

输出反馈实现一类带不确定输入动态非线性系统的 鲁棒几乎干扰解耦

王兴平, 程兆林

(山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 研究一类带不确定输入动态非线性系统的输出反馈干扰抑制问题并基于观测器给出了输出反馈控制器构造性的设计方法. 所设计的控制器具有对可允许不确定动态的鲁棒性. 不仅在 L_2 增益意义上抑制了干扰对输出的影响, 同时在 ISS 镇定意义上抑制了干扰对状态的影响.

关键词: 几乎干扰解耦; 输入到状态稳定; 不确定输入动态; 鲁棒动态输出反馈

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust almost disturbance decoupling for a class of nonlinear systems with input dynamical uncertainty via output feedback

WANG Xing-ping, CHENG Zhao-lin

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Shandong Jinan 250100, China)

Abstract: The problem of output feedback H_∞ control is considered for nonlinear systems with input unmodeled dynamics. An explicit observer-based controller design is presented. The proposed controller is robust against dynamic uncertainties at the input of the plant, depressing the effect of disturbance on the output in the sense of L_2 gain and on the state in the sense of ISS stabilization.

Key words: almost disturbance decoupling; input-to-state stability; input dynamical uncertainty; robust dynamic output feedback

1 引言 (Introduction)

对一个受干扰影响的系统, 如果不能设计控制器实现系统的干扰解耦, 一个自然的问题就是实现其几乎干扰解耦, 即设计控制器使得在 L_2 增益意义上干扰对输出的影响任意小. 几乎干扰解耦问题首先在线性系统中提出并得到基本的解决^[1]. 而非线性系统的几乎干扰解耦问题则一直是非线性控制理论的一个研究热点, 所涉及的范围包括鲁棒控制、输出调节控制、自适应控制等^[2-4].

带不确定输入动态的非线性系统是一类广泛的控制系统, 一般的讲, 带有执行单元的系统都可能产生这样的系统. 这类系统的鲁棒镇定问题已经得到了广泛的研究^[5,6], 但其干扰抑制方面的问题未得到应有的重视. 另外, 在一般 H_∞ 控制问题中, 只考虑干扰对输出的影响, 而不关心干扰对系统内部的影响, 如干扰有界时系统的状态是否有界等. 针对这一不足, 结合输入到状态稳定 (ISS)^[7] 概念

来研究干扰抑制问题成为一个新的方向^[2,4,8]. 本文借助输入到状态稳定概念研究一类带不确定输入动态非线性系统的鲁棒几乎干扰解耦问题. 在假设不确定输入动态是一具有零相对阶和最小相位线性系统的条件下, 设计了鲁棒动态输出反馈控制器, 使得受控系统从干扰到输出的 L_2 增益任意小, 同时以干扰为输入受控系统是输入到状态稳定的, 即同时实现了系统的鲁棒几乎干扰解耦和鲁棒 ISS 镇定^[8].

2 预备知识及问题描述 (Preliminaries and problem formulation)

考虑系统

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, f 是光滑函数且 $f(0, 0) = 0$. 如果存在 KL 函数 $\beta(s, t)$ 和 K 类函数 $\gamma(r)$, 使得对任意本性有界的可测函数输入 $u(t)$ 及任意初值 x_0 , 系统(1)的解 $x(t)$ 存在且满足

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\|u\|_e), \quad (2)$$

就称系统是输入到状态稳定(ISS)的($\|\cdot\|$ 表示向量欧氏范数, $\|u\|_e = \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|$).

输入到状态稳定概念具有丰富的内涵^[9], 如输入为零时系统是全局渐近稳定的, 当输入有界时系统的状态是有界的. 系统(1)是输入到状态稳定的充要条件是^[9]: 存在 K_∞ 类函数 $\alpha(r)$, K 类函数 $\gamma(r)$ 和光滑的径向无界的正定函数 $V(x)$, 使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$ 如下耗散不等式成立:

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq \gamma(\|u\|) - \alpha(\|x\|). \quad (3)$$

$V(x)$ 被称为系统(1)的 ISS-Lyapunov 函数.

本文研究的系统为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, x_1) + p(z, x_1)w, \\ \dot{x}_1 = x_2 + p_1(z, x)w, \\ \vdots \\ \dot{x}_{r-1} = x_r + p_{r-1}(z, x)w, \\ \dot{x}_r = v + p_r(z, x)w, \\ y = x_1, \\ \dot{\xi} = A\xi + bu, \\ v = c\xi + u. \end{cases} \quad (4)$$

这里 $z \in \mathbb{R}^{n-r}, w \in \mathbb{R}, x_i \in \mathbb{R}, f, p, p_i$ 都是光滑函数. 线性系统

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + bu, \\ v = c\xi + u \end{cases} \quad (5)$$

称为这个系统的不确定输入动态. 其中, $\xi \in \mathbb{R}^p, u, v \in \mathbb{R}, A$ 为不确定的常数阵, b, c 分别为不确定常数行向量和列向量. 为了限定不确定输入动态的允许范围, 对系统(5)作如下假设:

A1) 存在已知的常数 $\bar{c}$, 使得

$$\|b\| \leq \bar{c}, \|c\| \leq \bar{c}, \|A\| \leq \bar{c}.$$

A2) 存在正定阵 P 使得

$$P(A - bc) + (A - bc)^T P \leq -I.$$

本文的问题是: 对任意给定的 $\gamma > 0$, 设计动态输出反馈控制器

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \bar{\omega}(\chi, y), \\ u = \vartheta(\chi, y), \end{cases} \quad (6)$$

满足 $\bar{\omega}(0, 0) = 0, \vartheta(0, 0) = 0$, 使得闭环系统(4) ~ (6)满足:

I) 对任意 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 在干扰 $w(t)$ 作用下从零初始状态出发的闭环系统的输出 $y(t)$, 对任意 $T > 0$ 成立

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt.$$

II) 闭环系统以 w 为输入是输入到状态稳定的.

下面是解决本文问题的一个基本引理.

引理 1^[9, 10] $\gamma > 0$ 为给定正数. 对系统

$$\begin{cases} \dot{\chi} = f(\chi) + g(\chi)w, \\ y = h(\chi), \end{cases} \quad (7)$$

如存在光滑径向无界正定函数 $V(\chi)$ 和 K_∞ 类函数 $\alpha(r)$, 使得对任意 $\chi \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \chi} [f(\chi) + g(\chi)w] + [h(\chi)]^2 \leq \\ \gamma^2 w^2 - \alpha(\|\chi\|), \end{aligned} \quad (8)$$

则对任意 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 以 $\phi(t, 0, w)$ 表示系统(7)在干扰 $w(t)$ 作用下从零初始状态 $\chi(0) = 0$ 出发的解, 都有

$$\int_0^T \|h(\phi(t, 0, w))\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt$$

对任意 $T > 0$ 成立, 且系统以 w 为输入是输入到状态稳定的.

3 主要结论(Main results)

引理 2 已知

$$F = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 0 & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

则存在对角元素均为 1 的下三角阵矩阵 T , 使得

$$TFT^{-1} = \begin{pmatrix} a_n & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ a_2 & & & \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, TG = G.$$

证 可以直接验证

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -a_n & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ -a_4 & & \ddots & \ddots & \\ -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n & 1 \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_n & 1 \end{pmatrix},$$

即满足引理要求.

引理 3 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个 n 阶方阵, 则存在正实数 $k > 0$ 使得

$$\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} kI & \\ & I \end{pmatrix}.$$

证 对任意给定 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(x^T, y^T) \begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^T B^T y \leq \|B\|^2 |x|^2 + |y|^2.$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数. 选择实数 k 满足

$$k \geq \|B\|^2,$$

可证结论成立.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \chi_1) + p(z, \chi_1)w, \\ \dot{\zeta} = \Sigma\zeta + \Gamma_0\chi_1 + \Xi(z, \zeta, \chi)w, \\ \dot{\chi}_1 = \chi_2 + \Gamma_1\zeta + \Delta\chi_1 + p_1(z, \zeta, \chi)w, \\ \dot{\chi}_2 = \chi_3 + \Gamma_2\zeta + p_2(z, \zeta, \chi)w, \\ \vdots \\ \dot{\chi}_r = u + \Gamma_r\zeta + p_r(z, \zeta, \chi)w. \end{cases} \quad (9)$$

这里 $z \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\zeta \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w \in \mathbb{R}$, $\chi_1, \dots, \chi_r \in \mathbb{R}$, Σ 是不确定常数阵, 且存在已知的正定阵 P 使得

$$P\Sigma + \Sigma^T P \leq -I. \quad (10)$$

$\Delta, \Gamma_0, \dots, \Gamma_r$ 是有界的常数列向量或行向量, Ξ , $p_i (i = 1, \dots, r)$ 均为有界函数.

引理 4 考虑系统(9). 如对 z 子系统存在 K_∞ 类函数 $\beta_0(s)$, $\alpha_0(s)$ 和光滑径向无界正定函数 $V_0(z)$, 使得对任意 $\chi_1, w \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{n-r}$ 成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial z} [f(z, \chi_1) + p(z, \chi_1)w] &\leq \\ \alpha_0(|(w, \chi_1)^T|) - \beta_0(|z|), \end{aligned} \quad (11)$$

并且当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_0(s) = O(s^2)$, 则对任意 $\gamma > 0$, 存在部分状态反馈

$$u = u(\chi_1, \dots, \chi_r) \quad (12)$$

和光滑的径向无界正定函数 $V(z, \zeta, \chi)$, 使得 V 沿闭环系统(9) ~ (12) 解的方向导数 $\dot{V}$ 满足

$$\dot{V} + |\chi_1|^2 \leq \gamma^2 |w|^2 - \beta(|z|) - \alpha \cdot |(\zeta^T, \chi^T)^T|^2. \quad (13)$$

其中: $\beta(s)$ 为某一 K_∞ 类函数, α 为某一正实数.

证 首先改变耗散不等式(10)的供应函数. 利用文献[11]中定理 1, 存在光滑径向无界正定函数 $V_z(z)$ 和 K_∞ 类函数 $\beta(s)$, 使得对任意 $z \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\chi_1 \in \mathbb{R}$ 成立.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_z}{\partial z} (f(z, \chi_1) + p(z, \chi_1)w) &\leq \\ |(\chi_1, w)^T |^2 - \beta(|z|). \end{aligned} \quad (14)$$

对系统(9)作变换

$$\tilde{\chi}_i = \frac{\chi_i}{L^{i-1}}, \quad i = 1, \dots, r. \quad (15)$$

这里的 $L \geq 1$ 是一个待定常数. 计算有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\chi}}_1 = L\tilde{\chi}_2 + \Gamma_1\zeta + \Delta\tilde{\chi}_1 + p_1(z, \zeta, \tilde{\chi})w, \\ \dot{\tilde{\chi}}_2 = L\tilde{\chi}_3 + L^{-1}\Gamma_2\zeta + L^{-1}p_2(z, \zeta, \tilde{\chi})w, \\ \vdots \\ \dot{\tilde{\chi}}_r = L^{-(r-1)}(u + \Gamma_r\zeta + p_r(z, \zeta, \tilde{\chi})w). \end{cases}$$

对系统作如下形式的反馈:

$$u = -L'(b_1\tilde{\chi}_1 + \dots + b_r\tilde{\chi}_r), \quad (16)$$

其中 $b_1, \dots, b_r$ 使得多项式方程

$$\lambda^r + b_r\lambda^{r-1} + \dots + b_2\lambda + b_1 = 0$$

的根全部具有负实部. 记 $\tilde{\chi} = (\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_r)^T$, 在新坐标系下闭环系统(9) ~ (16)可以写为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, \tilde{\chi}_1) + p(z, \tilde{\chi}_1)w, \\ \dot{\zeta} = \Sigma\zeta + \Gamma_0\tilde{\chi}_1 + \Xi(z, \zeta, \tilde{\chi})w, \\ \dot{\tilde{\chi}} = L\tilde{C}\tilde{\chi} + D\zeta + E\tilde{\chi} + Fw. \end{cases} \quad (17)$$

这里

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{r-1} & \\ 0 & & & \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_r \end{pmatrix},$$

$$E = (\Delta, 0, \dots, 0)^T,$$

$$D = (\Gamma_1^T, \Gamma_2^T/L, \dots, \Gamma_r^T/L^{r-1})^T,$$

$$F = (p_1(z, \zeta, \tilde{\chi}), \dots, L^{-(r-1)}p_r(z, \zeta, \tilde{\chi}))^T.$$

为叙述简单, 设 $\Delta, \Gamma_0, \Xi, \Gamma_i, p_i$ 具有共同的上界 M , 即

$$|\Delta| \leq M, |\Gamma_0| \leq M, |\Xi| \leq M,$$

$$|\Gamma_i| \leq M, |p_i| \leq M, \quad i = 1, \dots, r.$$

由 $b_1, \dots, b_r$ 的取法, C 是一个稳定阵, 所以在正定阵 Q 使得

$$QC + C^T Q = -I.$$

利用 Q 和式(10)中的 P 作

$$\begin{aligned} \tilde{V}(z, \zeta, \tilde{\chi}) &= \\ \frac{1}{4}\gamma^2 V_z(z) + \frac{1}{8}\gamma^2 \kappa \zeta^T P \zeta + \tilde{\chi}^T Q \tilde{\chi}. \end{aligned}$$

其中 $\kappa = (\|P\|^2 M^2)^{-1}$. 计算 $\dot{\tilde{V}}$:

$$\dot{\tilde{V}}(z, \zeta, \tilde{\chi}) = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \zeta} \dot{\zeta} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\chi}} \dot{\tilde{\chi}}.$$

首先计算

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{\chi}} (L\tilde{C}\tilde{\chi} + D\zeta + E\tilde{\chi} + Fw) &\leq \\ -L|\tilde{\chi}|^2 + 2\|Q\|\|D\|\|\tilde{\chi}\|\|\zeta\| + \\ 2\|Q\|\|E\|\|\tilde{\chi}\|^2 + 2\|Q\|\|F\|\|\tilde{\chi}\|\|w\|, \end{aligned}$$

注意 $\|D\|^2 \leq rM^2$, $\|F\|^2 \leq rM^2$, 利用不等式

$$\begin{aligned} 2\|Q\|\|D\|\|\tilde{\chi}\| + \|\zeta\| &\leq \\ \frac{1}{32}\gamma^2\kappa\|\zeta\|^2 + 32r(\gamma^2\kappa)^{-1}\|Q\|^2M^2\|\tilde{\chi}\|^2, \\ 2\|Q\|\|F\|\|\tilde{\chi}\| + \|w\| &\leq \\ \frac{1}{4}\gamma^2\|w\|^2 + 4r\gamma^{-2}\|Q\|^2M^2\|\tilde{\chi}\|^2 \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \tilde{\chi}}(L\tilde{\chi} + D\zeta + E\tilde{\chi} + Fw) &\leq \\ \frac{1}{4}\gamma^2\|w\|^2 + \frac{1}{32}\gamma^2\kappa\|\zeta\|^2 - \\ (L - 2\|Q\|M - 32r(\gamma^2\kappa)^{-1}\|Q\|^2M^2 - \\ 4r\gamma^{-2}\|Q\|^2M^2)\|\tilde{\chi}\|^2. \end{aligned}$$

同理计算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \zeta}(\Sigma\zeta + \Gamma_0\tilde{\chi}_1 + \Xi(z, \zeta, \chi)w) &\leq \\ \frac{1}{2}\gamma^2\|w\|^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\|\tilde{\chi}\|^2 - \frac{1}{16}\gamma^2\kappa\|\zeta\|^2. \end{aligned}$$

利用式(14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}(f(z, \tilde{\chi}_1) + p(z, \tilde{\chi}_1)w) &\leq \\ \frac{\gamma^2}{4}\|\tilde{\chi}\|^2 + \frac{\gamma^2}{4}\|w\|^2 - \frac{\gamma^2}{4}\beta(\|z\|), \end{aligned}$$

综合得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} + \tilde{\chi}_1^2 &\leq \\ \gamma^2\|w\|^2 - \frac{1}{32}\gamma^2\kappa\|\zeta\|^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\beta(\|z\|) - \frac{1}{4}\gamma^2\|\tilde{\chi}\|^2 - \\ (L - 2\|Q\|M - 32r(\gamma^2\kappa)^{-1}\|Q\|^2M^2 - \\ 4r\gamma^{-2}\|Q\|^2M^2 - \gamma^2 - 1)\|\tilde{\chi}\|^2. \end{aligned}$$

取

$$\begin{aligned} L^* &= 2\|Q\|M + 32r(\gamma^2\kappa)^{-1}\|Q\|^2M^2 + \\ &4r\gamma^{-2}\|Q\|^2M^2 + \gamma^2 + 1, \end{aligned}$$

则状态反馈

$$u = -L^{*T}(b_1\tilde{\chi}_1 + \cdots + b_r\tilde{\chi}_r),$$

使得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} + \tilde{\chi}_1^2 &\leq \\ \gamma^2\|w\|^2 - \frac{1}{32}\gamma^2\kappa\|\zeta\|^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\beta(\|z\|) - \frac{1}{4}\gamma^2\|\tilde{\chi}\|^2. \end{aligned}$$

由 χ 与 $\tilde{\chi}$ 的变换关系(15),

$$V(z, \zeta, \chi) = \bar{V}(z, \zeta, \chi_1, \cdots, L^{-(r-1)}\chi_r), \quad (18)$$

$$u = -(b_1L^{*T}\chi_1 + \cdots + b_rL^{*T}\chi_r), \quad (19)$$

即为所求.

引理 5 考虑带不确定输入动态系统(4). 假设系统(4)满足:

1) z 子系统以 x_1, w 为输入是输入到状态稳定的, 即存在 K_∞ 类函数 $\beta_0(s)$, K 类函数 $\alpha_0(s)$ 和光滑径向无界正定函数 $V_0(z)$, 使得对任意 $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, $x_1, w \in \mathbb{R}$ 成立

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial z}[f(z, x_1) + p(z, x_1)w] &\leq \\ \alpha_0(\|(w, x_1)^T\|) - \beta_0(\|z\|), \end{aligned} \quad (20)$$

并且当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_0(s) = O(s^2)$.

2) 存在非负实数 M , 使得对任意 $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, $x \in \mathbb{R}^r$,

$$\|p_i(z, x)\| \leq M, \quad i = 1, \cdots, r.$$

则对任意 $\gamma > 0$, 存在动态输出反馈

$$\dot{\chi} = \bar{\omega}(\chi, y), \quad u = \vartheta(\chi, y) \quad (21)$$

满足 $\bar{\omega}(0, 0) = 0, \vartheta(0, 0) = 0$, 使得闭环系统(4)~(21)满足:

① 对任意 $w(t) \in L_2[0, \infty)$, 在 $w(t)$ 作用下从零初始状态出发的系统输出 $y(t)$ 对任意 $T > 0$ 成立

$$\int_0^T \|y(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt.$$

② 闭环系统以干扰 w 为输入是输入到状态稳定的.

证 首先作变换

$$\bar{\xi} = \xi - \sum_{i=1}^r \theta_i x_i, \quad (22)$$

这里 θ_i 是待定的常值列向量. 计算

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} &= A\xi + bu - \sum_{i=1}^{r-1} \theta_i(x_{i+1} + p_i(z, x)w) - \\ &\theta_r(v + p_r(z, x)w) = \\ &(A - \theta_r c)\bar{\xi} + (b - \theta_r)u + \\ &\sum_{i=1}^{r-1} ((A - \theta_r c)\theta_{i+1} - \theta_i)x_{i+1} + \\ &(A - \theta_r c)\theta_1 y - \sum_{i=1}^r \theta_i p_i(z, x)w. \end{aligned}$$

按如下方式选择 $\theta_i (i = 1, \cdots, r)$:

$$\theta_r = b, \quad \theta_i = (A - \theta_r c)\theta_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, r-1,$$

则描述 $\bar{\xi}$ 的方程为

$$\dot{\bar{\xi}} = (A - bc)\bar{\xi} + (A - bc)\theta_1 y - \sum_{i=1}^r \theta_i p_i(z, x)w.$$

于是系统(4)可以写为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, y) + p(z, y)w, \\ \dot{x} = Fx + G(u + c\bar{\xi}) + P(z, x)w, \\ \dot{\bar{\xi}} = (A - bc)\bar{\xi} + (A - bc)\theta_1 y - Q(z, x)w, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c\theta_1 & c\theta_2 & \cdots & c\theta_r \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(z, x) = \sum_{i=1}^r \theta_i p_i(z, x),$$

$$P(z, x) = (p_1(z, x), \cdots, p_r(z, x))^T.$$

利用引理2, 存在对角元素均为1的下三角阵矩阵 T , 使得

$$TFT^{-1} = \begin{pmatrix} c\theta_r & & & \\ \vdots & I_{n-1} & & \\ c\theta_2 & & & \\ c\theta_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad TG = G.$$

作变换

$$\bar{x} = Tx, \quad (24)$$

系统(23)变为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, y) + p(z, y)w, \\ \dot{\xi} = (A - bc)\bar{\xi} + (A - bc)\theta_1 y - Q(z, T^{-1}\bar{x})w, \\ \dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + By + G(u + c\bar{\xi}) + TP(z, T^{-1}\bar{x})w, \\ y = \bar{x}_1. \end{cases} \quad (25)$$

这里

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c\theta_r \\ \vdots \\ c\theta_2 \\ c\theta_1 \end{pmatrix}.$$

利用系统输出作观测器

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + l_1(y - \bar{x}_1), \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{r-1} = \bar{x}_r + l_{r-1}(y - \bar{x}_1), \\ \dot{\bar{x}}_r = u + l_r(y - \bar{x}_1). \end{cases} \quad (26)$$

其中 $l_1, \cdots, l_r$ 使得多项式方程

$$\lambda^r + l_1\lambda^{r-1} + \cdots + l_r = 0$$

的根全部具有负实部.

对系统(25)和(26)作变换

$$e_i = \bar{x}_i - \hat{x}_i, \quad i = 1, \cdots, r, \quad (27)$$

得变量 $e = (e_1, \cdots, e_r)^T$ 的动态方程为

$$\dot{e} = Ke + Gc\bar{\xi} + By + TP(z, T^{-1}\bar{x})w,$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} -l_1 & & & \\ \vdots & I_{r-1} & & \\ -l_{r-1} & & & \\ -l_r & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

在新坐标系下系统(25)和(26)表示为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, y) + p(z, y)w, \\ \dot{\bar{\xi}} = (A - bc)\bar{\xi} + (A - bc)\theta_1 y - Q(z, T^{-1}(\bar{x} + e))w, \\ \dot{e} = Ke + Gc\bar{\xi} + By + TP(z, T^{-1}(\bar{x} + e))w, \\ \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + l_1(y - \bar{x}_1), \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_r = u + l_r(y - \bar{x}_1), \\ y = e_1 + \bar{x}_1. \end{cases} \quad (28)$$

又计算

$$\dot{y} = e_2 + \bar{x}_2 + c\theta_1 y + p_1(z, y),$$

系统(28)可进一步表示为

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z, y) + p(z, y)w, \\ \begin{pmatrix} \dot{\bar{\xi}} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - bc) & 0 \\ Gc & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (A - bc)\theta_1 \\ B \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -Q(z, T^{-1}(\bar{x} + e)) \\ TP(z, T^{-1}(\bar{x} + e)) \end{pmatrix} w, \\ \dot{y} = \bar{x}_2 + e_2 + c\theta_1 y + p_1(z, y)w, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3 + l_2 e_1, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_r = u + l_r e_1. \end{cases} \quad (29)$$

由 $l_1, \cdots, l_r$ 的选取, K 是稳定阵, 所以存在正定阵 P_1 使得

$$P_1 K + K^T P_1 = -I.$$

利用可允许条件 A1)

$$\|2P_1 Gc\| \leq 2 \cdot \|P_1\| \cdot \|Gc\| \leq 2\bar{c} \cdot \|P_1\|.$$

再由引理3及引理3证明, 取 $k \geq (2\bar{c} \|P_1\|)^2$, 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & 2c^T G^T P_1 \\ 2P_1 Gc & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} kI & \\ & I \end{pmatrix}.$$

于是利用假设 A2)得

$$\begin{pmatrix} (k+1)P & \\ & 2P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - bc & 0 \\ Gc & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A - bc & 0 \\ Gc & M \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} (k+1)P & \\ & 2P_1 \end{pmatrix} \leq$$

$$\begin{pmatrix} (k+1)P(A-bc) + 2c^T G^T P_1 & \\ (k+1)(A-bc)^T P & 2P_1 M + 2M^T P_1 \\ 2P_1 Gc & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -(k+1)I & 0 \\ -2I & 2c^T G^T P_1 \\ 2P_1 Gc & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -I & \\ & -I \end{pmatrix},$$

即对含不确定常数矩阵

$$\begin{pmatrix} A-bc & 0 \\ Gc & M \end{pmatrix},$$

存在正定阵 P_0 使得

$$P_0 \begin{pmatrix} A-bc & 0 \\ Gc & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A-bc & 0 \\ Gc & M \end{pmatrix}^T P_0 \leq -I.$$

于是系统(29)具有系统(9)的形式,利用引理4,对任意 $\gamma > 0$, 存在线性的部分状态反馈

$$u = u(\gamma, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r) \quad (30)$$

和光滑径向无界正定函数 $V(z, \bar{\xi}, e, \gamma, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)$, 使得 V 沿闭环系统(29)和(30)解的方向导数 $\dot{V}$ 对任意 $z \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\bar{\xi} \in \mathbb{R}^p$, $e \in \mathbb{R}^r$, $\gamma, \bar{x}_i \in \mathbb{R}$ ($i = 2, \dots, r$) 成立

$$\dot{V} + |y|^2 \leq$$

$$\gamma^2 |w|^2 - \beta(|z|) - \alpha |(\bar{\xi}^T, e^T, \gamma, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r)^T|^2.$$

其中: $\beta(s)$ 为某一 K_∞ 类函数, α 为某一正实数. 由引理1即知结论成立.

4 算例(Example)

例1 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{z} = -z^3 - z + x_1 w, \\ \dot{x}_1 = x_2 + (1 + \sin x_1)w, \quad \dot{x}_2 = v + w, \\ \dot{\xi}_1 = -2\xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = -2\xi_2 + u, \\ v = \xi_1 + u, \quad y = x_1. \end{cases} \quad (31)$$

显然不确定动态满足假设条件 A1) 和 A2). 对 z 子系统取 ISS-Lyapunov 函数

$$V_z(z) = \frac{1}{2} \ln(1 + z^2).$$

经计算有

$$\dot{V}_z \leq -z^2 + \frac{1}{2}(1 + z^2)^{-1}(z^2 x^2 + w^2) \leq \frac{1}{2}(x^2 + w^2) - z^2.$$

取 $\theta_2 = (0, 1)^T$, $\theta_1 = (0, -2)^T$, 作变换

$$\bar{\xi} = \xi - \theta_1 X_1 - \theta_2 x_2,$$

系统变为

$$\dot{z} = -z^3 - z + x_1 w,$$

$$\dot{x}_1 = x_2 + (1 + \sin x_1)w, \quad \dot{x}_2 = \bar{\xi}_1 + u + w,$$

$$\dot{\bar{\xi}}_1 = -2\bar{\xi}_1, \quad \dot{\bar{\xi}}_2 = -2\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 + 4\gamma + (1 + 2\sin x_1)w.$$

作观测器

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + 3(\gamma - \bar{x}_1), \quad \dot{\bar{x}}_2 = u + 2(\gamma - \bar{x}_1).$$

经变换 $e_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $e_2 = x_2 - \bar{x}_2$, 并利用 $y = e_1 + \bar{x}_1$, 得系统

$$\dot{z} = -z^3 + x_1 w, \quad \dot{\bar{\xi}}_1 = -2\bar{\xi}_1,$$

$$\dot{\bar{\xi}}_2 = -2\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 + 4\gamma + (1 + 2\sin x_1)w,$$

$$\dot{e}_1 = e_2 - 3e_1 + (1 + \sin x_1)w,$$

$$\dot{e}_2 = -2e_1 + \bar{\xi}_1 + w,$$

$$\dot{y} = e_2 + \bar{x}_2 + (1 + \sin x_1)w,$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = u + 2e_1.$$

利用引理4步骤,对任意给定 $\gamma > 0$, 实现抑制水平为 γ 的干扰抑制和 ISS 镇定的动态补偿器具体形式为

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + 3(\gamma - \bar{x}_1),$$

$$\dot{\bar{x}}_2 = -2(24 + \frac{143}{14}\gamma^{-2})^2 \gamma -$$

$$3(24 + \frac{143}{14}\gamma^{-2})\bar{x}_2 + 2(\gamma - \bar{x}_1),$$

$$u = -2(24 + \frac{1}{14}143\gamma^{-2})^2 \gamma - 3(24 + \frac{143}{14}\gamma^{-2})\bar{x}_2.$$

5 结语(Conclusion)

本文研究了一类带不确定输入动态非线性系统的几乎干扰解耦问题,在不确定输入动态是零相对阶和最小相位的线性系统时,得到了鲁棒动态输出反馈控制器,同时实现了系统的鲁棒几乎干扰解耦和鲁棒 ISS 镇定.

参考文献(References):

- [1] WILLEMS J C. Almost invariant subspace: an approach to high-gain feedback design — part 1: almost controlled invariant subspaces [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(1): 235–252.
- [2] MARINO R, TOMEI P. Nonlinear output feedback tracking with almost disturbance decoupling [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(1): 18–28.
- [3] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems* [M]. 3rd ed. London: Springer-Verlag, 1995.
- [4] ISIDORI A, SCHWARTS B, TARN T J. Semiglobal L_2 performance bounds for disturbance attenuation in nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(8): 1535–1545.

(下转第194页)

matic Control, 1992, 37(8): 1188 – 1191.

- [14] ZHAO J, SPONG M W. Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1941 – 1951.
- [15] 申铁龙. H_∞ 控制理论与应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.
- (SHEN Tielong. *Theory and Application of H_∞ Control* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1995.)

作者简介:

聂 宏 (1965 —), 女. 东北大学信息科学与工程学院博士研究生. 1994 年 6 月在东北师范大学获理学硕士学位, 主要研究兴趣包括: 非线性与切换系统, 鲁棒控制. E-mail: hongnie_001@163.com.

赵 军 (1957 —), 男. 东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 中国自动化学会控制理论专业委员会委员. 1991 年在东北大学获工学博士学位. 主要研究兴趣包括: 非线性与混杂系统, 几何控制理论, 切换控制和鲁棒控制. E-mail: jzhao@ee.cityu.edu.hk;

(上接第 188 页)

- [5] JIANG Z P, ARCAK M. Robust global stabilization with input unmodeled dynamics: an ISS small gain approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1411 – 1415.
- [6] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. *Constructive Nonlinear Control* [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.
- [7] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 – 443.
- [8] KRISTIC M, LI Z H. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(3): 336 – 350.
- [9] SONTAG E D, WANG Y. New characterizations of the input to state stability property [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(9): 1283 – 1294.
- [10] van der SCHAFT A. L_2 -gain analysis of nonlinear systems and non-

linear H_∞ control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(6): 770 – 784.

- [11] SONTAG E D, TEEL A. Changing supply functions in input/state stable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(8): 1476 – 1478.

作者简介:

王兴平 (1962 —), 男. 海军航空工程学院教员, 在读博士生. 研究方向: 非线性控制系统稳定性, 非线性控制系统 H_∞ 控制. E-mail: wwwxpnm@sohu.com;

程兆林 (1939 —), 男. 山东大学数学与系统科学学院教授, 博士生导师. 从事奇异系统鲁棒控制, 非线性系统鲁棒控制, 多变量控制理论与应用, 时滞系统的研究. E-mail: chengzha@jn_public.sd.cn-info.net.