

文章编号: 1000-8152(2004)02-0205-06

## 混沌 Lorenz 系统延迟反馈控制的机理分析

闵富红<sup>1,2</sup>, 王执铨<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094; 2. 南京师范大学 电气与电子工程学院, 江苏 南京 210042)

**摘要:** 利用广义 Hamilton 系统理论的 Melnikov 方法, 严格分析了延迟反馈方法控制混沌 Lorenz 系统到周期解的机理, 揭示了延迟时间与控制混沌的关系. 延迟反馈项实际上是一个作用明显的扰动项, 通过选择合适的参数, 使得系统的稳定流形与不稳定流形不再横截相交, Smale 意义下的混沌受到抑制, 将 Lorenz 混沌系统引导到各种不同的周期轨道; 可见, 延迟时间关系到控制扰动量的大小, 但不必是混沌吸引子内嵌不稳定周期轨道的周期整数倍. 另外, 通过数值仿真, 其结果与理论分析相符, 从而表明了该分析方法的有效性.

**关键词:** 混沌; 广义 Hamilton 系统理论; Melnikov 方法; Lorenz; 延迟时间

**中图分类号:** TP391 **文献标识码:** A

## Analyze the time-delayed feedback control of chaotic Lorenz system

MIN Fu-hong<sup>1,2</sup>, WANG Zhi-quan<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China;

2. School of Electronic and Electrical Engineering, Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210042, China)

**Abstract:** The paper focuses on the problem of suppressing chaos in the time-delayed feedback control system. The validity of Melnikov's method in the generalized Hamilton system perturbed by weak periodic terms and time-delay terms is discussed. The Melnikov's technique is applied to analyze the mechanism of time-delayed feedback control for Lorenz systems. It is shown that the time-delayed feedback control in fact is a perturbation term, which with a suitable selection of parameters makes the stable manifolds no longer intersecting the unstable manifolds. Then it is revealed that the time delay can be independent of the period of the inherent unstable orbit in the chaotic attractor. Moreover, the numerical simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the theoretical analysis.

**Key words:** chaos; generalized Hamilton system; Melnikov's method; Lorenz; delayed time

### 1 引言 (Introduction)

混沌是一种对扰动非常敏感的、高度不稳定的非线性运动, 它在很多情况下会降低系统性能, 人们提出了许多方法来消除混沌系统中的混沌现象. 目前国内外已经提出了许多不同的混沌控制方法, 适用于各种情形下的混沌控制, 如 OGY 法<sup>[1]</sup>、延迟反馈控制法<sup>[2-4]</sup>、自适应控制<sup>[5,6]</sup>、线性反馈控制<sup>[7,8]</sup>等. 这些方法各有利弊和应用范围, 相比之下, 控制代价小且在物理上易于实现的方法有更广泛的应用前景. 如 OGY 法一般只实用于离散系统或可以构造庞加莱映射的连续系统, 参数变化范围小, 而且需要混沌系统在不稳定周期轨道附近的准确模型, 来调节控制参数应付不稳定流形. 与 OGY 法相比, Pyragas 提出的延迟反馈控制 (简称 DFC) 控制方法不需要精确的系统模型, 避免了目标轨道的确定, 控制器简单, 适时性好, 易于工程实现. 但是, 在关于延迟反馈的文献中, 大多数只有数值实验, 很少从理论上给

出控制后系统的演化结果. 本文使用广义 Hamilton 系统理论中的 Melnikov 方法<sup>[9,10]</sup>来分析延迟反馈控制的混沌 Lorenz 系统, 揭示了在自治系统中延迟时间不一定是混沌系统内嵌不稳定周期轨道的周期的整数倍. 此外, 通过选择合适的参数, 使得系统的稳定流形与不稳定流形不再横截相交, Smale 意义下的混沌受到抑制, 导致了规则的运动.

### 2 延迟反馈控制混沌 Lorenz 系统与仿真 (Simulation and time-delayed feedback control of chaos in Lorenz system)

#### 2.1 延迟反馈控制的 Lorenz 系统 (Time-delayed feedback control of chaos in Lorenz system)

考虑如下的 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} = (\gamma - Z)X - Y, \\ \dot{Z} = -bZ + XY. \end{cases} \quad (1)$$

当参数  $\sigma = 10, \gamma = 28, b = 8/3$  时, 该系统存在混沌运动. 若对系统(1)的第三式施加延迟反馈, 则受控后的 Lorenz 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} = (\gamma - Z) - Y, \\ \dot{Z} = -bZ + XY + \rho[Z(t - \beta) - Z(t)]. \end{cases} \quad (2)$$

将系统作变换:  $\tilde{w} = \gamma - Z, X = \tilde{y}, Y = \tilde{z}, t = \tilde{t}$ , 得到下列形式

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{w}}{d\tilde{t}} = b(\gamma - \tilde{w}) - \tilde{y}\tilde{z} - \rho[\tilde{w}(\tilde{t}) - \tilde{w}(\tilde{t} - \beta)], \\ \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{t}} = \sigma(\tilde{z} - \tilde{y}), \\ \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} = \tilde{w}\tilde{y} - \tilde{z}. \end{cases} \quad (3)$$

再引入尺度变换

$$\begin{aligned} \tilde{t} &\rightarrow \frac{\epsilon t}{b}, \quad \tilde{w} \rightarrow \frac{w}{\epsilon^2 \sigma}, \quad \tilde{z} \rightarrow \frac{z}{\epsilon^2 \sigma}, \\ \tilde{y} &\rightarrow \frac{y}{\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{1}{\sqrt{\gamma \sigma}}, \quad \eta = \frac{\epsilon \beta}{b}, \end{aligned}$$

那么式(3)变成以下形式的 Robbins 模型:

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \epsilon(1 - w) - \frac{1}{b}yz - \frac{\epsilon\rho}{b}[w(t) - w(t - \eta)], \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{b}wy - \frac{1}{b}\epsilon z, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{b}z - \frac{1}{b}\epsilon \sigma y. \end{cases} \quad (4)$$

注意到, 当  $\epsilon = 0$  时, 未扰动系统(4)的平衡点分别填满了  $w$  轴和  $z$  轴或  $y$  轴. 但是, 当  $\epsilon \neq 0$  时, 扰动系统有 3 个平衡点, 其坐标分别为  $(w, z, y) = (1, 0, 0), (\epsilon^2 \sigma, \epsilon \sigma \alpha, \alpha), (\epsilon^2 \sigma, -\epsilon \sigma \alpha, -\alpha)$ , 其中  $\alpha = [(1 - \epsilon^2 \sigma)/\sigma]^{1/2}$ , 且  $(1, 0, 0)$  为鞍点. 可见, 式(4)变为 3 维慢变系统的形式, 下面按照文献[9, 10]中的理论对其进行详细地分析.

当  $\epsilon = 0$  时, 系统(4)化为三维 Hamilton 系统

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} w \\ z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -z/b \\ 0 & 0 & w/b \\ z/b & -w/b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{bmatrix} = \\ &J \begin{bmatrix} \partial H / \partial w \\ \partial H / \partial z \\ \partial H / \partial y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中 Hamilton 函数为

$$H(w, z, y) = w + \frac{1}{2}y^2 = A. \quad (6)$$

系统(4)还存在 Casimir 函数

$$C(w, z, y) = w^2 + z^2 = B^2. \quad (7)$$

按照广义 Hamilton 系统的理论, 三维系统(4)可以在辛流形式(7)上约化为二维的 Hamilton 系统. 对于固定  $B > 0$ , 进行变量代换

$$\begin{cases} w = (B + \rho) \cos(\theta - \pi), \\ z = (B + \rho) \sin(\theta - \pi), \\ y = y. \end{cases} \quad (8)$$

使得式(4)变为辛流形式(7)上的如下系统(9):

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\epsilon \{ \cos \theta + (B + \rho) \cos^2 \theta + \frac{1}{b}(B + \rho) \sin^2 \theta + \\ \quad \frac{\rho}{b}(B + \rho) [\cos \theta - \cos \theta(t - \eta)] \cos \theta \}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{b}y + \epsilon \{ \frac{\sin \theta}{(B + \rho)} + (1 - \frac{1}{b}) \sin \theta \cos \theta + \\ \quad \frac{\rho}{b} [\cos \theta - \cos \theta(t - \eta)] \sin \theta \}, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{B + \rho}{b} \sin \theta - \frac{1}{b} \epsilon \sigma y. \end{cases} \quad (9)$$

其中  $|\rho/B| \ll 1$ . 显然系统(9)是具有一个慢变量  $\rho$  的扰动摆系统, 这样建立了大 Rayleigh 数 Lorenz 模型和扰动摆方程之间的联系.

当  $\epsilon = 0$  时, 系统(9)是具有如下 Hamilton 函数的 Hamilton 系统:

$$H(\theta, y) = \frac{1}{2b}y^2 - \frac{B + \rho}{b} \cos \theta = \frac{A}{b}. \quad (10)$$

可以看出, 当  $-(B + \rho) < A < (B + \rho)$  时, 系统(9)有振动型周期轨道  $\{\Gamma_0^k\}$ :

$$\begin{cases} \theta_0(t, k) = 2 \arcsin [k \operatorname{sn}(\frac{\sqrt{B + \rho}}{b} t, k)], \\ y_0(t, k) = 2k \sqrt{B + \rho} \operatorname{cn}(\frac{\sqrt{B + \rho}}{b} t, k). \end{cases} \quad (11)$$

其中  $\operatorname{sn}(u, k), \operatorname{cn}(u, k)$  和  $\operatorname{dn}(u, k)$  是模为  $k$  的 Jaccobi 椭圆函数, 且

$$k^2 = \frac{A + (B + \rho)}{2(B + \rho)}. \quad (12)$$

当  $A = B + \rho$  时, 存在系统(9)的连接点  $(\rho, \theta, y) = (\rho, \pi, 0)$  的两条同宿轨  $\{\Gamma_{k\pm}^1\}$ , 其参数表示为

$$\begin{aligned} \theta_h(t) &= \pm 2 \arctan [sh(\frac{\sqrt{B + \rho}}{b} t)], \\ y_h(t) &= \pm 2 \sqrt{B + \rho} \operatorname{sech}(\frac{\sqrt{B + \rho}}{b} t). \end{aligned} \quad (13)$$

当  $B + \rho < A < +\infty$  时,系统(9)存在旋转型的周期轨道  $\{\Gamma_{r_{\pm}}^{k_1}\}$ , 其参数表示为

$$\begin{cases} \theta_{r_{\pm}}(t, k_1) = \pm 2\arcsin \left[ \operatorname{sn} \left( \frac{\sqrt{B + \rho}}{k_1 b} t, k_1 \right) \right], \\ y_{r_{\pm}}(t, k_1) = \pm \frac{2\sqrt{B + \rho}}{k_1} \operatorname{dn} \left( \frac{\sqrt{B + \rho}}{k_1 b} t, k_1 \right). \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $\{\Gamma_0^k\}$  和  $\{\Gamma_{r_{\pm}}^{k_1}\}$  的周期分别是  $T_0(k) = \frac{4K(k)b}{\sqrt{B + \rho}}$  和  $T_r(k) = \frac{2k_1K(k_1)b}{\sqrt{B + \rho}}$ ,  $K(k)$  与  $E(k)$  分别表示第一类与第二类完全椭圆积分.

$$k_1 = k^{-1} = \left( \frac{2(B + \rho)}{A + B + \rho} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

## 2.2 广义 Hamilton 系统理论的 Melnikov 分析 (Melnikov analysis based on the generalized Hamilton system)

首先研究延迟反馈后, Lorenz 系统的同宿轨道被破坏的情况. 根据文献[9, 10], 只需计算如下的 Melnikov 函数:

$$M_0(B, \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{\sigma}{b^2} y_h^2 + \frac{1}{b} \sin^2 \theta_h + \frac{1}{b} (B + \rho) \left( 1 - \frac{1}{b} \right) \cos \theta_h \sin^2 \theta_h + p \frac{B + \rho}{b^2} \sin^2 \theta_h [\cos \theta_h - \cos \theta_h(t - \eta)] \right\} dt. \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \theta_h dt &= \frac{8b}{3\sqrt{B + \rho}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \theta_h \sin^2 \theta_h dt &= -\frac{8b}{15\sqrt{B + \rho}}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sec^2 h^2 \left( \frac{\sqrt{B + \rho} t}{b} \right) dt &= \frac{2b}{\sqrt{B + \rho}}, \\ P(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \theta_h \cos \theta_h(t - \eta) dt. \end{aligned}$$

$P(\eta)$  的曲线如图 1 所示.

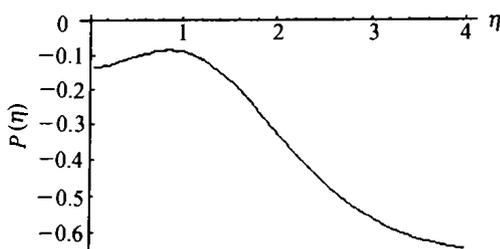


图 1  $P(\eta)$  的曲线  
Fig. 1 Curves of  $P(\eta)$

当没有延迟反馈时, 即  $p = 0$  时, 产生混沌的条

件为

$$M_0(B, \sigma) = \frac{8}{3\sqrt{B + \rho}} - \frac{8\sigma\sqrt{B + \rho}}{b} - \left( 1 - \frac{1}{b} \right) \frac{8\sqrt{B + \rho}}{15} = 0. \quad (17)$$

将参数代入式(17), 解出  $A = B + \rho = 0.0879$ , 此时 Lorenz 系统的稳定流形和不稳定流形横截相交, 具有 Smale 意义下的混沌. 然而, 当延迟反馈控制 Lorenz 系统时, 通过选择合适的参数  $\eta$  和  $p$ , 可以使受控系统的混沌被破坏, 从而产生周期运动. 又由于变量  $\rho$  的缓慢变化, 则  $B + \rho$  的值会随之发生改变. 但是  $A$  和  $B$  表示系统的能量, 它们的值不会发生改变. 可见, 引入延迟反馈后, 总可以选择合适的参数  $\eta$  和  $p$ , 使得 Melnikov 函数  $M_0(B, \sigma) \neq 0$ , 验证结果见后面.

下面研究系统的混沌被破坏后, 在何种条件下进入稳定的周期状态, 对于振动型周期轨道, 计算 Melnikov 函数:

$$\begin{aligned} M_1^0(B, \sigma, k) &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ -\frac{\sigma}{b^2} y_0^2 + \frac{1}{b} \sin^2 \theta_0(t) + \frac{1}{b} (B + \rho) \left( 1 - \frac{1}{b} \right) \cos \theta_0 \sin^2 \theta_0 + \frac{B + \rho}{b} \sin^2 \theta_0 \cdot \frac{p}{b} [\cos \theta_0 - \cos \theta_0(t - \eta)] \right\} dt = \\ &= -\frac{\sigma}{b^2} N_1 + \frac{1}{b} N_2 + \frac{1}{b} (B + \rho) \left( 1 - \frac{1}{b} \right) N_3 + \\ &= p \frac{B + \rho}{b^2} (N_3 - N_{\eta_1}(\eta)), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_3^0(B, \sigma, k) &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \cos \theta_0 + (B + \rho) \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{b} (B + \rho) \sin^2 \theta_0 + \frac{p}{b} (B + \rho) [\cos^2 \theta_0 - \cos \theta_0(t - \eta) \cos \theta_0] \right\} dt = \\ &= N_4 + (B + \rho) N_5 + \frac{1}{b} (B + \rho) N_2 + \\ &= p \frac{B + \rho}{b} (N_5 - N_{\eta_2}(\eta)). \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$N_1 = 16bk\sqrt{B + \rho} [E(k) - (1 - k)K(k)],$$

$$N_2 = \frac{16bk}{3\sqrt{B + \rho}} [(2k^2 + 2k - 3)E(k) - (k^2 + 2k - 3)K(k)],$$

$$N_3 = \frac{16bk}{15\sqrt{B + \rho}} [(8k^4 + 6k^3 + k^2 - 30k + 15)K(k) -$$

$$(16k^4 + 14k^3 - 14k^2 - 30k + 15)E(k)],$$

$$N_4 = \frac{4b}{\sqrt{B + \rho}} [2kE(k) + (1 - 2k)K(k)],$$

$$N_5 = \frac{16b}{3\sqrt{B + \rho}} [(k^3 + 2k^2 - 3k + \frac{3}{4})K(k) - (2k^3 + 2k^2 - 3k)E(k)].$$

其中  $N_{\eta_1} = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0(t - \eta) dt$  和  $N_{\eta_2} = \int_{-T/2}^{T/2} \cos \theta_0 \cos \theta_0(t - \eta) dt$ . 当取一个  $k$  时,  $N_{\eta_1}$  和  $N_{\eta_2}$  关于  $\eta$  的曲线, 见图 2(a)、(b) 所示.

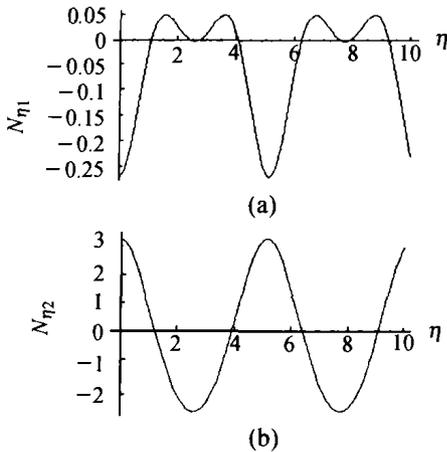


图 2  $N_{\eta_1}$  和  $N_{\eta_2}$  的曲线  
Fig. 2 Curves of  $N_{\eta_1}$  and  $N_{\eta_2}$

联立式(12)、(18)和(19),

$$\begin{cases} M_1^0(B, \sigma, k_1) = 0, \\ M_3^0(B, \sigma, k_1) = 0, \\ k^2 = \frac{A + (B + \rho)}{2(B + \rho)}, \end{cases}$$

解出满足该方程组的参数值, 该方程组参数有  $\eta, p, k$  和  $B + \rho$ . 不妨设  $p = 0.5$ , 利用 Mathematica 数学软件包, 从方程组中解出 3 个未知数, 其中  $\eta = \frac{\epsilon\beta}{b}$ , 且设  $\beta \leq 1.3$ , 计算结果为如下 3 组解:

$$\begin{aligned} (\beta, k, B + \rho) &= (0.64, 0.915, 0.1303), \\ &= (0.75, 0.917, 0.1289), \\ &= (1.2, 0.918, 0.1282). \end{aligned}$$

当然, 改变  $p$  的大小, 也会得到许多组不同的解, 而且此时都满足  $B + \rho > A$ . 可见, 延迟反馈控制后, Lorenz 系统存在振动型的周期轨道. 此时, 以第一组解为例, 计算得到  $M_0(B, \sigma) = -48272.8$ . 显然, 同宿轨道的 Melnikov 函数不再具有简单的零点, Smale 意义下的混沌受到抑制.

对于旋转型周期轨道, 其 Melnikov 函数为

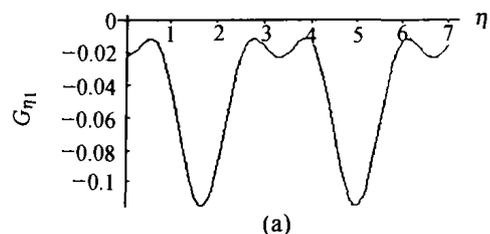
$$\begin{aligned} M_1(B, \sigma, k) &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ -\frac{\sigma}{b^2} y_r^2 + \frac{1}{b} \sin^2 \theta_r(t) + \frac{1}{b} (B + \rho) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \cos \theta_r \sin^2 \theta_r + \frac{B + \rho}{b} \sin^2 \theta_r \cdot \frac{p}{b} [\cos \theta_r - \cos \theta_r(t - \eta)] \right\} dt = \\ &= -\frac{\sigma}{b^2} G_1 + \frac{1}{b} G_2 + \frac{1}{b} (B + \rho) \left(1 - \frac{1}{b}\right) G_3 + p \frac{B + \rho}{b^2} (G_3 - G_{\eta_1}(\eta)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} M_3(B, \sigma, k) &= \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \cos \theta_r + (B + \rho) \cos^2 \theta_r + \frac{1}{b} (B + \rho) \sin^2 \theta_r + \frac{p}{b} (B + \rho) [\cos^2 \theta_r - \cos \theta_r(t - \eta) \cos \theta_r] \right\} dt = \\ &= G_4 + (B + \rho) G_5 + \frac{1}{b} (B + \rho) G_2 + p \frac{B + \rho}{b} (G_5 - G_{\eta_2}(\eta)). \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{8b\sqrt{B + \rho}}{k_1} E(k_1), \\ G_2 &= \frac{8b}{3k_1\sqrt{B + \rho}} [(2(k_1 - 1)K(k_1) + (2 - k)E(k_1))], \\ G_3 &= \frac{8b}{15k_1^2\sqrt{B + \rho}} [8(k_1^2 - 3k_1 + 2)K(k_1) - (k_1^2 - 16k_1 + 16)E(k_1)], \\ G_4 &= \frac{2b}{\sqrt{B + \rho}} [(k_1 - 2)K(k_1) + 2E(k_1)], \\ G_5 &= \frac{2b}{3k_1\sqrt{B + \rho}} [(3k_1^2 - 8k_1 + 8)K(k_1) + 4(k_1 - 2)E(k_1)]. \end{aligned}$$

其中  $G_{\eta_1} = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 \theta_r \cos \theta_r(t - \eta) dt$  和  $G_{\eta_2} = \int_{-T/2}^{T/2} \cos \theta_r \cos \theta_r(t - \eta) dt$ . 当取一个  $k_1$  时,  $G_{\eta_1}$  和  $G_{\eta_2}$  关于  $\eta$  的曲线, 见图 3(a)、(b) 所示.



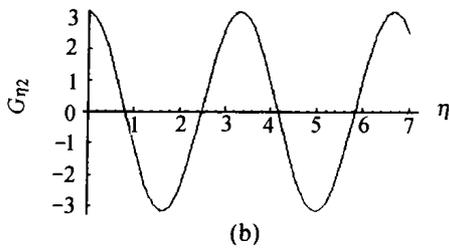


图 3  $G_{\eta_1}$  和  $G_{\eta_2}$  的曲线

Fig. 3 Curves of  $G_{\eta_1}$  and  $G_{\eta_2}$

联立式(15)、(18)和(19),

$$\begin{cases} M_1(B, \sigma, k_1) = 0, \\ M_3(B, \sigma, k_1) = 0, \\ k_1 = \left( \frac{2(B + \rho)}{A + B + \rho} \right)^{1/2}, \end{cases}$$

通过任意设不同的  $p$  值,都发现该方程组无解,说明旋转型的周期轨道对初始扰动极为敏感,不易稳定.

下面对受控 Lorenz 系统取延迟时间  $\beta \leq 3.142$  进行仿真,因为延迟时间太长,没有太大意义.图 4 (a),混沌吸引子;当  $0.63 < \beta < 0.765$  仿真结果为周期 2 轨道,如图 4(b);当  $1.15 < \beta < 1.3, 1.76 < \beta < 1.93, 2.49 < \beta < 2.6, 3 < \beta < 3.142$  为图 4(c)所示的振动型周期 1 轨道,周期约为  $2\pi$ .可见,延迟时间与周期的大小没有关系.数值仿真与理论分析基本相符,只有振动型的周期轨道,不存在旋转型的周期轨道.当  $\beta = 1.34$  时,具有周期 8 轨道,见图 4(d).

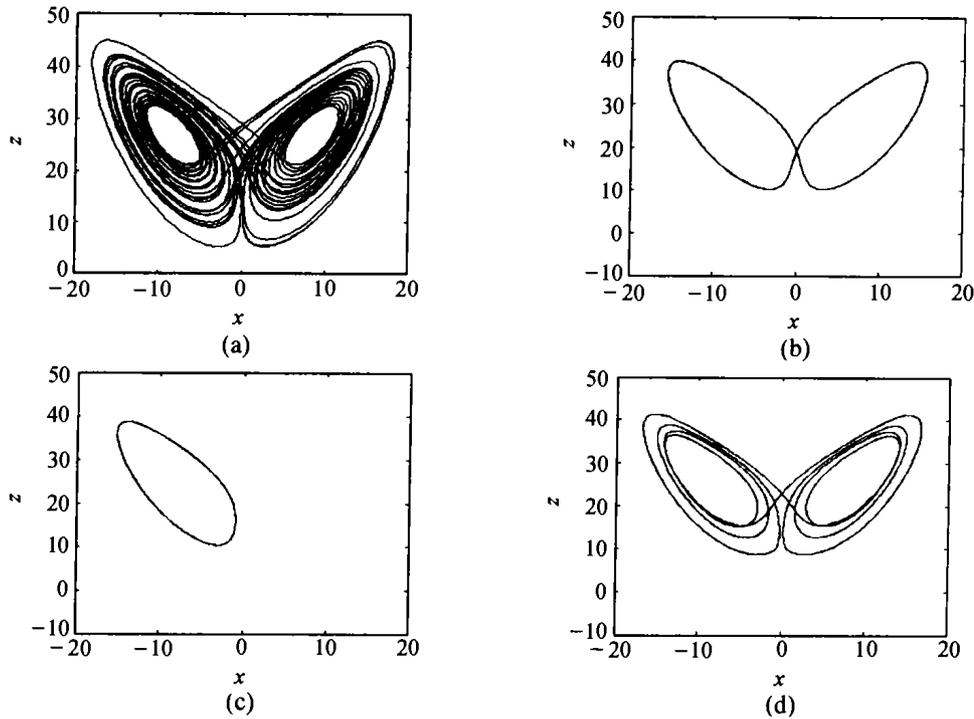


图 4 延迟反馈控制 Lorenz 系统的仿真结果

Fig. 4 Chaotic attractor and results of simulation

### 3 结论 (Conclusions)

延迟反馈控制方法的确具有许多优点,目标周期轨道不需要事先知道,只要通过调节控制增益和延迟时间,控制系统就会在混沌控制过程中自动找到自己的轨道,还可以灵活地选择不同的目标.但是,关于延迟反馈控制方法的文献中理论分析较少.本文运用广义 Hamilton 系统理论中的 Melnikov 方法研究了混沌 Lorenz 系统的延迟反馈控制机制,通过选择合适的参数,使得受控系统的稳定流形与不稳定流形不再横截相交,Smale 意义下的混沌消失.而且发现延迟时间与混沌吸引子内的不稳定周期轨

道的周期无关,不一定是其整数倍.总之,从目前混沌控制研究的发展现状来看,延迟反馈控制方法有很好的应用前景.

### 参考文献 (References):

[1] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos [J]. *Physics Review Letters*, 1990, 64(11): 1196 - 1199.

[2] USHIO T, YAMAMOTO S. Delayed feedback control with nonlinear estimation in chaotic discrete-time systems [J]. *Physics Letters A*, 1998, 247(2): 112 - 118.

[3] CHEN G, YU X. On time-delayed feedback control of chaotic sys-

- tems [J]. *IEEE Trans on Circuits System-I*, 1999, 46(6): 767 - 772.
- [4] PYRAGAS K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. *Physics Letters A*, 1992, 170(6): 421 - 428.
- [5] 裴文江, 黄俊. 自适应延迟反馈控制混沌[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 297 - 300.  
(PEI Wenjiang, HUANG Jun. Control chaos of adaptive delay feedback [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(2): 297 - 300.)
- [6] HUBERMAN B A, LUMER E. Dynamics of adaptive systems [J]. *IEEE Trans on Circuits Systems-I*, 1990, 37(4): 547 - 550.
- [7] CHEN G, DONG X. On feedback control of chaotic nonlinear dynamic systems [J]. *Int J of Bifurcations & Chaos*, 1992, 2(2): 407 - 411.
- [8] HWANG C C. A nonlinear feedback control of the Lorenz equation [J]. *Int J of Engineering Science*, 1999, 37(12): 1893 - 1900.
- [9] LI J, ZHANG J. New treatment on bifurcations of periodic solutions and homoclinic orbits at high  $r$  in the Lorenz equations [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1993, 53(3): 1059 - 1071.
- [10] WIGGINS S. On the detection and dynamical consequences of orbits homoclinic to hyperbolic periodic orbits and normally hyperbolic invariant tori in a class of ordinary differential equations [J]. *SIAM J of Applied Mathematics*, 1988, 48(1): 262 - 285.

#### 作者简介:

闵富红 (1970 —), 女. 南京师范大学电气与电子工程学院教师. 现在南京理工大学自动化系攻读博士学位. 目前研究方向为混沌控制. E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn;

王执铨 (1939 —), 男. 教授, 博士生导师. 主要从事动态大系统的建模以及混沌控制等方面的研究.

(上接第 204 页)

取 Lyapunov 函数  $V_0(e(t)) = (1/2)e^2(t)$ ,  $V_0(e(t))$  沿式(A1)的导数

$$e(t)\dot{e}(t) \leq -\alpha_1 e^2(t) + [(n^* + l)(M_1^* + M_2^*)/a + \epsilon(t)] |e(t)| + |L_1(t)H(s)e_1(t)| |e(t)|. \quad (A14)$$

因  $e_1(t)$  在有限时间内趋于零,  $\epsilon(t)$  依指数趋向零. 从式(A14)推出  $e(t) = O(1/a) + \epsilon(t)$ . 再根据式(14)得, 对充分大的  $T$ , 当  $t > T$  时,  $|e_0(t)| < O(1/a) + \epsilon(t)$ . 证毕.

#### 作者简介:

武玉强 (1962 —), 男. 教授. 研究领域包括自适应控制, 变结构控制, 非线性系统控制, 混杂系统控制. E-mail: wyq@qfnu.edu.cn;

余星火 (1960 —), 男. 教授. 研究领域包括变结构控制, 非线性系统控制, 混沌控制. E-mail: x.yu@rmit.edu.au.

冯纯伯 (1928 —), 男. 教授, 中国科学院院士. 研究领域为自动控制理论与应用. E-mail: chunbo@seu.edu.cn.