

带前置滤波器的 MRAC 系统的变结构控制

武玉强¹, 余星火², 冯纯伯³

(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 墨尔本皇家理工学院 计算机与电气工程系, 澳大利亚 墨尔本;
3. 东南大学 自动化研究所, 江苏 南京 210096)

摘要: 变结构控制对参数不确定性、外部干扰和未建模动态具有鲁棒性, 并被应用到鲁棒模型参考自适应系统. 其缺点是易产生抖振. 本文设计一种带有前置滤波器的变结构控制器, 改善系统动态性能并消除了抖振. 前置滤波器使带有符号函数的控制切换产生连续可测信号, 实际控制律是光滑的. 控制器设计和不确定性估计中引入辅助信号和带有记忆功能的正规化信号, 适当选取控制器参数, 所设计的控制器保证了闭环系统稳定性和任意小的跟踪误差. 仿真结果表明该算法是有效的.

关键词: 未建模动态; 前置滤波器; 变结构控制; 全局稳定性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Variable structure control for MRAC systems with feedforward filter

WU Yu-qiang¹, YU Xing-huo², FENG Chun-bo³

(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Shandong Qufu 273165, China;

2. School of Electrical and Computer Engineering, Royal Melbourne Institute of Technology, Melbourne VIC 3001, Australia;

3. Institute of Automation, Southeast University, Jiangsu Nanjing 210096, China)

Abstract: The variable structure control (VSC) scheme is robust to parameter uncertainty, external disturbance, and unmodeled dynamics, and it is widely applied to designing the robust model reference adaptive control (MRAC) systems. The main drawback of VSC is the phenomena of chattering. To improve system performance and to eliminate chattering, a new VSC with feedforward filter is designed in the paper. The proposed stable feedforward filter makes the control switching with sign functions to produce a continuous and measurable signal so that the actual control law is smooth. The auxiliary signals and normalized signals with memory functions are introduced to the controller design and the estimation of uncertainties. With a suitable choice of controller parameters, it is shown that even when the unmodeled dynamics exists, the proposed VSC guarantees the closed-loop global stability and arbitrary smallness of the tracking error. Simulation validates the proposed VSC scheme.

Key words: unmodeled dynamics; feedforward filter; variable structure control; global stability

1 前言(Introduction)

对没有未建模动态和干扰的最小相位系统, 模型参考自适应控制(MRAC)机制保证了系统的全局稳定性^[1,2]. 如果存在未建模动态或有界干扰, MRAC 可能导致一个不稳定的闭环系统^[3]. 如何抑制未建模动态和外部干扰的鲁棒 MRAC 已有很多研究^[4~7]. 然而, 当存在未建模动态特性或有界干扰时, 各种鲁棒 MRAC 方案要求被控对象的已建模部分的阶的上界已知, 仅能保证跟踪误差是有界的及其平均值很小, 不能使稳态跟踪误差趋近零. 变结构控制具有很强的鲁棒性, 能克服未建模动态和抑制外界干扰^[8,9]. 采用变结构控制方法研究 MRAC 问题取得了许多成果^[10~14]. 由于变结构控制信号是

不连续的, 并产生高频切换, 这对实际系统是不利的.

本文应用变结构控制(VSC)技术, 对带有未建模动态及输入通道存在干扰的 MRAC 系统, 采用前置滤波器方法设计一种变结构控制律. 尽管应用了变结构控制机制, 但实际的控制信号是一个稳定滤波器的输出, 是一个连续信号. 通过引入某种广义误差信号和广义输入输出信号, 在适当选择控制器参数下, 所提出的控制机制使跟踪误差满足任意精度, 也能保证闭环系统的全局稳定性.

2 系统描述(System description)

考虑带有未建模动态特性的单输入单输出(SISO)被控对象

$$y_0 = \frac{k_0 N_0(s)}{D_0(s)} (1 + \mu_1 \Delta_1(s, \alpha)) (u + \Delta u). \quad (1)$$

其中: $(k_0 N_0(s))/D_0(s)$ 是已建模部分的传递函数; $\mu_1 \Delta_1(s, \alpha)$ 是未建模动态, 不失一般性, 设 μ_1 是正数; $\alpha \in \Omega$, Ω 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的有界区域; Δu 为输入通道的干扰. 控制的目的是设计一个变结构控制器使输出 $y_0(t)$ 渐近跟踪参考输出 $y_m(t)$, 且使闭环系统的所有信号有界. 参考输出 $y_m(t)$ 为

$$y_m(t) = W_m(s)r(t). \quad (2)$$

$r(t)$ 是有界且分段连续的, $W_m(s)$ 稳定且相对阶大于 $(k_0 N_0(s))/D_0(s)$ 的相对阶. 对系统(1)作如下假设:

A1) $(k_0 N_0(s))/D_0(s)$ 是严格正则的; $D_0(s)$ 和 $N_0(s)$ 是首一多项式, $N_0(s)$ 是一个 Hurwitz 多项式.

A2) 系统(1)的已建模部分 $(k_0 N_0(s))/D_0(s)$ 的相对阶 n^* 和高频增益 k_0 的符号是已知的.

A3) $\Delta_1(s, \alpha)$ 是正则稳定的.

A4) Δu 满足

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= \Delta(s)f(y_0(t), u(t), t), \\ |\Delta(s)x(t)| &\leq K_2(\sup_{\tau \leq t} |x(\tau)| + \epsilon(t)), \end{aligned}$$

$$|f(y_0(t), u(t), t)| \leq$$

$$K_2(\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \mu_2 \sup_{\tau \leq t} |u(\tau)| + 1).$$

$\mu_2 > 0$ 是小常数, $K_i > 0 (i = 1, 2)$ 是某正常数, $\Delta(s)$ 是稳定的传递函数, $x(t)$ 代表一个分段连续函数.

A5) 对变换 $v(t) = (s + \alpha_1)^l u(t), 1 \leq l \leq n^*$, 存在一常数 K_1 , 使得

$$|(s + q_0)^l \Delta u(t)| \leq$$

$$K_1(\mu_2 \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + 1).$$

注 1 假设 A1)、A2) 是鲁棒 MRAC 系统的常规性要求. 但这里已建模部分阶的上界可以是未知的. 对假设 A3), 在鲁棒 MRAC 的研究中, 一般要求未建模动态 $\Delta_1(s, \alpha)$ 稳定, 它可能是由系统寄生的高频动态引起的. 假设 A4) 表示在输入通道的干扰 Δu 中, 由控制量引起的部分是小增益的. 假设 A5) 要求输入通道的干扰关于输入信号是因果的, 关于输出信号是可微的, 例如 $\sin(y)u$ 这样的项就满足假设条件. $\Delta_1(s, \alpha)$ 和 $\Delta(s)$ 可能是无限维的线性算子或是时间延迟算子, 代表范围更广的未建模动态.

为了设计控制系统的前置滤波器作变换

$$u(t) = \frac{1}{F(s)}v(t). \quad (3)$$

这里 $F(s)$ 是一个稳定多项式, 不失一般性, 设

$F(s) = (s + \alpha_1)^l, \alpha_1 > 0, l$ 是正整数使得 $W_m(s)F(s)$ 是正则的, 即 $l \leq n^*$. 取跟踪误差为 $e_0(t) = y_0(t) - y_m(t)$. 定义 Hurwitz 多项式 $L_n^*(s)$ 和 $L_i(s)$:

$$\begin{cases} L_n^*(s) = (s + \alpha_1)^{n^*}, & L_i(s) = (s + \alpha_1)^i, \\ i = 1, 2, \dots, n^*, & \alpha_1 > 0. \end{cases} \quad (4)$$

令 $D_1(s) = L_n^*(s)N_0(s), R(s) = D_1(s) - D_0(s)$, 则 $R(s)$ 的阶小于 $D_1(s)$ 的阶. 系统(1)可表示为

$$D_0(s)y_0 = k_0 N_0(s)(1 + \mu_1 \Delta_1(s, \alpha))(u + \Delta u). \quad (5)$$

把式(3)代入式(5), 记 $d(t), \eta(t)$ 为

$$d(t) \triangleq \frac{L_1(s)R(s)}{D_1(s)}y_0(t), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \eta(t) &\triangleq \frac{\mu_1 k_0 L_1(s)}{L_n^*(s)} \Delta_1(s, \alpha) u(t) + \\ &\frac{\mu_1 k_0 L_1(s)}{L_n^*(s)} \Delta_1(s, \alpha) \Delta(s) f(y_0(t), u(t), t) + \\ &\frac{k_0 L_1(s)}{L_n^*(s)} \Delta(s) f(y_0(t), u(t), t). \end{aligned} \quad (7)$$

因为 $L_1(s) = s + \alpha_1, \alpha_1 > 0$, 得到

$$y_0(t) = \frac{k_0}{L(s)}v(t) + \frac{1}{L_1(s)}(d(t) + \eta(t)). \quad (8)$$

其中 $L(s) = L_n^*(s)F(s)$. 由参考模型(2)及式(8)得到误差方程

$$\begin{aligned} \dot{e}_0(t) &= -\alpha_1 e_0(t) + \frac{k_0}{L_{n^*+l-1}(s)}v(t) + d(t) + \\ &\eta(t) - L_1(s)W_m(s)r(t). \end{aligned} \quad (9)$$

3 控制器设计(Controller design)

从误差动态(9)看到, 广义干扰 $d(t)$ 和 $\eta(t)$ 不是被 $v(t)$ 直接控制, 而是被一个“经过滤波”的 $v(t)$ 控制. 为清晰起见, 首先假设高频增益 k_0 是已知的(k_0 未知的情况将在本节最后部分进行解释). 不失一般性, 假设 $k_0 = 1$. 误差方程(9)成为

$$\begin{aligned} \dot{e}_0 &= -\alpha_1 e_0(t) + \frac{1}{L_{n^*+l-1}(s)}v(t) + d(t) + \\ &\eta(t) - L_1(s)W_m(s)r(t). \end{aligned} \quad (10)$$

辅助误差信号定义如下

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -\alpha_1 y_1(t) + v_1(t) - \frac{1}{L_{n^*+l-1}(s)}v(t) + \\ &L_1(s)W_m(s)r(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$e_1(t) = e_0(t) + y_1(t), \quad (12)$$

$$e_2(t) = -L_{n^*+l-2}(s)H(s)v_1(t) + \frac{1}{L_1(s)}v(t) -$$

$$L_{n^*+l-1}(s)W_m(s)r(t), \quad (13)$$

$$\begin{cases} H(s) = \frac{a^{n^*+l}}{(s+a)^{n^*+l}} (a \gg 1), \\ e(t) = e_0(t) - \frac{1}{L_{n^*+l-1}(s)} e_2(t). \end{cases} \quad (14)$$

这里 a 充分大, 可使跟踪误差变得充分小. $v_1(t)$ 的选取使 $e_1(t)$ 在有限时间内趋向零. 取

$$v_1(t) = -\operatorname{sgn}(e_1(t)) [K_1^* \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)|] - \operatorname{sgn}(e_1(t)) [K_2^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 2]. \quad (15)$$

其中 K_1^*, K_2^* 是适当的正数, 满足 $\mu_1 M_2 + \mu_2 M_2 < K_2^*, M_2 + M_1 < K_1^*$. 从式(10)~(12)得到

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = -\alpha_1 e_1(t) + v_1(t) + d(t) + \eta(t), \\ v_1(t) = L_1(s)e_1(t) - d(t) - \eta(t). \end{cases} \quad (16)$$

把式(16)代入式(13)中, 得到其状态空间实现

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(t) = & -\alpha_1 e_2(t) + v(t) + H(s)L_{n^*+l-1}(s)d(t) + \\ & H(s)L_{n^*+l-1}(s)\eta(t) - L_{n^*+l}(s)H(s)e_1(t) - \\ & L_{n^*+l}(s)W_m(s)r(t). \end{aligned} \quad (17)$$

下面引理将被用于 VSC 的设计和稳定性的分析.

引理 1 a) 假设 $\Delta(s)$ 是一个稳定的正则传递函数, 令 $z(t) = \Delta(s)v(t)$, 则对于任意分段连续函数 $v(t)$, 存在 $M > 0$, 使得 $|z(t)| \leq M(\sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \varepsilon(t))$. b) 对式(6)、(7)定义的 $d(t)$, $\eta(t)$, 存在正数 M_1, M_2 , 使得

$$|d(t)| \leq M_1 \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \varepsilon(t),$$

$$|\eta(t)| \leq$$

$$\mu_1 M_2 \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| +$$

$$M_2 [\mu_2 \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)|] + \varepsilon(t).$$

$\varepsilon(t)$ 依指数收敛(证明省略).

引理 2^[7] 令 $sH_1 \triangleq 1 - H(s)$, $\bar{h}_1(t)$ 为 $H_1(s)$ 的脉冲响应函数, 则 $\|\bar{h}_1(t)\|_1 \triangleq \int_0^\infty |\bar{h}_1(t)| dt = \frac{n^* + l}{a}$.

引理 3 令 $z(t) = H(s)x(t)$, $H(s)$ 在式(14)中定义, $x(t)$ 是一分段连续函数, 那么 $|z(t)| \leq \sup_{\tau \leq t} |x(\tau)| + \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t)$ 依指数趋近于零(证明省略).

变结构控制器设计如下

$$v(t) = -2\operatorname{sgn}(e_2(t))K^* \left[\sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + 1 \right]. \quad (18)$$

这里 K^* 是某正常数. 本文主要结果叙述如下:

定理 对系统(1), 前置滤波器如式(3)给出, 引入式(11)~(14)定义的辅助信号, 变结构控制器如式(18), 若假设 A1)~A5)满足, 取式(14)中的设计参数 a 充分大, 则存在正常数 μ_i^* ($\mu_i^* \leq \mu^*$), 使得当 $\mu_i < \mu_i^*$ ($i = 1, 2$) 时, 闭环系统的所有信号是有界的, 并且跟踪误差满足 $e_0(t) = O(1/a) + \varepsilon(t)$, 其中 $\varepsilon(t)$ 依指数趋于零. 即当 a 趋向无穷大时, 跟踪误差 $e_0(t)$ 趋向零(证明见附录).

当 k_0 未知, 但它的符号已知时, 不失一般性, 假设 k_0 为正. 令 $\bar{u}(t) = k_0 u(t)$, 那么系统(1)被转换成

$$y_0 = \frac{N_0(s)}{D_0(s)} (1 + \mu_1 \Delta_1(s, a)) (\bar{u}(t) + k_0 \Delta u). \quad (19)$$

如果变换(3)及控制如式(18), 那么系统稳定性和跟踪误差的收敛性能被保证. 此时变成

$$v(t) = -2\operatorname{sgn}(e_2(t)) \frac{K^*}{k_0} \left[\sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + 1 \right] - 2\operatorname{sgn}(e_2(t)) \frac{K^*}{k_0} \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)|. \quad (20)$$

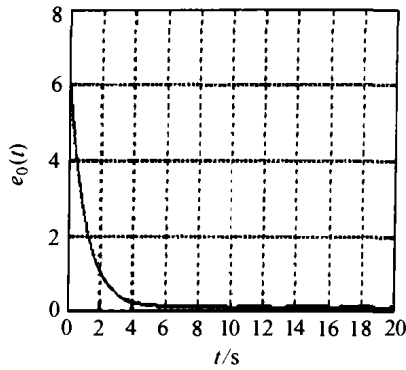
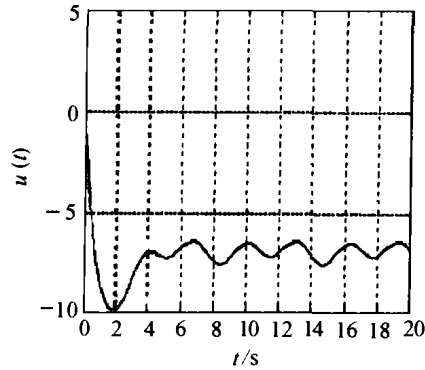
因为 k_0 未知, 控制律(20)不能实现. 假设知道 k_0 的上下界为 $K_{\max}$ 和 $K_{\min}$, 令区间 $\bar{T} = [K^*/K_{\max}, K^*/K_{\min}]$, 则 $K^*/k_0 \in \bar{T}$. 在式(18)中, μ^* 和 K^* 是被选择的参数, 所以能用一个正数 $\bar{K} \in \bar{T}$ 来代替 K^*/k_0 并使得定理仍然成立. 因此, 系统稳定性和跟踪误差特性被保证.

4 仿真(Simulation)

为了表明本文算法的有效性, 考虑下面的系统

$$y_0(t) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} (1 + \mu \frac{2}{(s+3)}) [u(t) + \frac{1}{s+1} \mu_1 \sin(y_0 u)(u + y_0)].$$

其中 μ, μ_1 是适当小的正数. 取 $F(s) = s+1$, 参考信号 $y_m(t) = 2\sin(t)$, $L_i(s) = (s+1)^i$ ($i = 1, 2$). 参数 $\mu = \mu_1 = 0.001$, $K_1^* = 5$, $K_2^* = 0.01$, $K^* = 3$. $\alpha_1 = 1$, 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 用 $(x/(|x| + 0.001))$ 来逼近. 图1和图2给出了参数 $a = 500$ 时的输出跟踪误差和控制信号 $u(t)$. 随着 a 的变大, 跟踪误差减小. 由于 $u(t)$ 是经过滤波器 $1/F(s) = 1/(s+1)$ 后的信号, 它的振荡减轻.

图1 $a = 500$ 时跟踪误差 $e_0(t)$ Fig. 1 Tracking error $e_0(t)$ when $a = 500$ 图2 $a = 500$ 时控制律 $u(t)$ Fig. 2 Control law $u(t)$ when $a = 500$

5 结论(Conclusion)

本文对已建模部分的相对阶大于1,以及有未建模动态特性且输入通道上有扰动的不确定系统提出了一种VSC控制设计方案.这里已建模部分阶的上界不需要已知.本文的创新之处在于有记忆功能的正规化信号与增广误差信号被引进到VSC设计中.提出的算法为鲁棒MRAC问题提供了新颖的解,此VSC机制使闭环系统的所有信号有界,系统的全局稳定性和收敛性也被证明.前置滤波器使实际系统的控制 $u(t)$ 是一个连续的信号.本文提出的VSC控制能够处理未建模动态为非线性的情况,通过设计 a 可使跟踪误差任意小.这些在MRAC理论中没有实现.

参考文献(References):

- [1] NARENDRA K S, LIN Y H, VALAVANI L. Stable adaptive controller design, part II: proof of stability [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1980, 25(3): 440 - 448.
- [2] NARENDRA K S, VALAVANI L. Stable adaptive controller design-direct control [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1978, 23(4): 570 - 583.
- [3] ROHRS C E, ALAVANI L V, ATHANS M, et al. Robustness of continuous time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1985, 30(9): 881 - 888.
- [4] SASTRY S S, BODSON M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [5] NARENDRA K S, ANNASWAMY A M. *Stable Adaptive Systems* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
- [6] IOANNOU P A, TSAKALIS K S. A robust direct adaptive controller [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(11): 1033 - 1043.
- [7] TAO G, IOANNOU P A. Robust adaptive control-a modified scheme [J]. *Int J Control*, 1991, 54(1): 241 - 256.

- [8] UTKIN V I. Variable structure systems with sliding modes [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1977, 22(2): 212 - 222.
- [9] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1993. (GAO Weibing. *Foundation of Variable Structure Control* [M]. Beijing: Science Press, 1993.)
- [10] FU L C. A new approach to robust model reference adaptive control for a class of plants [J]. *Int J Control*, 1991, 53(6): 1359 - 1375.
- [11] HSU L, COSTA R R. Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements, part I [J]. *Int J Control*, 1989, 49(2): 399 - 416.
- [12] CHIEN C, SUN K, WU A, et al. A robust MRAC using variable structure design for multivariable plants [J]. *Automatica*, 1996, 32(6): 833 - 848.
- [13] HSU L, LIZARRALDE F, ARAUJO A D. New results on output feedback VS-MRAC: design and stability analysis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(3): 386 - 393.
- [14] WU Yuqiang, YU Xinghuo, FENG Chunbo. Variable structure control for MRAC systems with perturbations in input and output channels [J]. *Science in China, Series E*, 2000, 43(4): 430 - 448.

附录(Appendix):

定理的证明 a) 先证明 $e_1(t)$ 在有限时间内达到零并保持为零. 根据引理1中 $d(t)$, $\eta(t)$ 的估计, 由于 $\epsilon(t)$ 依指数收敛, 故存在 T_ϵ , 当 $t > T_\epsilon$ 时, $|\epsilon(t)| < 1$. 再由式(15)给定的 $v_1(t)$, 得到

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) e_1(t) = & -\alpha_1 e_1^2(t) - |e_1(t)| [K_1^* \sup_{t \leq \tau} |y_0(\tau)| + \\ & K_2^* \sup_{t \leq \tau} |v(\tau)| + 2] + e_1(t) [d(t) + \eta(t)] \leq \\ & -\alpha_1 |e_1(t)|^2 - |e_1(t)|. \end{aligned}$$

这表明 $e_1(t)$ 在有限时间内达到零.

b) 再证 $v(t)$ 使 $e_2(t)$ 在有限时间内达到零. 易证式(17)右边最后两项当时间 t 充分大时小于一个正常数. 本文主要难点是给出 $H(s)L_1(s)d(t)$ 和 $H(s)L_1(s)\eta(t)$ 的不依赖于 a 的估计. 由 $e(t)$ 的定义及式(10)、(16)和式(14)得

$$e(t) = H_1(s)(d(t) + \eta(t)) -$$

$$\alpha_1 H_1(s)/L_1(s)(d(t) + \eta(t)) + H(s)e_1(t), \quad (A1)$$

$$y_0(t) = H_1(s)(d(t) + \eta(t)) - \alpha_1 H_1(s)/L_1(s)(d(t) + \eta(t)) + H(s)e_1(t) + 1/L_{n^*+l-1}(s)e_2(t) + y_m(t). \quad (A2)$$

记 $g_d(t), g_\eta(t), g_r(t)$ 为

$$\begin{aligned} g_d(t) &\triangleq [(L_1(s)R(s) - \alpha_1 R(s))/D_1(s)]L_{n^*+l-1}(s)d(t), \\ g_\eta(t) &\triangleq [(L_1(s)R(s) - \alpha_1 R(s))/D_1(s)]L_{n^*+l-1}(s)\eta(t), \\ g_r(t) &\triangleq L_{n^*+l}(s)H(s)[H(s)R(s)/D_1(s) - 1]e_1(t) + \\ &\quad [H(s)R(s)/D_1(s)]L_{n^*+l}(s)W_m(s)r(t) - \\ &\quad L_{n^*+l}(s)W_m(s)r(t). \end{aligned} \quad (A3)$$

将式(A2)代入式(6),再根据式(17)得到

$$\begin{aligned} \dot{e}_2(t) = & -\alpha_1 e_2(t) + v(t) + g_r(t) + H(s)L_1(s)R(s)/D_1(s)e_2(t) + \\ & H_1(s)H(s)g_d(t) + H_1(s)H(s)g_\eta(t) + \\ & H(s)L_{n^*+l-1}(s)\eta(t). \end{aligned} \quad (A4)$$

下面估计 $g_d(t), g_\eta(t), L_{n^*+l-1}(s)\eta(t)$ 和 $g_r(t)$. 根据式(A3)知存在一个独立于 a 的正数 K_r 和 T ,使得当 $t > T$ 时, $|g_r(t)| \leq K_r$,从 $d(t)$ 和 $\eta(t)$ 的定义及式(8)得出

$$\begin{aligned} L_{n^*+l-1}(s)d(t) = & [L_1(s)R(s)/D_1(s)]L_{n^*+l-1}(s)y_0(t) = \\ & R(s)/D_1(s)v(t) + [L_1(s)R(s)/D_1(s)]L_{n^*+l-2}d(t) + \\ & [L_1(s)R(s)/D_1(s)]L_{n^*+l-2}\eta(t), \end{aligned} \quad (A5)$$

$$\begin{aligned} L_{n^*+l-1}(s)\eta(t) = & \mu_1 \Delta_1(s, \alpha)v(t) + \mu_1 L_l(s)\Delta_1(s, \alpha)\Delta(s)f(y_0(t), u(t), t) + \\ & L_l(s)\Delta(s)f(y_0(t), u(t), t). \end{aligned} \quad (A6)$$

对式(A5)及式(A6),由假设 A3)~A5)及引理 1,可知存在正数 K_1, T_{n^*+l-1} 和 μ_i^* ($\mu_i^* \leq \mu^*, i = 1, 2$),当 $\mu_i < \mu_i^*$ 时,

$$\begin{aligned} |L_{n^*+l-1}(s)\eta(t)| &\leq K_l[\mu^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \varepsilon(t)], \\ |L_{n^*+l-1}(s)d(t)| &\leq T_{n^*+l-1}[\sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \varepsilon(t)]. \end{aligned}$$

应用引理 1,总能选择正数 K_d, K_η ,对于 μ_i^* 来说,当 $\mu_i < \mu_i^*$ ($i = 1, 2$) 时,使得

$$\begin{aligned} |g_d(t)| &\leq K_d[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \varepsilon(t)], \\ |g_\eta(t)| &\leq K_\eta[\mu^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \varepsilon(t)]. \end{aligned} \quad (A7)$$

由引理 3 及式(A7),存在 T^* ,使得当 $t > T^*$ 时,

$$\begin{aligned} |H_1(s)H(s)g_d(t)| &\leq ((n^* + l)K_d/a)[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1], \\ |H_1(s)H(s)g_\eta(t)| &\leq ((n^* + l)K_\eta/a)[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1], \end{aligned} \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} |H(s)L_{n^*+l-1}(s)\eta(t)| &\leq K_l[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \mu^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1], \\ |H(s)L_{n^*+l-1}(s)d(t)| &\leq K_l[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \mu^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1], \end{aligned} \quad (A9)$$

$$\begin{aligned} |H(s)L_{n^*+l-1}(s)\eta(t)| &\leq K_l[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \mu^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1], \\ |H(s)L_{n^*+l-1}(s)d(t)| &\leq K_l[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \mu^* \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1], \end{aligned} \quad (A10)$$

$$|H(s)L_1(s)R(s)/D_1(s)e_2(t)| \leq K_e \sup_{\tau \leq t} |e_2(\tau)| + 1. \quad (A11)$$

现在再回到误差动态方程(A4)上.不等式(A8)~(A11)保证了

$$\begin{aligned} |H_1(s)H(s)g_d(t)| + |H_1(s)H(s)g_\eta(t)| + |H(s)L_{n^*+l-1}(s)\eta(t)| &\leq \\ &[(n^* + l)(K_d + K_\eta)/a + K_l](\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + 1) + \\ &[(n^* + l)(K_d + K_\eta)/a + K_l\mu^*] \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)|. \end{aligned}$$

在 VSC 律(18)的选择中,使 K^*, μ^* 满足

$$[((n^* + l)K_d + (n^* + l)K_\eta\mu^*)/a + K_l\mu^*] < 1/2,$$

$$K^* > \max \{(n^* + l)(K_d + K_\eta)/a + K_l + K_r + 2, K_e\}.$$

可证当 $\mu_i < \mu_i^*$ ($i = 1, 2$) 时,对 Lyapunov 函数 $V(e_2(t)) = (1/2)e_2^2(t)$,沿式(A4)求导得 $\dot{V}(e_2(t)) \leq -\alpha_1 e_2^2(t) - |e_2(t)| < 0$.这就保证了 $e_2(t)$ 在有限时间内达到零并保持为零.

c) 证明当 $t > T$ 时, $e(t) = O(1/a) + \varepsilon(t)$.根据 $\eta(t)$ 和 $d(t)$ 的定义,应用引理 1 和引理 2 可得

$$\begin{aligned} |H_1(s)(d(t) + \eta(t))| &\leq ((n^* + l)/a)[(\mu_1 + \mu_2)M_2 \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \\ &(M_1 + M_2) \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \varepsilon(t)], \\ |H_1(s)\alpha_1/L_1(s)(d(t) + \eta(t))| &\leq ((n^* + l)/a)[(\mu_1 + \mu_2)M_2 \sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \\ &(M_1 + M_2) \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \varepsilon(t)]. \end{aligned}$$

因 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 在有限时间内成为零, $H(s)$ 严格正则, $y_m(t)$ 有界,所以存在正数 M_y 使得

$$|H(s)e_1(t)| + |(1/L_{n^*+l-1}(s))e_2(t)| + |y_m(t)| \leq M_y + \varepsilon(t).$$

不妨假设 $M_y \geq \max [2(\mu_1^* + \mu_2^*)M_2, 2(M_1 + M_2)]$,当 $\mu_i < \mu_i^*$ ($i = 1, 2$) 时,由式(A2)得到

$$\begin{aligned} |y_0(t)| &\leq ((n^* + l)/a)M_y[\sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| + \\ &\sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + \varepsilon(t)] + M_y + \varepsilon(t). \end{aligned} \quad (A12)$$

对任意的初始状态 $X_0, \exists T(X_0) > 0$,当 $t > T(X_0)$ 时, $|\varepsilon(t)| < 1$.对式(A12)两边在 $[T(X_0), t]$ 上取最大值得

$$\begin{aligned} \sup_{\tau \leq t} |y_0(\tau)| &\leq ((n^* + l)M_y/(a - (n^* + l)M_y))[\sup_{\tau \leq t} |v(\tau)| + 1] + \\ &a(M_y + 1)/(a - (n^* + l)M_y). \end{aligned} \quad (A13)$$

把式(A13)代入控制律(18)中,只要 $1 - 2K^*[(n^* + l)M_y/(a - (n^* + l)M_y)] > 1/2$ 成立,可解得 $v(t)$ 有界且其上界独立于 a .进而推出 $y_0(t)$ 有界且其界独立于 a .

d) 从式(A5)、(A6)可得出 $L_i(s)d(t), L_j(s)\eta(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n^*$) 是有界的.再由引理 3 得存在正数 M_1^*, M_2^* 使

$$\begin{aligned} |H_1(s)L_1(s)(d(t) + \eta(t))| &\leq (n^* + l)M_1^*/a + \varepsilon(t), \\ |H_1(s)(d(t) + \eta(t))| &\leq (n^* + l)M_2^*/a + \varepsilon(t). \end{aligned}$$

(下转第 210 页)

- tems [J]. *IEEE Trans on Circuits System-I*, 1999, 46(6): 767 - 772.
- [4] PYRAGAS K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. *Physics Letters A*, 1992, 170(6): 421 - 428.
- [5] 裴文江, 黄俊. 自适应延迟反馈控制混沌[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 297 - 300.
(PEI Wenjiang, HUANG Jun. Control chaos of adaptive delay feedback [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(2): 297 - 300.)
- [6] HUBERMAN B A, LUMER E. Dynamics of adaptive systems [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems-I*, 1990, 37(4): 547 - 550.
- [7] CHEN G, DONG X. On feedback control of chaotic nonlinear dynamic systems [J]. *Int J of Bifurcations & Chaos*, 1992, 2(2): 407 - 411.
- [8] HWANG C C. A nonlinear feedback control of the Lorenz equation [J]. *Int J of Engineering Science*, 1999, 37(12): 1893 - 1900.
- [9] LI J, ZHANG J. New treatment on bifurcations of periodic solutions and homoclinic orbits at high r in the Lorenz equations [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1993, 53(3): 1059 - 1071.
- [10] WIGGINS S. On the detection and dynamical consequences of orbits homoclinic to hyperbolic periodic orbits and normally hyperbolic invariant tori in a class of ordinary differential equations [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1988, 48(1): 262 - 285.

作者简介:

闵富红 (1970 —), 女, 南京师范大学电气与电子工程学院教师. 现在南京理工大学自动化系攻读博士学位. 目前研究方向为混沌控制. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn;

王执铨 (1939 —), 男, 教授, 博士生导师. 主要从事动态大系统的建模以及混沌控制等方面的研究.

(上接第204页)

取 Lyapunov 函数 $V_0(e(t)) = (1/2)e^2(t)$, $V_0(e(t))$ 沿式(A1)的导数

$$e(t)\dot{e}(t) \leq -\alpha_1 e^2(t) + [(n^* + l)(M_1^* + M_2^*)/a + \epsilon(t)] |e(t)| + |L_1(t)H(s)e_1(t)| |e(t)|. \quad (A14)$$

因 $e_1(t)$ 在有限时间内趋于零, $\epsilon(t)$ 依指数趋向零. 从式(A14)推出 $e(t) = O(1/a) + \epsilon(t)$. 再根据式(14)得, 对充分大的 T , 当 $t > T$ 时, $|e_0(t)| < O(1/a) + \epsilon(t)$. 证毕.

作者简介:

武玉强 (1962 —), 男, 教授. 研究领域包括自适应控制, 变结构控制, 非线性系统控制, 混杂系统控制. E-mail: wyq@qfnu.edu.cn;

余星火 (1960 —), 男, 教授. 研究领域包括变结构控制, 非线性系统控制, 混沌控制. E-mail: x.yu@rmit.edu.au.

冯纯伯 (1928 —), 男, 教授, 中国科学院院士. 研究领域为自动控制理论与应用. E-mail: chunbo@seu.edu.cn.