文章编号：1000 - 8152(2004)02 - 0261 - 06

关于一类脉冲切换系统的鲁棒 H_∞ 控制

张红涛[1]，刘新芝[1,2]
（1. 华中科技大学 控制科学与工程系，湖北 武汉，430074；2. 滑铁卢大学 应用数学系，加拿大 安大略滑铁卢 N2L3G1）

摘要：研究一类具有扰动的脉冲切换线性系统的鲁棒 H 控制问题. 分别从系统的鲁棒稳定性及其鲁棒性能两方面进行分析. 首先利用 Lyapunov 函数法对系统的稳定性进行分析，给出了系统鲁棒渐近稳定的几个重要的充分条件，通过它很容易判断系统是否鲁棒稳定. 进一步运用线性矩阵不等式(LMI)法对系统鲁棒性能进行分析，得到了一般系统的状态反馈矩阵和脉冲控制矩阵，并在此基础上得出了一个鲁棒 H 控制律. 最后提出了一套基于 MATLAB 软件的鲁棒控制器的设计方法，并通过一个数值例子很好地验证了文中主要结论的有效性.

关键词：脉冲系统；切换系统；线性系统；H_∞ 控制；鲁棒控制；LMI
中图分类号：TP13，TP271　　**文献标识码**：A

Robust H-infinity control on impulsive switched systems with disturbance

ZHANG Hong-tao[1]，LIU Xin-zhi[1,2]
(1. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Hubei Wuhan 430074, China;
2. Department of Applied Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, Ontario N2L3G1, Canada)

Abstract: The robust H-infinity control problem for impulsive switched linear systems with disturbance is considered in the paper with attention mainly paid to the robust stability and robust capability. By using the Lyapunov function method some important sufficient conditions for the robust asymptotic stability of the system are obtained. According to these conditions it is easy to determine whether or not a system is of robust asymptotic stability. Furthermore, by analyzing the robust capability of the system with the help of the linear matrix inequality (LMI) method, the state feedback matrix and the impulsive control matrix of the system are obtained, and then a robust H-infinity control rule is derived. Finally, a robust H-infinity control design method based on MATLAB software is presented, and a numerical example is given to illustrate the efficiency of the main results in this paper.

Key words: impulsive system; switched system; linear system; H-infinity control; robust control; LMI

1 引言(Introduction)

切换系统是一类重要的混杂系统，一般地讲，它是由一系列子系统和一定的切换规则构成，其中的子系统可能是稳定的，也可能是不稳定的；切换规则可能是固定不变的，也可能是随机的. 所以有关切换系统稳定性问题是非常复杂的. 切换系统具有这样的性质：即使每一个子系统是不稳定的，通过构造一些特别的切换规则，也可以保证整个系统是稳定的；相反的，即使每一个子系统都是稳定的，要是切换规则选择不合适，系统也可能不稳定. 近几年来，切换系统在很多诸如神经网络、保密通讯、智能控制、电力大系统等新兴领域中应用广泛. 学术界也对切换系统表现出了很大的兴趣，一些比较好的结果已经取得，尤其是关于稳定性方面的[1~6].

典型的切换系统数学模型如下：

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A_iX(t) + B_iU_i, \\ Z(t) = C_iX(t) + D_iU_i. \end{cases} \tag{1}$$

其中：$X(t)$ 是状态矢量，$Z(t)$ 是输出，U_i 是控制输入，A_i, B_i, C_i, D_i 是适当维数的矩阵，$i \in \{1,2,\cdots,N\}$.

但是在实际切换过程中，由于系统不可避免地存在着大量的切换脉冲，很多单纯的切换系统理论根本不适用或者在应用中产生很大的偏差，所以作者才在已有模型(1)的基础上增加切换脉冲，抽象出一种新型系统模型(称之为脉冲切换系统). 这种模型在 PWM(pulse width modulated)脉宽调制变换器控制、机床工作模式切换控制等具有瞬时切换脉冲的系统中能更准确的描述实际情况. 进一步在已有的切换系统理论基础上，运用鲁棒 H_∞ 控制方法进行分析，得出了一些脉冲切换系统鲁棒稳定的充分条件，并提出了一套鲁棒 H_∞ 控制器的设计方法.

2 系统描述和预备知识(System description and preliminaries)

考虑下面具有扰动的脉冲切换系统

收稿日期：2002 - 09 - 09；收修改稿日期：2003 - 09 - 08.

$$\begin{cases}\dot{X}(t) = A_\alpha X(t) + B_\alpha U_\alpha + C_\alpha W(t), & t \neq t_k,\\ \Delta X(t_k) = X(t_k^+) - X(t_k^-) = E_k X(t_k), & t = t_k,\\ Z(t) = D_\alpha X(t) + F_\alpha U_\alpha + H_\alpha W(t), \\ X(0) = 0.\end{cases} \tag{2}$$

其中: $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ 是 n 维状态矢量,ΔX 是状态跳变,即切换脉冲;$U_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ 是 m 维控制信号;$W:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^q$ 是 q 维外部扰动,$\|W(t)\|<1$;$Z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p$ 是 p 维受控输出;$\alpha:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to P$ 是切换规则,其中 $P=\{1,2,\cdots,N\}$,也就是说,$\alpha(t,x)$ 是一个分段常数;系统(2)的所有切换规则用集合 S 表示.$A_\alpha,B_\alpha,C_\alpha,D_\alpha,F_\alpha,H_\alpha$ 是适当维数的实常矩阵,E_k 是脉冲矩阵,只与切换前后两个子系统有关,与切换时间无关,当切换规则一定,它是一系列实常矩阵,其中 $k=1,2,\cdots$,

$$X(t_k) = X(t_k^-) = \lim_{h\to 0^+} X(t_k - h),$$

$$X(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} X(t_k + h).$$

t_k 表示第 k 次切换时刻,$0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$,and $t_k\to\infty$ as $k\to\infty$.

为了方便后面的讨论,定义 $\|X(t)\| = \sqrt{X(t)^{\mathrm T}X(t)}$,$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm T}A)}$,$A^{\mathrm T}$ 是 A 的对称矩阵,A^{-1} 是 A 的逆矩阵,其中 $X(t)$ 是向量,A 是矩阵.

脉冲切换系统的鲁棒 H_∞ 控制所要达到的目标就是使系统最终满足下面两个鲁棒性质:

1) 鲁棒稳定性.要求对所有可能的切换规则,闭环系统是内部稳定的.

2) 鲁棒性能.设正数 γ 是预先给定的性能指标,对于 $\forall\, T>0$,$\forall\, W(t)$,均有

$$\int_0^T \|Z(t)\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \gamma^2 \int_0^T \|W(t)\|^2 \mathrm{d}t.$$

定义 1 当 $W(t)=0$ 时,如果对于给定的切换规则,闭环系统是渐近稳定的,则称系统是内部稳定的.

定义 2 设 P 是一个 $n\times n$ 的矩阵,记 $P<(>)0$,如果 P 是负(正)定;记 $P\leqslant(\geqslant)0$,如果 P 是半负(正)定.

下面的引理将会在后面的证明中用到:

引理 1 设 P 是一个 $n\times n$ 的对称矩阵,对于任意的正数 σ_σ,下式总成立:

$$2X^{\mathrm T}PC_\alpha W \leqslant \frac{1}{\sigma_\alpha}X^{\mathrm T}PC_\alpha C_\alpha^{\mathrm T}PX + \sigma_\alpha W^{\mathrm T}W.$$

其中: C_α 是适当维数的矩阵,X,W 是适当维数的向量.

证 显然 $\left\|\frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}C_\alpha^{\mathrm T}PX - \sqrt{\sigma_\alpha}W\right\|^2 \geqslant 0$,也就是

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}C_\alpha^{\mathrm T}PX - \sqrt{\sigma_\alpha}W\Big)^{\mathrm T}\Big(\frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}C_\alpha^{\mathrm T}PX - \sqrt{\sigma_\alpha}W\Big) \geqslant 0,$$

等价于

$$\frac{1}{\sigma_\alpha}X^{\mathrm T}PC_\alpha C_\alpha^{\mathrm T}PX - X^{\mathrm T}PC_\alpha W - W^{\mathrm T}C_\alpha^{\mathrm T}PX + \sigma_\alpha W^{\mathrm T}W \geqslant 0.$$

因为 $X^{\mathrm T}PC_\alpha W = W^{\mathrm T}C_\alpha^{\mathrm T}PX$,所以有

$$2X^{\mathrm T}PC_\alpha W \leqslant \frac{1}{\sigma_\alpha}X^{\mathrm T}PC_\alpha C_\alpha^{\mathrm T}PX + \sigma_\alpha W^{\mathrm T}W.$$

引理 2[7] 设 P 是 $n\times n$ 的正定矩阵,Q 是 $n\times n$ 的对称矩阵,则对于任意的 n 维向量 X,有

$$\lambda_{\min}(P^{-1}Q)X^{\mathrm T}PX \leqslant X^{\mathrm T}QX \leqslant \lambda_{\max}(P^{-1}Q)X^{\mathrm T}PX.$$

其中 $\lambda_{\max}(P^{-1}Q)$,$\lambda_{\min}(P^{-1}Q)$ 分别表示矩阵 $P^{-1}Q$ 的最大、最小特征值.

引理 3[8](Schur 补) 设 A,B,C 是适当维数的矩阵,那么下面三式等价:

1) $A<0$,且 $C - B^{\mathrm T}A^{-1}B < 0$;

2) $C<0$,且 $A - BC^{-1}B^{\mathrm T} < 0$;

3) $\begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm T} & C\end{bmatrix} < 0.$

引理 4 设 P 是一个 $n\times n$ 的正定矩阵,对于任意的 n 维向量 X,下式成立:

$$\lambda_{\min}\|X\|^2 \leqslant X^{\mathrm T}PX \leqslant \lambda_{\max}\|X\|^2.$$

其中 $\lambda_{\max},\lambda_{\min}$ 表示矩阵 P 的最大、最小特征值.

证明从略.

3 主要结果(Main results)

首先,考虑如下无反馈系统

$$\begin{cases}\dot{X}(t) = A_\alpha X(t) + C_\alpha W(t), \ t\neq t_k,\\ \Delta X(t_k) = X(t_k^+) - X(t_k^-) = E_k X(t_k),\ t = t_k,\\ Z(t) = D_\alpha X(t) + H_\alpha W(t),\\ X(0) = 0.\end{cases} \tag{3}$$

定理 1 对于系统(3),设 $\gamma>0$ 是给定的性能指标,如果存在一系列的正定矩阵 P_α,正数 $\sigma_\alpha,\delta_\alpha$ 使下面不等式成立:

$$(\gamma^2 - \delta_\alpha)I - H_\alpha^{\mathrm T}H_\alpha > 0, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} A_\alpha^{\mathrm T}P_\alpha + P_\alpha A_\alpha & \frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}P_\alpha C_\alpha & \sqrt{\beta_\alpha}D_\alpha^{\mathrm T} & \sqrt{\frac{\beta_\alpha}{\delta_\alpha}}D_\alpha^{\mathrm T}H_\alpha \\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}C_\alpha^{\mathrm T}P_\alpha & -I & 0 & 0 \\ \sqrt{\beta_\alpha}D_\alpha & 0 & -I & 0 \\ \sqrt{\frac{\beta_\alpha}{\delta_\alpha}}H_\alpha^{\mathrm T}D_\alpha & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

并且对于 $\forall E_k, k = 1,2,\cdots, \forall i,j \in P$, 下式恒成立:

$$\begin{bmatrix} -P_i & (I+E_k)^{\mathrm{T}}P_j \\ P_j(I+E_k) & -P_j \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

则系统(3)是鲁棒稳定的,并且满足 γ 鲁棒性能. 其中: $\lambda_{\min}(G_\alpha)$ 表示 $G_\alpha = (\gamma^2 - \delta_\alpha)I - H_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha$ 的最大特征值, $\beta_\alpha = \dfrac{\sigma_\alpha}{\lambda_{\min}(G_\alpha)}$.

证 设 $\Psi_{t_\alpha} = \{t \mid$ 子系统 α 在 d 时刻 t 是激活的$\}$, $\varepsilon_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Psi_{t_\alpha}, \\ 0, & t \notin \Psi_{t_\alpha} \end{cases}$ 构造如下的李雅普诺夫函数:

$$V(X(t)) = \sum_{\alpha \in P} \varepsilon_\alpha(t) X(t)^{\mathrm{T}} P_\alpha X(t).$$

当 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 时,不妨假设子系统 α 是激活的,根据引理1、引理2和条件(4),有

$$\begin{aligned} &\|Z(t)\|^2 - \gamma^2\|W(t)\|^2 = \\ &x(t)^{\mathrm{T}}D_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha X(t) + 2X(t)^{\mathrm{T}}D_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha W(t) + \\ &W(t)^{\mathrm{T}}H_\alpha^{\mathrm{T}}W(t) - \gamma^2 W(t)^{\mathrm{T}}W(t) \leqslant \\ &X(t)^{\mathrm{T}}(D_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha + \frac{1}{\delta_\alpha}D_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha H_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha)X(t) - \\ &W(t)^{\mathrm{T}}((\gamma^2 - \delta_\alpha)I - H_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha)W(t) \leqslant \\ &X(t)^{\mathrm{T}}(D_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha + \frac{1}{\delta_\alpha}D_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha H_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha)X(t) - \\ &\lambda_{\min}(G_\alpha)W(t)^{\mathrm{T}}W(t). \end{aligned}$$

也就是

$$\begin{aligned} &W(t)^{\mathrm{T}}W(t) \leqslant \\ &\frac{1}{\lambda_{\min}(G_\alpha)}(X(t)^{\mathrm{T}}(D_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha + \frac{1}{\delta_\alpha}D_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha H_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha)X(t) - \\ &(\|Z(t)\|^2 - \gamma^2\|W(t)\|^2)). \end{aligned} \tag{7}$$

沿着系统(3)解的轨迹,根据引理1和不等式(7),有

$$\begin{aligned} &\dot{V}(X(t)) = \\ &(A_\alpha X(t) + C_\alpha W(t))^{\mathrm{T}}P_\alpha X(t) + \\ &X(t)^{\mathrm{T}}P_\alpha(A_\alpha X(t) + C_\alpha W(t)) = \\ &X(t)^{\mathrm{T}}(A_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha + P_\alpha A_\alpha)X(t) + 2X(t)^{\mathrm{T}}P_\alpha C_\alpha W(t) \leqslant \\ &X(t)^{\mathrm{T}}(A_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + \frac{1}{\sigma_\alpha}P_\alpha C_\alpha C_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha)X(t) + \\ &\sigma_\alpha W(t)^{\mathrm{T}}W(t) \leqslant \\ &X(t)^{\mathrm{T}}(A_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + \frac{1}{\sigma_\alpha}P_\alpha C_\alpha C_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha + \beta_\alpha D_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha + \\ &\frac{\beta_\alpha}{\delta_\alpha}D_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha H_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha)X(t) - \beta_\alpha(\|Z(t)\|^2 - \gamma^2\|W(t)\|^2). \end{aligned} \tag{8}$$

由条件(5)和引理3,有

$$A_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha + P_\alpha A_\alpha + \frac{1}{\sigma_\alpha}P_\alpha C_\alpha C_\alpha^{\mathrm{T}}P_\alpha + \beta_\alpha D_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha + \frac{\beta_\alpha}{\delta_\alpha}D_\alpha^{\mathrm{T}}H_\alpha H_\alpha^{\mathrm{T}}D_\alpha < 0.$$

所以当 $W(t) = 0, X(t) \neq 0$ 时,有

$$\dot{V}(X(t)) < 0. \tag{9}$$

当 $t = t_k$ 时,不妨假设系统从子系统 i 切换到子系统 j, 由条件(6)和引理3有

$$(I+E_k)^{\mathrm{T}}P_j(I+E_k) - P_i < 0.$$

所以当 $X(t) \neq 0$ 时,有

$$\begin{aligned} &V(X(t_k^+)) - V(X(t_k^-)) = \\ &X(t)^{\mathrm{T}}((I+E_k)^{\mathrm{T}}P_j(I+E_k) - P_i)X(t) < 0. \end{aligned} \tag{10}$$

由不等式(9),(10),可知系统(3)是鲁棒稳定的.

下面证明系统(3)具有 γ 鲁棒性能.

由不等式(8)有

$$\dot{V}(X(t)) \leqslant -\beta_\alpha(\|Z(t)\|^2 - \gamma^2\|W(t)\|^2).$$

两边取积分有

$$\int_0^T \dot{V}(X(t))\mathrm{d}t \leqslant -\beta_\alpha(\int_0^T \|Z(t)\|^2\mathrm{d}t - \gamma^2\int_0^T \|W(t)\|^2\mathrm{d}t).$$

由不等式(10),且 $V(0) = 0$, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^T \dot{V}(X(t))\mathrm{d}t = \\ &(V(t_1) - V(0)) + (V(t_2) - V(t_1^+)) + \cdots + \\ &(V(t_k) - V(t_{k-1}^+)) + (V(T) - V(t_k^+)) = \\ &(V(t_1) - V(t_k^+)) + \cdots + (V(t_k) - V(t_k^+)) + V(T) \geqslant 0, \end{aligned}$$

那么

$$\int_0^T \|Z(t)\|^2\mathrm{d}t \leqslant \gamma^2\int_0^T \|W(t)\|^2\mathrm{d}t,$$

所以系统(3)具有 γ 鲁棒性能.

如果定理1的条件不能满足,加入状态反馈控制 $U_\alpha = K_\alpha X(t)$ 和脉冲控制 $\Delta X(t_k) = \bar{E}_k X(t_k)$, 那么系统(3)就变成

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = (A_\alpha + B_\alpha K_\alpha)X(t) + C_\alpha W(t), & t \neq t_k, \\ \Delta X(t_k) = X(t_k^+) - X(t_k^-) = (E_k + \bar{E}_k)X(t_k), & t = t_k, \\ Z(t) = (D_\alpha + F_\alpha K_\alpha)X(t) + H_\alpha W(t), \\ X(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

其中: K_α 是状态反馈状态矩阵, $\bar{E}_k$ 是脉冲控制矩阵, B_α, F_α 是适当维数的矩阵.

定理2 对于系统(11),设 $\gamma > 0$ 是给定的性能指标,如果存在一系列的正定矩阵 $P_\alpha, K_\alpha, \bar{E}_k$ 和正数 $\delta_\alpha, \sigma_\alpha$ 使下面不等式成立:

$$(\gamma^2-\delta_\alpha)I-H_\alpha^{\mathrm T}H_\alpha>0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}(A_\alpha+B_\alpha K_\alpha)^{\mathrm T}P_\alpha+P_\alpha(A_\alpha+B_\alpha K_\alpha) & \frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}P_\alpha C_\alpha & \sqrt{\beta_\alpha}(D_\alpha+F_\alpha K_\alpha)^{\mathrm T} & \sqrt{\frac{\beta_\alpha}{\delta_\alpha}}(D_\alpha+F_\alpha K_\alpha)^{\mathrm T}H_\alpha\\ \frac{1}{\sqrt{\sigma_\alpha}}C_\alpha^{\mathrm T}P_\alpha & -I & 0 & 0\\ \sqrt{\beta_\alpha}(D_\alpha+F_\alpha K_\alpha) & 0 & -I & 0\\ \sqrt{\frac{\beta_\alpha}{\delta_\alpha}}H_\alpha^{\mathrm T}(D_\alpha+F_\alpha K_\alpha) & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

并且对于 $\forall E_k+\bar E_k, k=1,2,\cdots, \forall i,j\in P$, 下式恒成立:

$$\begin{bmatrix}-P_i & (I+E_k+\bar E_k)^{\mathrm T}P_j\\ P_j(I+E_k+\bar E_k) & -P_j\end{bmatrix}<0, \tag{14}$$

则系统(11)是鲁棒稳定的,并且具有 γ 鲁棒性能.其中 $\lambda_{\min}(G_\alpha)$ 表示 $G_\alpha=(\gamma^2-\delta_\alpha)I-H_\alpha^{\mathrm T}H_\alpha$ 的最大特征值, $\beta_\alpha=\dfrac{\sigma_\alpha}{\lambda_{\min}(G_\alpha)}$.

证 把系统(11)中的 $A_\alpha+B_\alpha K_\alpha, E_k+\bar E_k, D_\alpha+F_\alpha K_\alpha$ 分别用 A_α, E_k, D_α 替换,那么系统(11)就变成了系统(3),且定理2的条件(13)、(14)分别变成了定理1的条件(5)、(6).由定理1知:系统(11)是鲁棒稳定的,并且具有 γ 鲁棒性能.

从定理2可以看出,系统的反馈状态矩阵 K_α 可以通过不等式(13)求得,脉冲控制矩阵 $\bar E_k$ 可以通过解不等式(14)求得.

下面根据定理2给出一套基于MATLAB软件实现的脉冲切换系统(2)鲁棒 $\mathrm H_\infty$ 控制器算法:

1) 取正数 $\sigma_\alpha=1, \alpha\in P$;

2) 选择适当的正数 δ_α,使不等式(12)成立;

3) 解线性矩阵不等式(13).如果能得到一组正定矩阵 P_α 和反馈矩阵 K_α,则子系统是可以反馈稳定的,转到第4)步;如果不等式无可行解,可以适当调整正数 $\delta_\alpha, \sigma_\alpha$ 的大小,转到第2)步;

4) 令 $\bar E_k=0$,判断不等式(14)是否成立.若成立,则系统不需要进行脉冲控制,若不然,解不等式(14)得到脉冲控制矩阵 $\bar E_k$.

5) 所以得到下面的控制律:

状态反馈控制:

$$U_\alpha=K_\alpha X(t);$$

脉冲控制:

$$\Delta X(t_k)=\bar E_k X(t_k).$$

4 数值例子(Example)

考虑具有如下形式的脉冲切换系统的鲁棒 $\mathrm H_\infty$ 控制问题,系统在式(15)、(16)间进行切换.

$$\begin{cases}\dot X(t)=\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}U_\alpha+\begin{bmatrix}0&\frac12\\-1&0\end{bmatrix}W(t),\\ \qquad t\neq t_k,\\ \Delta X(t_k)=X(t_k^+)-X(t_k^-)=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}X(t_k),\\ \qquad t=t_k,\\ Z(t)=\begin{bmatrix}\frac32&2\\-2&0\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0&2\\1&0\end{bmatrix}U_\alpha+\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}W(t),\\ X(0)=0,\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases}\dot X(t)=\begin{bmatrix}-3&0\\-1&1\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}U_\alpha+\begin{bmatrix}1&0\\0&-\frac32\end{bmatrix}W(t),\\ \qquad t\neq t_k,\\ \Delta X(t_k)=X(t_k^+)-X(t_k^-)=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}X(t_k),\\ \qquad t=t_k,\\ Z(t)=\begin{bmatrix}0&-4\\-1&0\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}2&-1\\2&0\end{bmatrix}U_\alpha+\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}W(t),\end{cases} \tag{16}$$

给定鲁棒性能指标 $\gamma=2$,选择 $\delta_1=\delta_2=\sigma_1=\sigma_2=1$, 则有

$$G_1=(\gamma^2-\delta_1)I-H_1^{\mathrm T}H_1=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},$$

$$G_2=(\gamma^2-\delta_2)I-H_2^{\mathrm T}H_2=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\min}(G_1)=2,\ \lambda_{\min}(G_2)=2,$$

$$\beta_1=\frac{\sigma_1}{\lambda_{\min}(G_1)}=\frac12,\ \beta_2=\frac{\sigma_2}{\lambda_{\min}(G_2)}=\frac12.$$

解不等式(13),得到可行解

$$P_1=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\ K_1=\begin{bmatrix}2&-1\\0&-1\end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

解不等式(14),得到可行解

$$\bar{E}_1 = \bar{E}_1 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}.$$

所以被控子系统变成

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} W(t), \\ \qquad t \neq t_k, \\ \Delta X(t_k) = X(t_k^+) - X(t_k^-) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} X(t_k), \\ \qquad t = t_k, \\ Z(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} W(t), \\ X(0) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} W(t), \\ \qquad t \neq t_k, \\ \Delta X(t_k) = X(t_k^+) - X(t_k^-) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} X(t_k), \\ \qquad t = t_k, \\ Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} W(t), \\ X(0) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

鲁棒 H_∞ 控制律为

状态反馈控制:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X(t),\ U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X(t),$$

脉冲控制:

$$\Delta X(t_k) = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix} X(t_k).$$

假定切换间隔为 1 s,外部扰动 $W(t) = [\frac{2}{3}\sin(\pi t - 1), \frac{2}{3}\cos(2\pi t + 2)]$.取切换信号 $s = \{1,2,1,2,\cdots\}$,图1显示了被控系统在没有外部扰动时从初始状态 $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = 3.0$ 出发的状态轨迹;图2显示了被控系统在外部扰动 $W(t)$ 下从初始状态 $x_1(0) = 1.5, x_2(0) = 3.0$ 出发的状态轨迹;图3显示了被控系统在外部扰动 $W(t)$ 下从零初始状态出发的状态轨迹.

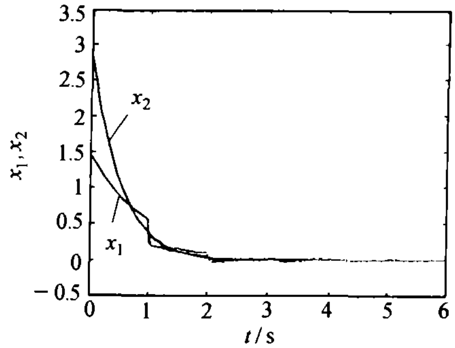

图 1　被控系统在没有外部扰动时从初始状态 $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 3.0$ 出发的状态轨迹

Fig. 1　State trajectory of the controlled system without exterior disturbance from the initial state $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 3.0$

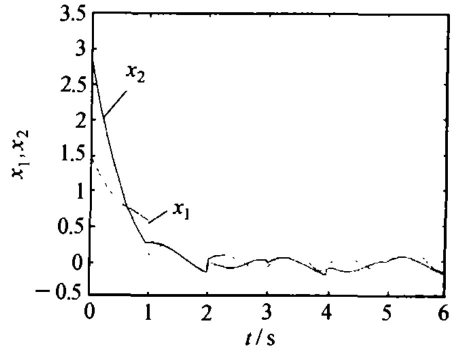

图 2　被控系统在有外部扰动 $W(t)$ 下从初始状态 $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 3.0$ 出发的状态轨迹

Fig. 2　State trajectory of the controlled system with the exterior disturbance $W(t)$ from the initial state $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = 3.0$

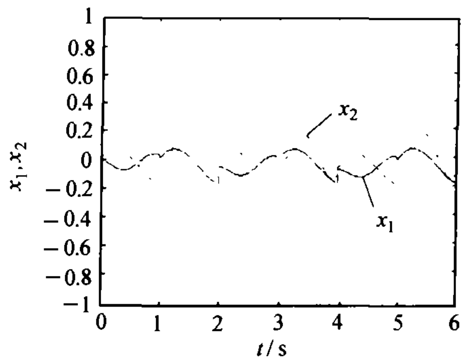

图 3　被控系统在外部扰动 $W(t)$ 下从零初始状态出发的状态轨迹

Fig. 3　State trajectory of the controlled system with the exterior disturbance $W(t)$ from the initial state $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$

5　结论(Conclusion)

本文研究了脉冲切换系统的鲁棒稳定性及其鲁棒性能.通过 H_∞ 控制分析给出了一些系统鲁棒渐近稳定的充分条件,并在此基础上得到了一般系统

的状态反馈矩阵和脉冲控制矩阵.最后提出了一套基于MATLAB软件的鲁棒H_∞控制器的设计方法,并用一个例子很好的证明了主要定理的正确性.

参考文献(References):

[1] LEE S H, KIM T H, LIM J T. A new stability analysis of switched system [J]. *Automatica*, 2000,36(6):917 - 922.

[2] LIN Y, SONTAG E D, WANG Y. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability [J]. *SIAM*, 1996, 34(1): 124 - 160.

[3] LIU X, SHEN X, ZHANG Y. Stability of a class of hybrid dynamic systems [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2001,8(2): 359 - 373.

[4] PELETIES P A, DECARLO R A. Asymptotic stability of m-switched systems using Lyapunov-like functions [C]// *Proc of American Control Conference*. Boston: Academic, 1991.

[5] PETERSON I R, UGRINOVSKII V A, SAVKIN A V. *Robust Control Design Using H_∞ Methods* [M]. New York: Springer, 2000.

[6] SUN Hongfei, ZHAO Jun. Control Lyapunov functions for switched control systems [C]// *Proc of American Control Conference*. Virginia: [s.n.], 2001:25 - 27.

[7] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
(HUANG Lin. *Algebra in System and Control Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1984.)

[8] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

作者简介:

张红涛 (1979 —),男,主要研究方向为混合动力系统分析,脉冲控制,混沌同步与控制. Email: zht-hust@163.com;

刘新芝 (1956 —),男,教授,博士生导师. 1988年在美国德克萨斯大学获得博士学位,现为加拿大滑铁卢大学应用数学系教授,中国"长江学者奖励计划"特聘教授,已经发表论文120余篇,出版专著两部,国际杂志"Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems"主编,另外4个国际杂志的副主编. 主要研究方向为非线性系统稳定性理论,混合动力系统理论与应用,脉冲控制与优化,神经网络等.