第 21 卷第 2 期
2004 年 4 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.21 No.2
Apr. 2004

文章编号：1000-8152(2004)02-0189-06

一类线性切换系统具有 H_∞ 性能指标的二次稳定

聂 宏[1,2]，赵 军[1]

（1. 辽宁石油化工大学 理学院，辽宁 抚顺 113001；2. 东北大学 信息科学与工程学院，辽宁 沈阳 110004）

摘要：研究了一类线性切换系统具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定问题.这类线性切换系统由两个子系统组成，并且每个子系统都不是具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的.利用单 Lyapunov 函数方法，得到了线性切换系统具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的充分条件，同时由凸组合系统设计出确保线性切换系统二次稳定且具有 H_∞ 扰动衰减度的切换律.进一步，还给出了线性切换系统具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的必要条件.最后的仿真实例表明了结论的有效性.

关键词：线性切换系统；具有 H_∞ 扰动衰减度的二次稳定；凸组合；单 Lyapunov 函数

中图分类号：TP273　　**文献标识码**：A

Quadratic stability with H-infinity performance for a class of switched linear systems

NIE Hong[1,2], ZHAO Jun[1]

(1. Faculty of Science, Liaoning University of Petroleum & Chemical Technology, Liaoning Fushun 113001, China;
2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Liaoning Shenyang 110004, China)

Abstract: The problem of quadratic stability with H-infinity disturbance attenuation for a class of switched linear systems is addressed in this paper. The systems under consideration consist of two subsystems, and neither of which needs to be quadratically stable with H-infinity disturbance attenuation. Based on single Lyapunov function techniques, a sufficient condition for the switched linear system in this class to be quadratically stable with H-infinity disturbance attenuation is derived, and the quadratically stable switching law is designed in terms of the convex combination system. Furthermore, a necessary condition for the problem to be solvable is also derived. Finally, a simulation example is employed to illustrate the validity of the results.

Key words: switched linear system; quadratic stability with H-infinity disturbance attenuation; convex combination; single Lyapunov function

1 引言(Introduction)

混杂系统(HS)是连续时间动态和离散事件动态交互作用的复杂动态系统.切换系统(SS)作为混杂系统的一类重要模型，其理论价值和实际意义日益得到人们的普遍认同.切换系统是由一组连续微分方程描述的子系统和一个描述子系统之间切换的切换规则组成.切换系统具有广泛的实际背景，它可以应用于智能化交通管理[1]、受约束机器人控制[2]、计算机磁盘驱动器[3]等复杂系统的描述、分析和控制.人们对切换系统的稳定性进行了广泛的研究[4~7]，其中就包括对切换系统二次稳定性的研究[5,7].与线性定常系统相比，切换系统具有一定的复杂性.切换系统的性质与切换有关，在不同的切换规则下，切换系统可能具有不同的性质[8,9].对于线性系统，渐近稳定与二次稳定是等价的，但是对于线性切换系统，即使它是渐近稳定的，也不一定是二次稳定的[8]，因此有必要单独研究切换系统的二次稳定问题.关于线性切换系统二次稳定的研究，一个重要的方法就是凸组合方法，即利用各个子系统构成的凸组合系统的性质来研究原来的切换系统的性质，其中涉及确保线性切换系统二次稳定的切换律的设计.另一个重要方法就是利用单 Lyapunov、多 Lyapunov 函数技术[8,9].

另一方面，H_∞ 控制理论是近年来相对较热的一个研究方向，它涉及到工程控制中的扰动衰减等问题.控制对象关于干扰的鲁棒性是 H_∞ 控制扰动衰减的基本思想.在文献[10]中首次将一类确定性系统的 H_∞ 控制器的设计转化为代数 Riccati 方程的求

收稿日期：2002-04-29；收修改稿日期：2003-07-14.
基金项目：国家自然科学基金项目(60274009)；高等学校博士专项科研基金项目(20020145007)；辽宁省自然科学基金项目(20032020).

解问题;基于Riccati方程的H_∞控制方法对具有参数不确定性的线性系统二次可稳的控制器的设计近年来取得了许多成果[11,12],其中文献[12]得到了具有参数不确定性的线性系统鲁棒H_∞设计问题可解的充要条件,它提出的控制律对所有允许的不确定保证了闭环系统的二次稳定和H_∞扰动衰减度.

同切换系统的稳定性的结果及H_∞控制方面的成果相比,关于切换系统的H_∞控制问题却报道很少[13].本文在已有的切换系统稳定性研究的基础上,与H_∞控制理论相联系,研究一类线性切换系统具有H_∞扰动衰减度的二次稳定问题,采用的方法依赖于具有H_∞扰动衰减度二次稳定的概念[12],并将这一概念推广到切换系统.本文所考虑的线性切换系统由两个子系统组成,并且每个子系统都不是具有H_∞扰动衰减度二次稳定的,本文证明了子系统的某个凸组合具有H_∞扰动衰减度二次稳定等条件是线性切换系统具有H_∞扰动衰减度二次稳定的充分条件,同时由凸组合系统设计出的切换律保证了线性切换系统二次稳定.进一步,研究了线性切换系统具有H_∞扰动衰减度二次稳定的必要条件.

2 预备知识(Preliminaries)

首先回顾系统二次稳定且具有H_∞扰动衰减度γ的概念.

这里做如下约定:记号$A \geqslant B$(或$A > B$),其中A和B是对称矩阵,表示矩阵$A - B$是半正定的(或正定的);$\mathbb{N}$表示正整数集合;$L_2[0,\infty)$表示在$[0,\infty)$上平方可积的函数空间,并且$\|\cdot\|_2$表示通常的$L_2[0,\infty)$范数.

考虑如下线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中:$x(t) \in \mathbb{R}^n$为状态向量,$w(t) \in \mathbb{R}^m$为属于$L_2[0,\infty)$的扰动输入向量,$z(t) \in \mathbb{R}^q$为受控输出向量,A,B和C为具有适当维数的常值矩阵.

定义 1 给定常数$\gamma > 0$.如果存在一个正定对称矩阵$Q > 0$和一个正常数$\varepsilon > 0$,使得下列不等式成立:

$$x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}Q + QA + \gamma^{-2}QBB^{\mathrm{T}}Q + C^{\mathrm{T}}C)x < -\varepsilon x^{\mathrm{T}}x, \tag{2}$$

则称系统(1)是二次稳定的且具有H_∞扰动衰减度γ.

3 主要结果(Main results)

考虑如下线性切换系统

$$\begin{cases} \dot{x} = A_i x + B_i w, \\ z = C_i x. \end{cases} \tag{3}$$

这里,$x(t) \in \mathbb{R}^n$为状态向量,$w(t) \in \mathbb{R}^m$为属于$L_2[0,\infty)$的扰动输入向量,$z(t) \in \mathbb{R}^q$为受控输出向量.$i:[0,\infty) \to M = \{1,2,\cdots,k\}$表示切换信号,它通常是依赖于状态或时间的分段常值函数,对于固定的$i \in M$,$A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$,$C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$为常值矩阵.

对于任意给定的初始时间t_0及初始状态$x_0 = x(t_0)$,定义切换序列

$$\begin{cases} S = \{x_0;(i_0,t_0),(i_1,t_1),\cdots,(i_k,t_k),\cdots\}, \\ i_k \in M,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4}$$

其中t_k为单调递增的切换时刻序列.(i_k,t_k)意味着当$t_k \leqslant t < t_{k+1}$时,系统的状态轨迹沿着第$i_k$个子系统的轨迹展开.这样,切换序列(4)和方程(3)完全描述了系统(3)的轨迹.定义系统(3)的轨迹为$x_\Sigma(\cdot)$.对于任意$j \in M$,

$$\Sigma \mid j = \{t_{k_1},t_{k_1+1},t_{k_2},t_{k_2+1},\cdots,t_{k_n},t_{k_n+1},\cdots:\ i_{k_m} = j, m \in \mathbb{N}\}, \tag{5}$$

表示第j个子系统的切换时刻序列.其中第j个子系统在$t = t_{k_m}$时刻进入激活状态,在$t = t_{k_m+1}$时刻离开激活状态.

另外,对于线性切换系统(3),本文总是假定在任意切换序列下,式(3)的解是右可微的,并且在任何有限时间区间$[0,T]$只有有限次切换.

如果把切换律看作是一个控制量——离散的控制量,将得到系统(3)二次稳定且具有H_∞扰动衰减度γ的定义.

定义 2 给定常数$\gamma > 0$.如果存在一个切换律$i = i(x)$,一个正定对称矩阵Q和一个正常数$\varepsilon > 0$,使得在这个切换律下,有下面的不等式

$$x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}Q + QA_i + \gamma^{-2}QB_iB_i^{\mathrm{T}}Q + C_i^{\mathrm{T}}C_i)x < -\varepsilon x^{\mathrm{T}}x \tag{6}$$

成立,则称系统(3)是二次稳定的且具有H_∞扰动衰减度γ.

注 从定义2,不难看出线性切换系统二次稳定且具有H_∞扰动衰减度γ的概念是线性系统二次稳定且具有H_∞扰动衰减度γ概念的推广.

本文的目的是研究线性切换系统二次稳定且具有H_∞扰动衰减度γ问题.如果切换系统(3)的某个子系统是二次稳定的且具有H_∞扰动衰减度γ,则问题的解将是平凡的.显然本文需假定它的每个子

系统都不是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

为了得到本文的主要结果,需要下面的结论:

引理 1(S-procedure)[8]　设 T_0, T_1 为 $n\times n$ 对称矩阵,如果对所有满足 $x^{\mathrm T}T_1x\geqslant 0$ 的非零 x,均有 $x^{\mathrm T}T_0x>0$,且存在某个 x_0 使 $x_0^{\mathrm T}T_1x_0>0$,那么存在某个 $\beta\geqslant 0$,使 $T_0-\beta T_1>0$.

如果 $\bar A=\sum_{i=1}^k\alpha_iA_i, \bar B=\sum_{i=1}^k\alpha_iB_i, \bar C=\sum_{i=1}^k\alpha_iC_i$,则称系统

$$\begin{cases}\dot x=\bar A x+\bar Bw,\\ z=\bar Cx\end{cases}\tag{7}$$

是系统(3)的一个凸组合系统,其中 $\alpha_i\in[0,1]$, $\sum_{i\in M}\alpha_i=1$.

当切换系统(3)只含有两个子系统时,即

$$\begin{cases}\dot x=A_ix+B_iw,\\ z=C_ix,\end{cases}\quad i=1,2.\tag{8}$$

本文利用单 Lyapunov 函数方法给出切换律的设计方案,以保证系统(8)是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

定理 1　给定常数 $\gamma>0$.若存在常数 $\alpha\in(0,1)$、矩阵 $Q>0$ 和常数 $\varepsilon,\bar\gamma>0$,使得 $\mu=\gamma^{-2}-\bar\gamma^{-2}>0$ 及下面的两个不等式

$$x^{\mathrm T}(\bar A^{\mathrm T}Q+Q\bar A+\gamma^{-2}Q\bar B\bar B^{\mathrm T}Q+\bar C^{\mathrm T}\bar C)x<-\varepsilon x^{\mathrm T}x,\tag{9}$$

$$\alpha\mu QB_1B_1^{\mathrm T}Q+(1-\alpha)\mu QB_2B_2^{\mathrm T}Q+\alpha(\alpha-1)[\gamma^{-2}Q(B_1-B_2)(B_1-B_2)^{\mathrm T}Q+(C_1-C_2)^{\mathrm T}(C_1-C_2)]\geqslant 0\tag{10}$$

成立,其中

$$\begin{cases}\bar A=\alpha A_1+(1-\alpha)A_2,\\ \bar B=\alpha B_1+(1-\alpha)B_2,\\ \bar C=\alpha C_1+(1-\alpha)C_2.\end{cases}\tag{11}$$

则存在切换律 $i:[0,\infty)\to\{1,2\}$,使得系统(8)是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 $\bar\gamma$.

证　由式(11)知

$$\begin{aligned}&\bar B\bar B^{\mathrm T}=\\&[\alpha B_1+(1-\alpha)B_2][\alpha B_1^{\mathrm T}+(1-\alpha)B_2^{\mathrm T}]=\\&\alpha B_1B_1^{\mathrm T}+(1-\alpha)B_2B_2^{\mathrm T}+\alpha(\alpha-1)B_1(B_1-B_2)^{\mathrm T}-\alpha(\alpha-1)B_2(B_1-B_2)^{\mathrm T}=\\&\alpha B_1B_1^{\mathrm T}+(1-\alpha)B_2B_2^{\mathrm T}+\\&\alpha(\alpha-1)(B_1-B_2)(B_1-B_2)^{\mathrm T}.\end{aligned}\tag{12}$$

类似地,有

$$\bar C^{\mathrm T}\bar C=\alpha C_1^{\mathrm T}C_1+(1-\alpha)C_2^{\mathrm T}C_2+\alpha(\alpha-1)(C_1-C_2)^{\mathrm T}(C_1-C_2).\tag{13}$$

式(9)表明系统(8)的凸组合系统 $(\bar A,\bar B,\bar C)$ 是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ. 将式(12)和(13)代入式(9),有

$$\begin{aligned}&\alpha x^{\mathrm T}(A_1^{\mathrm T}Q+QA_1+\gamma^{-2}QB_1B_1^{\mathrm T}Q+C_1^{\mathrm T}C_1)x+\\&(1-\alpha)x^{\mathrm T}(A_2^{\mathrm T}Q+QA_2+\gamma^{-2}QB_2B_2^{\mathrm T}Q+C_2^{\mathrm T}C_2)x+\\&\alpha(\alpha-1)x^{\mathrm T}[\gamma^{-2}Q(B_1-B_2)(B_1-B_2)^{\mathrm T}Q+\\&(C_1-C_2)^{\mathrm T}(C_1-C_2)]x<-\varepsilon x^{\mathrm T}x.\end{aligned}\tag{14}$$

将 $\gamma^{-2}=\mu+\bar\gamma^{-2}$ 代入上式,有

$$\begin{aligned}&\alpha x^{\mathrm T}(A_1^{\mathrm T}Q+QA_1+\bar\gamma^{-2}QB_1B_1^{\mathrm T}Q+C_1^{\mathrm T}C_1+\\&\varepsilon I)x+(1-\alpha)x^{\mathrm T}(A_2^{\mathrm T}Q+QA_2+\bar\gamma^{-2}QB_2B_2^{\mathrm T}Q+\\&C_2^{\mathrm T}C_2+\varepsilon I)x+x^{\mathrm T}\{\alpha\mu QB_1B_1^{\mathrm T}Q+\\&(1-\alpha)\mu QB_2B_2^{\mathrm T}Q+\alpha(\alpha-1)[\gamma^{-2}Q(B_1-\\&B_2)(B_1-B_2)^{\mathrm T}Q+(C_1-C_2)^{\mathrm T}(C_1-C_2)]\}x<0.\end{aligned}$$

考虑式(10),可得

$$\begin{aligned}&\alpha x^{\mathrm T}(A_1^{\mathrm T}Q+QA_1+\bar\gamma^{-2}QB_1B_1^{\mathrm T}Q+\\&C_1^{\mathrm T}C_1+\varepsilon I)x+(1-\alpha)x^{\mathrm T}(A_2^{\mathrm T}Q+QA_2+\\&\bar\gamma^{-2}QB_2B_2^{\mathrm T}Q+C_2^{\mathrm T}C_2+\varepsilon I)x<0.\end{aligned}$$

令

$$\Omega_1=\{x\in\mathbb R^n\mid x^{\mathrm T}(A_1^{\mathrm T}Q+QA_1+\bar\gamma^{-2}QB_1B_1^{\mathrm T}Q+C_1^{\mathrm T}C_1)x<-\varepsilon x^{\mathrm T}x\},\tag{15}$$

$$\Omega_2=\{x\in\mathbb R^n\mid x^{\mathrm T}(A_2^{\mathrm T}Q+QA_2+\bar\gamma^{-2}QB_2B_2^{\mathrm T}Q+C_2^{\mathrm T}C_2)x<-\varepsilon x^{\mathrm T}x\},\tag{16}$$

则 $\Omega_1\cup\Omega_2=\mathbb R^n\setminus\{0\}$. 切换律 $i=i(x)$ 设计如下:

$$i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_1,\\ 2,\ x\in\Omega_2\setminus\Omega_1.\end{cases}\tag{17}$$

式(17)表明:在切换律(17)下,在区域 Ω_1 和 Ω_2 的相交部分,系统(8)将切换到第一个子系统. 则对 $\forall x\in\mathbb R^n\setminus\{0\}$,有

$$x^{\mathrm T}(A_i^{\mathrm T}(t)Q+QA_i(t)+\bar\gamma^{-2}QB_iB_i^{\mathrm T}Q+C_i^{\mathrm T}C_i)x<-\varepsilon x^{\mathrm T}x$$

成立,从而由定义2可得系统(8)是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 $\bar\gamma$.

下面的定理给出了系统(8)二次稳定且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ 的必要条件.

定理 2　如果系统(8)是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ,那么一定存在系统(8)的一个凸组合系统

$$\begin{cases}\dot x=\bar Ax+\bar Bw,\\ z=\bar Cx\end{cases}$$

是二次稳定的且具有相同的 H_∞ 扰动衰减度 γ,其中

$$\bar{A} = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2,$$
$$\bar{B} = \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2,$$
$$\bar{C} = \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2,$$
$$\alpha \in [0,1].$$

证 假定系统(8)是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ, 则由定义2可知:对任意 $x \neq 0$, 有

$$x^T(-A_1^TQ - QA_1 - \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ - C_1^TC_1 - \varepsilon I)x > 0, \tag{18}$$

当 $x^T(A_2^TQ + QA_2 + \gamma^{-2}QB_2B_2^TQ + C_2^TC_2 + \varepsilon I)x \geqslant 0$ 及

$$x^T(-A_2^TQ - QA_2 - \gamma^{-2}QB_2B_2^TQ - C_2^TC_2 - \varepsilon I)x > 0, \tag{19}$$

当 $x^T(A_1^TQ + QA_1 + \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ + C_1^TC_1 + \varepsilon I)x \geqslant 0$.

如果对所有 $x \neq 0$, 都有

$x^T(A_1^TQ + QA_1 + \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ + C_1^TC_1 + \varepsilon I)x \leqslant 0$, 那么系统 (A_1, B_1, C_1) 是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

类似地,如果对所有 $x \neq 0$, 都有

$x^T(A_2^TQ + QA_2 + \gamma^{-2}QB_2B_2^TQ + C_2^TC_2 + \varepsilon I)x \leqslant 0$, 那么系统 (A_2, B_2, C_2) 是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ.

除上述两种特殊情况外,将引理1应用到(18)和(19).不失一般性,考虑应用到式(18)可得存在某个 $\beta \geqslant 0$, 使

$$(-A_1^TQ - QA_1 - \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ - C_1^TC_1 - \varepsilon I) - \beta(A_2^TQ + QA_2 + \gamma^{-2}QB_2B_2^TQ + C_2^TC_2 + \varepsilon I) > 0. \tag{20}$$

利用

$$\begin{cases} -\dfrac{\beta}{(1+\beta)^2}(B_1 - B_2)(B_1 - B_2)^T \leqslant 0, \\ -\dfrac{\beta}{(1+\beta)^2}(C_1 - C_2)(C_1 - C_2) \leqslant 0, \end{cases} \tag{21}$$

进一步整理式(20),有

$$\left(\frac{A_1 + \beta A_2}{1+\beta}\right)^T Q + Q\left(\frac{A_1 + \beta A_2}{1+\beta}\right) + \gamma^{-2}Q\left(\frac{B_1 + \beta B_2}{1+\beta}\right)\left(\frac{B_1 + \beta B_2}{1+\beta}\right)^T Q + \left(\frac{C_1 + \beta C_2}{1+\beta}\right)^T\left(\frac{C_1 + \beta C_2}{1+\beta}\right) < -\varepsilon I. \tag{22}$$

从而,凸组合系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}w, \\ z = \bar{C}x \end{cases} \tag{23}$$

是二次稳定的且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ. 其中 $\bar{A} = \alpha A_1 + (1-\alpha)A_2, \bar{B} = \alpha B_1 + (1-\alpha)B_2, \bar{C} = \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2, \alpha = \dfrac{1}{1+\beta}, \beta \geqslant 0$.

考虑系统(3)的一种特殊情况:它的 k 个子系统有相同的输入和输出矩阵,即

$$\begin{cases} B_1 = B_2 = \cdots = B_k = B, \\ C_1 = C_2 = \cdots = C_k = C. \end{cases} \tag{24}$$

此时凸组合系统(7)变成

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{A}x + Bw, \\ z = Cx. \end{cases} \tag{25}$$

其中 $\bar{A} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i, \alpha_i \in [0,1], \sum_{i \in M} \alpha_i = 1$.

显然式(25)是式(7)的一种特殊形式,在这种情况下得到的结果减少了保守性.

推论1 假定系统(3)满足条件(24),则存在它的一个凸组合系统(25)二次稳定且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ 为系统(3)二次稳定,且具有 H_∞ 扰动衰减度 γ 的充分条件.当子系统的个数为2时,此条件为充要条件.

证 同定理1、定理2的证明类似,略.

4 仿真算例(Simulation example)

在这节,给出一个例子来进一步说明定理1.

例1 考虑由2个子系统组成的线性切换系统(3),参数如下:

$$\begin{cases} A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & -29 \end{bmatrix}, & A_2 = \begin{bmatrix} -9 & -2 \\ -1/4 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, & B_2 = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \\ C_1 = [2 \quad 3], & C_2 = [1 \quad 2]. \end{cases} \tag{26}$$

取 $\alpha = 1/2$, 则

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -5/8 & -14 \end{bmatrix}, \ \bar{B} = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 3/8 \end{bmatrix}, \ \bar{C} = [3/2 \quad 5/2].$$

选取 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \varepsilon = 1/8, \gamma = 1/2\sqrt{2}, \bar{\gamma} = 1/2$, 有

$$\mu = \gamma^{-2} - \bar{\gamma}^{-2} = 4,$$

$$\bar{A}^TQ + Q\bar{A} + \gamma^{-2}Q\bar{B}\bar{B}^TQ + \bar{C}^T\bar{C} + \varepsilon I = \begin{bmatrix} -9/2 & 1/4 \\ 1/4 & -41/2 \end{bmatrix} < 0, \tag{27}$$

$$\alpha\mu QB_1B_1^TQ + (1-\alpha)\mu QB_2B_2^TQ + \alpha(\alpha - I)[\gamma^{-2}Q(B_1 - B_2)(B_1 - B_2)^TQ + (C_1 - C_2)^T(C_1 - C_2)] = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{28}$$

$\alpha(A_1^TQ + QA_1 + \bar{\gamma}^{-2}QB_1B_1^TQ + C_1^TC_1) + (1-$

$$\alpha)(A_2^{\mathrm{T}}Q + QA_2 + \bar{\gamma}^{-2}QB_2B_2^{\mathrm{T}}Q + C_2^{\mathrm{T}}C_2) + \varepsilon I =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -48 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -67/4 & 0 \\ 0 & 25/4 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -19/2 & 0 \\ 0 & -83/2 \end{bmatrix} < 0. \tag{29}$$

根据定理 1,得

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x_1, x_2) \mid 57x_1^2 - 383x_2^2 < 0\}, \\ \Omega_2 &= \{(x_1, x_2) \mid -133x_1^2 + 51x_2^2 < 0\}. \end{aligned} \tag{30}$$

显然 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.取初始点 $x_0 = \begin{bmatrix} -6 \\ 4.5 \end{bmatrix}$,切换域、状态响应曲线及切换信号的变化分别如图 1、图 2、图 3 所示.

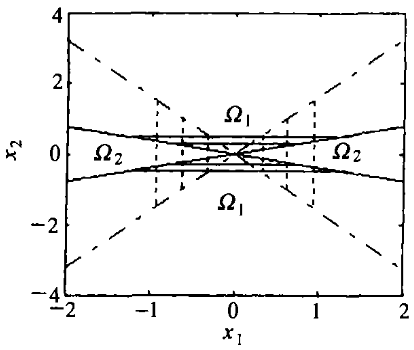

图 1　切换系统的切换域

Fig. 1　Switching region of the system (26)

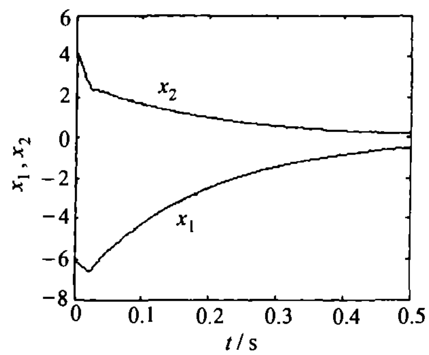

图 2　切换系统的状态响应曲线

Fig. 2　State response of the system (26)

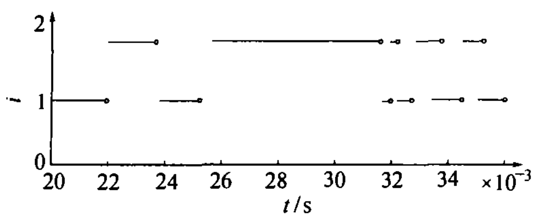

图 3　切换信号的变化示意图

Fig. 3　Sketch map of switched signal transformation

5　结束语(Conclusion)

本文给出了含有两个子系统的线性切换系统具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的充分条件,每个子系统都不是具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的,在假定存在子系统的一个凸组合是具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的条件下,构造了稳定的切换律,得到了线性切换系统是具有 H_∞ 扰动衰减度二次稳定的结论,尽管线性切换系统的 H_∞ 扰动衰减度大于凸组合系统的 H_∞ 扰动衰减度.同时,本文还给出了线性切换系统具有 H_∞ 扰动衰减度二次可稳定的必要条件.此时得到的凸组合系统具有与线性切换系统相同的 H_∞ 扰动衰减度.

参考文献(References):

[1] VARAIYA P P. Smart cars on smart roads: problems of control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(2): 195 - 207.

[2] JEON D, TOMIZUKA M. Learning hybrid force and position control of robot manipulators [J]. *IEEE Trans on Robotics Automatic*, 1993, 9(4): 423 - 431.

[3] GOLLU A, VARAIYA P P. Hybrid dynamical systems [C]// *Proc of the 28th Conference on Decision and Control*. Tampa, Florida: Omnipress, 1989: 2708 - 2712.

[4] PETTERSSON S, LENNARTSON B. Stability and robustness for hybrid systems [C]// *Proc of the 35th Conf on Decision and Control*. Kobe, Japan: Omnipress, 1996: 1202 - 1207.

[5] WICKS M A, PELETIES P, DECARLO R A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems [C]// *Proc of the 33th Conf on Decision and Control*. Lake Buena Vista, Florida: Omnipress, 1994: 3492 - 3497.

[6] PELETIES P, DECARLO R A. Asymptotic stability of *m*-switched systems using Lyapunov functions [C]// *Proc of the 31th Conf on Decision and Control*. Tucson, Arizona: Omnipress, 1992: 3438 - 3439.

[7] WICK M A, PELETIES P, DECARLO R A. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems [J]. *European J of Control*, 1998, 4(2): 140 - 147.

[8] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems [J]. *Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 - 70.

[9] BRANICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(4): 475 - 482.

[10] PETERSEN I R. Disturbance attenuation and H_∞ optimization: a design method based on the algebraic Riccati equation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1987, 32(5): 427 - 429.

[11] XIE L, de SOUZA C E. Robust H_∞ control for linear time-invariant systems with norm-bounded uncertainty in the input matrix [J]. *Systems & Control Letters*, 1990, 14(5): 389 - 396.

[12] XIE L, de SOUZA C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *IEEE Trans on Auto-*

matic Control, 1992, 37(8): 1188 - 1191.

[14] ZHAO J, SPONG M W. Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1941 - 1951.

[15] 申铁龙. H_∞控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995.

(SHEN Tielong. *Theory and Application of H_∞ Control* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1995.)

作者简介:

聂 宏 (1965 —),女.东北大学信息科学与工程学院博士研究生.1994年6月在东北师范大学获理学硕士学位,主要研究兴趣包括:非线性与切换系统,鲁棒控制.E-mail: hongnie_001@163.com.

赵 军 (1957 —),男.东北大学信息科学与工程学院教授,博士生导师,中国自动化学会控制理论专业委员会委员.1991年在东北大学获工学博士学位.主要研究兴趣包括:非线性与混杂系统,几何控制理论,切换控制和鲁棒控制.E-mail: jzhao@ee.cityu.edu.hk;

(上接第188页)

[5] JIANG Z P, ARCAK M. Robust global stabilization with input unmodeled dynamics: an ISS small gain approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1411 - 1415.

[6] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. *Constuctive Nonlinear Control* [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[7] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 - 443.

[8] KRISTIC M, LI Z H. Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998,43(3):336 - 350.

[9] SONTAG E D, WANG Y. New characterizations of the input to state stability property [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996,41(9):1283 - 1294.

[10] van der SCHAFT A. L_2-gain analysis of nonlinear systems and nonlinear H_∞ control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(6):770 - 784.

[11] SONTAG E D, TEEL A. Changing supply functions in input/state stable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(8): 1476 - 1478.

作者简介:

王兴平 (1962 —),男.海军航空工程学院教员,在读博士生.研究方向:非线性控制系统稳定性,非线性控制系统H_∞控制.E-mail: wwwxpnm@sohu.com;

程兆林 (1939 —),男.山东大学数学与系统科学学院教授,博士生导师.从事奇异系统鲁棒控制,非线性系统鲁棒控制,多变量控制理论与应用,时滞系统的研究.E-mail: chengzha@jn_public.sd.cninfo.net.