

鲁棒控制基准设计问题: 倒立摆控制

申铁龙, 梅生伟, 王 宏, 陈增强

1 系统概述

本系统由水平移动的小台车及由其支撑的单节倒立摆构成. 控制输入量是拖动小台车的直流伺服电机的电枢电压, 被控制量是摆的偏角和小台车的位移. 系统的构成示意如图1.

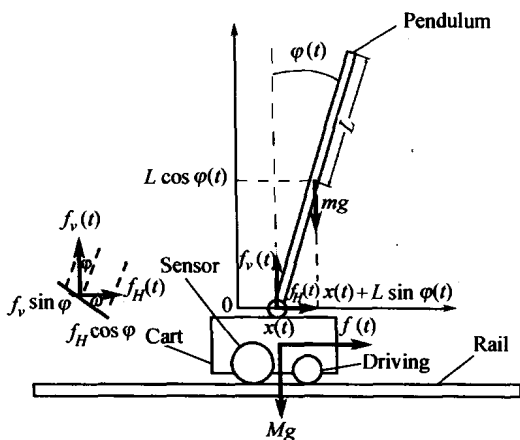


图1 系统示意图

2 系统的运动方程

2.1 驱动电机

记电枢电压和电流分别为 $v(t)$ (V) 和 $i_a(t)$ (A), 则电机的动态方程为

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a}{dt}(t) + K_E \omega(t) = v(t), \quad (1)$$

$$\tau(t) = K_T i_a(t). \quad (2)$$

其中 R_a (Ω) 和 L_a (H) 分别为电枢电阻和电枢电感, K_E (Vs/rad) 为反向电势系数, K_T (Nm/A) 为力矩系数, 一般可取 $K_E = K_T$. $\omega(t)$ (rad/s) 表示电机的转子的角速度, $\tau(t)$ (Nm) 为电机的输出力矩.

2.2 电机转角与小台车位置的关系

记电机转子的角位移为 $\theta(t)$ (rad), 齿轮比 K_g , 则小台车的驱动轮 $\theta_c(t)$ (rad) 可以表示为

$$\theta(t) = K_g \theta_c(t). \quad (3)$$

进一步, 记驱动轮的半径为 r (m), 小台车的位移为 $x(t)$ (m), 那么, 有

$$x(t) = r \theta_c(t) = \frac{r}{K_g} \theta(t), \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r}{K_g} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r}{K_g} \omega(t). \quad (5)$$

2.3 小台车的运动方程

设小台车的质量为 M (kg), $f(t)$ (N) 为由电机提供的 x 方向的驱动力, 则

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t) - f_F(t). \quad (6)$$

其中 f_F (N) 表示摆的水平运动对台车的作用力, 其方向与驱动力 $f(t)$ (N) 的方向相反, 而驱动力 f 与电机输出力矩 τ 的关系为

$$f(t) = \frac{K_g}{r} \tau(t). \quad (7)$$

2.4 摆的运动方程

以小台车与摆的节点为坐标原点, 取坐标系如图1. 那么, 摆的运动由水平方向, 铅直方向以及旋转方向的运动来构成. 记摆的质心距节点的距离为 L (m), 摆的质量为 m (kg), 摆的偏移角为 $\varphi(t)$, 那么摆的质心沿各个运动方向的位移分别为

- 水平方向: $x(t) + L \sin \varphi(t)$ (m);
- 铅直方向: $L \cos \varphi(t)$ (m);
- 旋转方向: $\varphi(t)$ (rad).

且各个方向的运动方程可以表示为

$$m \frac{d^2}{dt^2} [x(t) + L \sin \varphi(t)] = f_H(t), \quad (8)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} [L \cos \varphi(t)] = f_V(t) - mg, \quad (9)$$

$$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + C \frac{d\varphi(t)}{dt} = L f_V(t) \sin \varphi(t) - L f_H(t) \cos \varphi(t). \quad (10)$$

其中 $f_H(t)$ (N) 和 $f_V(t)$ (N) 分别表示作用在节点上的沿水平方向和铅直方向的反作用力. 记转动惯量为 $J = mL^2/3$, 摩擦系数为 C , 则由式(8)和(9)求得 f_H 和 f_V , 并代入式(10), 得

$$(J + mL^2) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (mL \cos \varphi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -C \frac{d\varphi(t)}{dt} + mLg \sin \varphi(t). \quad (11)$$

由于摆的水平方向的推力 $f_F(t)$ 等于摆的水平运动作用在台车上的阻力 $f_H(t)$, 即

$$f_F(t) = f_H(t). \quad (12)$$

将式(8)的 $f_H(t)$ 代入式(6), 得到小台车的运动方程如下

$$(M+m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + (mL \cos \varphi(t)) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = f(t) + mL \sin \varphi(t) \left\{ \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\}^2. \quad (13)$$

2.5 被控对象的运动方程

如果忽略电枢回路的电感,即令 $L_a = 0$, 则根据上述推导,有

$$f(t) = \frac{K_g}{r} \tau(t) = \frac{K_g K_T}{r} i_a(t) = \frac{K_T K_g}{R_a r} (v(t) - K_T \omega(t)) = \frac{K_T K_g}{R_a r} v(t) - \frac{K_T^2 K_g^2}{R_a r^2} \frac{dx(t)}{dt}. \quad (14)$$

故,倒立摆系统的动态可以由如下微分方程组来描述:

$$(J + mL^2) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (mL \cos \varphi(t)) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -C \frac{d\varphi(t)}{dt} + mLg \sin \varphi(t), \quad (15)$$

$$(M+m) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{K_T^2 K_g^2}{R_a r^2} \frac{dx(t)}{dt} + (mL \cos \varphi(t)) \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = \frac{K_T K_g}{R_a r} v(t) + mL \sin \varphi(t) \left\{ \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\}^2. \quad (16)$$

3 不确定性

在上述建模过程中,台车水平方向的运动未考虑摩擦因素产生的阻尼力.如果我们考虑台车与导轨接触面的摩擦特性,那么台车水平方向的运动方程为

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t) - f_f(t) - \delta(x). \quad (17)$$

其中 $\delta(x)$ 表示摩擦力,可以近似描述为接触面速度 $\dot{x}$ 的非线性函数(详细参见文献[1,5]).另外,摆的转动方程中节点的摩擦系数 C 通常也是难以精确得到的参数.这里假设

$$C = C_0 \pm \Delta C, \quad |\delta(x)| \leq \gamma |x|. \quad (18)$$

其中, C_0 表示摩擦系数的标称值, ΔC 为未知的摄动值, $\gamma > 0$ 为给定的正数.

4 物理参数

- 台车的质量 (M): 0.455 (kg);
- 摆的质量 (m): 0.210 (kg);
- 电机力矩系数 (K_T): 7.767×10^{-3} (Nm/A);
- 反向电势系数 (K_E): 7.767×10^{-3} (Vs/rad);
- 电枢电阻 (R_a): 2.6 (Ω);
- 台车驱动轮半径 (r): 6.35×10^{-3} (m);
- 齿轮比 (K_g): 3.7;
- 重力加速度 (g): 9.8 (m/s²);

· 质心距节点的距离 (L): 0.305 (m);

5 标准设计问题

5.1 标称系统的设计

设 $\delta(x) = 0, \Delta C = 0$, 且 $C_0 = 0.06$ (Nm/s).

1) 摆的镇定问题. 设计状态反馈控制器, 使得闭环系统满足如下性能: 给定初始状态 $x(0) = x(0) = \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$, 沿 $f(t)$ 方向给台车施加脉冲力 $40\delta(t)$ (N) (这里 $\delta(t)$ 表示脉冲函数), 其响应满足 $\varphi(t) \rightarrow 0$, 并且

$$|\varphi(t)| \leq 0.02 \text{ (rad)}; \quad t \geq 0.5 \text{ (s)};$$

$$|x(t)| \leq 0.01 \text{ (m)}, \quad t \geq 1.0 \text{ (s)}$$

并给出评价值 $\int_0^6 \varphi^2(\tau) d\tau$. 控制输入信号满足 $|v(t)| \leq 10.0$ (V).

2) 台车位置调节问题. 设计状态反馈控制器, 使得系统满足上述(1), 同时满足如下条件: 与(1)相同的条件下运行 5 (s) 后, 对小台车给出 $x_d = 0.2$ (m) 的平移指令. 系统满足 $x(t) \rightarrow x_d, \varphi(t) \rightarrow 0$,

$$|\varphi(t)| \leq 0.02 \text{ (rad)}, \quad t \geq 6.0 \text{ (s)};$$

$$|x(t) - x_d| \leq 0.01 \text{ (m)} \quad t \geq 7.0 \text{ (s)}$$

控制输入信号满足 $|v(t)| \leq 10.0$ (V). 并给出评价值

$$\int_0^{10} \{ \varphi^2(\tau) + (x(\tau) - x_d)^2 \} d\tau.$$

5.2 鲁棒控制设计

设摆的质心位置 L 为未知参数(可假设其上界已知, 即 $L \leq 0.6$), $\Delta C \neq 0, \delta(x) \neq 0$, 但是满足 $-0.06 \leq \Delta C < 0; \gamma = 0.95$.

设计状态反馈控制器使得闭环系统对于满足上述条件的任意参数摄动值, 上述 1) 和 2) 描述的性能指标均成立. 并且给出实际参数分别为临界值和 50% (比如 $\Delta C = -0.03; \delta(x) = 0.475x$ 时) 的响应结果.

参考文献

- [1] 申铁龙. 机器人鲁棒控制基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [2] 申铁龙, H. 控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996.
- [3] 梅生伟, 申铁龙, 刘康志. 现代鲁棒控制理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [4] SHEN Tie-long, CHIHARU I. Dissipativity-based Nonlinear Robust Control: Stabilization and Disturbance Injection [M]. [1. n.]: SICE Press, 2000.
- [5] WIT de CC, OLSSON H, et al. A new model for control of systems with friction [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40: 419-425.
- [6] <http://www.googletech.com.cn/edu-gipl.php> (固高科技公司网页)