棱面稳定. 由于二维棱面的数量相当庞大, 如对于 4×4 维区间矩阵, 其个数为 1966080, 因此没有实用意义. 文[7, 8]通过对区间矩阵的有限划分, 提出了充分必要条件, 但就其算法的本质而言, 在每一子区间上应用的仍然是充分条件, 其计算量实际上依赖于所基于的充分条件的保守程度上. 因此, 寻求简单而有效的区间矩阵鲁棒稳定性判据仍然具有深远的理论和实际意义.

由于二次稳定性原理在处理不确定系统鲁棒稳定性问题时的方便性和有效性, 已有学者把其应用于区间系统研究中. 由此而获得的一个原始结论是, 区间矩阵二次稳定当且仅当其所有的顶点矩阵二次稳定. 但考虑到顶点矩阵在数量上十分庞大, 该结果没有实用意义. 文[10~12]基于二次稳定性原理分别给出了区间矩阵鲁棒稳定的充分条件. 其中, 文[12]给出的充分条件, 需对其所有的顶点矩阵进行判别, 因此也是没有实用意义的. 本文在上述文献的基础上, 提出了区间矩阵二次稳定的充分必要条件, 结论以线性矩阵不等式的形式给出. 利用成熟的 LMI 工具, 求解非常方便.

2 问题描述 (Problem formulation)

考虑如下的区间系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (1)$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为系统(1)的状态和系统矩阵, 记 $A^m = [a_{ij}^m]_{n \times n}$, $A^M = [a_{ij}^M]_{n \times n}$, 则 $[A^m, A^M] = \{[a_{ij}]: a_{ij}^m \leq a_{ij} \leq a_{ij}^M, 1 \leq i, j \leq n\}$, (2)

其中 A^m, A^M 是已知的实矩阵.若令

$$A_0 = \frac{1}{2}[A^m + A^M], \tag{3}$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}[A^M - A^m], \tag{4}$$

则区间矩阵 A 可表示为

$$A = A_0 + \sum_{i,j=1}^n e_i f_{ij} e_j^T, |f_{ij}| \leq \Delta a_{ij}. \tag{5}$$

其中 $e_k \in \mathbb{R}^n$ 表示第 k 元素为 1,其余元素为 0 的列向量.本文研究区间系统(1)的二次稳定性问题,这里不妨假定 A_0 稳定,否则研究系统(1)的稳定性已没有意义.

定义 1 如果存在对称正定矩阵 P ,使得对于所有 $A \in [A^m, A^M]$, 满足 Lyapunov 不等式

$$A^T P + PA < 0, \tag{6}$$

则称区间系统(1)是二次稳定的.

对于区间系统(1),在研究其稳定性问题时,还经常需要考虑其稳定裕度问题.为此,本文引入 σ -稳定的概念.

定义 2 给定 $\sigma \geq 0$,如果存在对称正定矩阵 P ,使得对于所有 $A \in [A^m, A^M]$, 满足 Lyapunov 不等式

$$A^T P + PA + 2\sigma P < 0, \tag{7}$$

则称区间系统(1)是二次 σ -稳定的,相应的稳定裕度为 $M = \sigma$.

显然,二次稳定只是二次 σ -稳定在 $\sigma = 0$ 时的特例.因此,在以下的分析中,所有结论均以二次 σ -稳定的形式描述.

引理 1^[16] 设 X, Y, F 为具有合适维数的实矩阵,其中 $F^T F \leq I$,则对任意参数 $\lambda > 0$, 满足

$$XFY + Y^T F^T X^T \leq \lambda XX^T + \frac{1}{\lambda} Y^T Y. \tag{8}$$

引理 2^[16] 设 X, Y, F 为具有合适维数的实矩阵,则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$\max \{(x^T XFYx)^2 : F^T F \leq I\} = x^T X X^T x x^T Y^T Y x. \tag{9}$$

引理 3^[16] 对任意 $X, Y, Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其中 $X \geq 0, Y < 0, Z \geq 0$,如果对任意非零 $x \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$(x^T Yx)^2 - 4(x^T Xx x^T Zx) > 0, \tag{10}$$

则存在参数 $\lambda > 0$, 满足

$$\lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0. \tag{11}$$

3 主要结果(Main results)

定理 1 给定 $\sigma \geq 0$,区间系统(1)是二次 σ -稳定的,当且仅当存在对称正定矩阵 P ,参数 $\lambda_{ij} > 0$,

$i, j = 1, 2, \dots, n$, 满足

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 + 2\sigma P + \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 e_j e_j^T & U \\ U^T & -V \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

其中

$$U = [Pe_1 \cdots Pe_1 \cdots Pe_n \cdots Pe_n], \tag{13}$$

$$V = \text{diag} \{ \lambda_{11} \cdots \lambda_{1n} \cdots \lambda_{n1} \cdots \lambda_{nn} \}. \tag{14}$$

相应的稳定裕度为 $M = \sigma$.

证 充分性.利用引理 1,对任意参数 $\lambda_{ij} > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$A^T P + PA + 2\sigma P = A_0^T P + PA_0 + 2\sigma P + \sum_{i,j=1}^n [(e_i f_{ij} e_j^T)^T P + P(e_i f_{ij} e_j^T)] \leq$$

$$A_0^T P + PA_0 + 2\sigma P + \sum_{i,j=1}^n [\lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 e_j e_j^T + \frac{1}{\lambda_{ij}} P e_i e_i^T P] < 0,$$

则由定义 2 可知,区间系统(1)是二次 σ -稳定的.

必要性.设区间系统(1)是二次 σ -稳定的,则由定义 2 可知,存在对称正定矩阵 P , 满足 Lyapunov 不等式

$$S_{00} = A^T P + PA + 2\sigma P = A_0^T P + PA_0 + 2\sigma P + \sum_{i,j=1}^n [(e_i f_{ij} e_j^T)^T P + P(e_i f_{ij} e_j^T)] < 0.$$

定义 $T_{11} = S_{00} - (e_1 f_{11} e_1^T)^T P - P(e_1 f_{11} e_1^T)$, 则对任意非零 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^T T_{11} x < -2 \max \{x^T P e_1 f_{11} e_1^T x : |f_{11}| \leq \Delta a_{11}\} \leq 0,$$

因此 $(x^T T_{11} x)^2 > 4(\max \{x^T P e_1 f_{11} e_1^T x : |f_{11}| \leq \Delta a_{11}\})^2 = 4 \max \{(x^T P e_1 f_{11} e_1^T x)^2 : |f_{11}| \leq \Delta a_{11}\}.$

利用引理 2,有 $(x^T T_{11} x)^2 > 4\Delta a_{11}^2 x^T P e_1 e_1^T P x x^T e_1 e_1^T x.$

利用引理 3,存在参数 $\lambda_{11} > 0$, 满足 $\lambda_{11}^2 \Delta a_{11}^2 e_1 e_1^T + \lambda_{11} T_{11} + P e_1 e_1^T P < 0,$

即 $S_{11} = T_{11} + \lambda_{11} \Delta a_{11}^2 e_1 e_1^T + \frac{1}{\lambda_{11}} P e_1 e_1^T P < 0.$

定义 $T_{12} = S_{11} - (e_1 f_{12} e_2^T)^T P - P(e_1 f_{12} e_2^T)$, 则对任意非零 $x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$x^T T_{12} x < -2 \max \{x^T P e_1 f_{12} e_2^T x : |f_{12}| \leq \Delta a_{12}\} \leq 0,$$

因此 $(x^T T_{12} x)^2 > 4(\max \{x^T P e_1 f_{12} e_2^T x : |f_{12}| \leq \Delta a_{12}\})^2 = 4 \max \{(x^T P e_1 f_{12} e_2^T x)^2 : |f_{12}| \leq \Delta a_{12}\}.$

利用引理 2, 有

$$(x^T T_{12} x)^2 > 4\Delta a_{12}^2 x^T P e_1 e_1^T P x x^T e_2 e_2^T x.$$

利用引理 3, 存在参数 $\lambda_{12} > 0$, 满足

$$\lambda_{12}^2 \Delta a_{12}^2 e_2 e_2^T + \lambda_{12} T_{12} + P e_1 e_1^T P < 0,$$

即

$$S_{12} = T_{12} + \lambda_{12} \Delta a_{12}^2 e_2 e_2^T + \frac{1}{\lambda_{12}} P e_1 e_1^T P < 0.$$

以此类推, 最终可得

$$S_{nn} =$$

$$A_0^T P + P A_0 + 2\sigma P + \sum_{i,j=1}^n [\lambda_{ij} \Delta a_{ij}^2 e_j e_j^T + \frac{1}{\lambda_{ij}} P e_i e_i^T P] < 0.$$

由 Schur 补可知, 上式与式(12)等价. 必要性得证.

通过对式(5)的观察, 不难发现, 上述结果可推广到参数不确定系统, 即

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \sum_{i=1}^r \epsilon_i A_i) x(t). \quad (15)$$

其中不确定参数 $|\epsilon_i| \leq \bar{\epsilon}_i$, A_0, A_i 均为已知的实矩阵. 这里不妨假定 A_0 稳定, 否则研究系统(15)的稳定性已没有意义.

定义 3 给定 $\sigma \geq 0$, 如果存在对称正定矩阵 P , 使得对于所有 $|\epsilon_i| \leq \bar{\epsilon}_i, i = 1, 2, \dots, r$, 满足 Lyapunov 不等式

$$(A_0 + \sum_{i=1}^r \epsilon_i A_i)^T P + P (A_0 + \sum_{i=1}^r \epsilon_i A_i) + 2\sigma P < 0, \quad (16)$$

则称参数不确定系统(15)是二次 σ -稳定的, 相应的稳定裕度为 $M = \sigma$.

定理 2 给定 $\sigma \geq 0$, 参数不确定系统(15)是二次 σ -稳定的, 如果存在对称正定矩阵 P , 参数 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, r$, 满足

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + P A_0 + 2\sigma P + \sum_{i=1}^r \lambda_i \bar{\epsilon}_i^2 I & P A_1 & \dots & P A_r \\ A_1^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ A_r^T P & 0 & 0 & -\lambda_r I \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

相应的稳定裕度为 $M = \sigma$.

注 1 定理 2 是一个充分条件. 参数不确定系统(15)中, 若 A_i 具有秩-1 型分解, 则可得到与定理 1 结论类似的充分必要条件, 具体描述可参照定理 1, 这里不再赘述.

4 算法与实例 (Algorithm and examples)

本文基于二次稳定性原理提出了区间矩阵系统的鲁棒稳定性条件, 其结果以线性矩阵不等式的形

式给出. 算法可利用成熟的 LMI 工具, 求解非常方便. 下面从有关文献引用了一些典型实例, 来说明本文所给方法的有效性.

例 1 考虑 Wang 等人所给实例^[8], 其中

$$A^m = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A^M = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 & 1.5 \\ -3 & -3 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & -4 & 0 \\ 0.1 & 1 & 2 & -2.5 \end{bmatrix}.$$

文[8]通过对区间矩阵的有限分解, 判定其鲁棒稳定, 迭代次数为 19. 利用定理 1, 不需迭代, 直接就可判定该区间矩阵系统二次稳定 ($\sigma = 0$). 进一步, 可确定系统二次 σ -稳定, $\sigma = 1.07$, 则稳定裕度 $M = 1.07$. 线性矩阵不等式(12)的一个可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 256.4324 & -4.8843 & 84.0680 & -128.2525 \\ -4.8843 & 341.6035 & 43.9920 & -50.2458 \\ 84.0680 & 43.9920 & 218.5275 & -35.0688 \\ -128.2525 & -50.2458 & -35.0688 & 379.7750 \end{bmatrix},$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 498.1829 & 652.7368 & 871.4876 & 196.4445 \\ 498.3983 & 659.3524 & 640.9845 & 502.9647 \\ 346.9657 & 458.9113 & 445.4798 & 349.7467 \\ 628.6058 & 910.3557 & 884.9701 & 465.8978 \end{bmatrix}.$$

例 2 考虑 Garofalo 等人所给实例^[12]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(0.3p^2 + 0.7) & -p \end{bmatrix} x(t),$$

当 $p \in [0.6, 2.0]$ 时, 判定其鲁棒稳定性.

为简化起见, 可把上述参数不确定系统看作区间矩阵系统, 即认为矩阵元素的变化是相互独立的, 则有

$$A^m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.9 & -2.0 \end{bmatrix}, A^M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.808 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

利用定理 1, 直接就可判定该区间矩阵系统二次稳定 ($\sigma = 0$), 从而判定原参数不确定系统鲁棒稳定, 不需要如文[12]那样进行众多的顶点矩阵的判别. 进一步, 可确定系统二次 σ -稳定, $\sigma = 0.04$, 则稳定裕度 $M = 0.04$, 线性矩阵不等式(12)的一个可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 7.1011 & 1.5282 \\ 1.5282 & 5.2407 \end{bmatrix}, \lambda = \begin{bmatrix} 1249.7 & 1249.7 \\ 9.8860 & 7.7255 \end{bmatrix}.$$

例 3 考虑 Zhou 等人所给实例^[15]

$$A(\epsilon) =$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

当 $|\varepsilon_1| \leq 1.74$, $|\varepsilon_2| \leq 2.99$ 时,判定其鲁棒稳定性.

上述参数不确定系统可描述为秩-1型分解,即

$A(\varepsilon) =$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \varepsilon_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据定理1的类似结论,直接就可判定该参数不确定系统二次稳定($\sigma = 0$),结果要优于文[15].进一步,可确定系统二次 σ -稳定, $\sigma = 0.009$,表明上述参数界已近似为实际的允许摄动界.线性矩阵不等式(12)的一个可行解为

$$P = \begin{bmatrix} 1.1780 & 0.1701 & -1.1881 \\ 0.1701 & 13167 & -1.6034 \\ -1.1881 & -1.6034 & 4.2805 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 0.4399, \lambda_2 = 4403.3.$$

5 结论(Conclusions)

本文基于二次稳定性原理提出了区间矩阵系统二次稳定的充分必要条件,由于二次稳定性原理本身所固有的保守性,该条件只是区间矩阵鲁棒稳定的充分条件,但仍不失是一个非常有效的判据,该结果还可推广到参数不确定系统的鲁棒稳定性分析.本文的所有结论均以线性矩阵不等式的形式给出,目前LMI的解法已非常成熟,例如可直接利用Matlab的LMI工具箱求解.

参考文献(References):

- [1] SEZER M E, SILJAK D D. On stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 368 - 371.
- [2] MANSOUR M. Robust stability of interval matrices [A]. *Proc of 28th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Tampa, Florida: IEEE Control Systems Society, 1989: 46 - 51.
- [3] BHAYA A, KASZKUREWICZ E. Comments regarding "On stability of interval matrices" [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(5): 762 - 766.
- [4] MAO W J, SUN Y X. Criteria for robust stability of dynamic interval systems [A]. *Proc of 35th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Kobe: IEEE Control Systems Society, 1996: 45 - 46.
- [5] DELGADO-ROMERO J J D, SUAREZ-MEZA H, ACOSTA-VILLARREAL G, et al. Robust stability of interval matrices: simple tests [A]. *Proc of the 40th Midwest Symposium on Circuits and Systems* [C]. Sacramento CA: IEEE Circuits and Systems Society, 1997: 533 - 536.
- [6] XIAO Y, UNBEHAUEN R. Robust hurwitz and schur stability test for interval matrices [A]. *Proc of 39th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Sydney: IEEE Control Systems Society, 2000: 4209 - 4214.
- [7] ROHN J. An algorithm for checking stability of symmetric interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(1): 133 - 136.
- [8] WANG K, MICHEL A N, LIU D. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1251 - 1255.
- [9] HMAMED A, EL BOUCHRA M. Comments on "Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices" [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(2): 311.
- [10] HAN H S, LEE J G. Stability analysis of interval matrices by Lyapunov function approach including ARE [J]. *Control Theory & Advanced Technology*, 1993, 9(3): 745 - 757.
- [11] PADMANABHAN P, HOLLOT C V. Quadratic stability of interval matrices [A]. *Proc of 32th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. San Antonio, Texas: IEEE Control Systems Society, 1993: 2010 - 2011.
- [12] GAROFALO F, CELENTANO G, GLIELMO L. Stability robustness of interval matrices via Lyapunov quadratic forms [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 281 - 284.
- [13] 年晓红. 区间矩阵稳定的新充分必要条件[J]. *控制理论与应用*, 1998, 15(4): 489 - 493.
(NIAN X. New necessary and sufficient condition for the stability of symmetric interval matrices [J]. *Control Theory and Applications*, 1998, 15(4): 489 - 493.)
- [14] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 动态区间系统的鲁棒稳定性[J]. *控制理论与应用*, 2001, 18(1): 113 - 115.
(WU F, SHI Z, DAI G. On robust stability of dynamic interval systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(1): 113 - 115.)
- [15] ZHOU K, KHARGONEKAR P P. Stability robustness bounds for linear state space models with structured uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(7): 621 - 623.
- [16] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems [J]. *Systems and Control Letters*, 1987, 8(3): 351 - 357.

作者简介:

毛维杰 (1969—), 男, 1991年毕业于浙江大学, 1996年获浙江大学工学博士学位, 现为浙江大学副教授. 主要研究方向为电气传动与控制, 时滞系统控制, 解耦控制, 鲁棒控制等理论与应用. E-mail: wjmiao@iipc.edu.cn.