

快速次优固定区间 Wiener 平滑器算法

邓自立, 石莹, 孙书利, 许燕

(黑龙江大学 应用数学研究所, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 为了克服带相关噪声控制系统的最优固定区间 Kalman 平滑算法要求较大计算负担的缺点, 应用 Kalman 滤波方法, 基于 CARMA 新息模型, 由稳态最优 Kalman 平滑器导出了带相关噪声控制系统的最优固定区间 Wiener 递推状态平滑器, 它带有系数阵指数衰减到零的高阶多项式矩阵. 用截断系数矩阵近似为零的项的方法提出了相应的快速次优固定区间 Wiener 平滑算法. 它显著地减少了计算负担, 便于实时应用, 还给出了截断误差公式和选择截断指标的公式. 仿真例子说明了快速平滑算法的有效性.

关键词: 状态估计; 固定区间平滑; Wiener 状态平滑器; 快速次优平滑算法; Kalman 滤波方法

中图分类号: O211

文献标识码: A

Fast suboptimal fixed-interval Wiener smoothing algorithm

DENG Zi-li, SHI Ying, SUN Shu-li, XU Yan

(Institute of Applied Mathematics, Heilongjiang University, Heilongjiang Harbin 150080, China)

Abstract: In order to overcome the drawback that the optimal fixed-interval Kalman smoothing algorithms require a large computational burden for control systems with correlated noise, by using the Kalman filtering method based on the controlled autoregressive moving average (CARMA) innovation model, the optimal fixed-interval Wiener recursive state smoother is derived from the steady-state optimal Kalman smoother. The obtained smoother contains the high-order polynomial matrix whose coefficient matrices exponentially decay to zero. A fast sub-optimal fixed-interval Wiener smoothing algorithm is proposed by means of truncating terms with coefficient matrices approximately equal to zero. Thus, the computational burden is obviously reduced and the method is suitable for real time application. Both the formula for truncation error and the formula for selecting truncation index are given. A simulation example shows the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: state estimation; fixed-interval smoothing; Wiener state smoother; fast suboptimal smoothing algorithm; Kalman filtering method

1 引言(Introduction)

固定区间平滑问题出现在许多应用问题中, 例如人造地球卫星轨道重构, 导弹发射实验后对其飞行轨道精度的评价、石油地震勘探后验数据处理等. 经典最优固定区间 Kalman 平滑算法^[1], 例如 Bryson-Frazier 算法、Rauch-Tung-Striebe(RTS)算法, 要求在每时刻计算 Kalman 滤波器增益、预报误差方差阵及新息方差阵的逆矩阵, 引起较大计算负担. 本文目的是提出一种便于实时应用的、计算量小的快速次优固定区间 Wiener 平滑器算法. 应用 Kalman 滤波方法提出了最优固定区间 Wiener 状态平滑器, 并用截断方法提出了相应的快速次优固定区间 Wiener 状态平滑器算法. 分析了截断误差并给出了选择截断长度的公式.

2 问题阐述和引理(Problem formulation and lemmas)

考虑线性离散随机控制系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + Bu(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t). \quad (2)$$

其中: 状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 观测 $y(t) \in \mathbb{R}^m$, 控制 $u(t) \in \mathbb{R}^p$, Φ, B, Γ, H 为常阵.

假设 1 $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $v(t) \in \mathbb{R}^m$ 是带零均值的相关白噪声,

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(t) & v^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q_w & S \\ S^T & Q_v \end{bmatrix} \delta_{ij}. \quad (3)$$

其中: E 为均值号, T 为转置, $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$.

假设 2 (Φ, H) 为完全可检测对, $(\bar{\Phi}, \Gamma \bar{Q}_w)$ 为完全可稳对.

$$\bar{\Phi} = \Phi - JH, J = \Gamma S Q_v^{-1}, \bar{Q}_w \bar{Q}_w^T = Q_w - S Q_v^{-1} S^T. \quad (4)$$

设初始观测时刻 $t_0 = \infty$, 问题是基于观测和控制 $(y(N), y(N-1), \dots; u(N-1), u(N-2), \dots)$ 求状态 $x(t)$ 的最优和次优固定区间 Wiener 平滑器 $\hat{x}(t|N)$ 和 $\hat{x}_s(t|N)$. N 叫固定区间长度. 在假设 1 和 2 下有稳态最优 Kalman 预报器^[2]

$$\hat{x}(t+1|t) = \Psi_p \hat{x}(t|t-1) + Bu(t) + K_p y(t), \quad (5)$$

$$y(t) = H \hat{x}(t|t-1) + \varepsilon(t), \quad (6)$$

$$\Psi_p = \bar{\Phi} - \bar{K}_p H, \bar{K}_p = \bar{\Phi} K, K_p = \bar{K}_p + J. \quad (7)$$

其中: 新息 $\varepsilon(t)$ 是零均值, 方差阵为 Q_ε 的白噪声, K 为稳态 Kalman 滤波增益,

$$Q_\varepsilon = H \Sigma H^T + Q_v, K = \Sigma H^T Q_\varepsilon^{-1}. \quad (8)$$

且预报误差方差阵 Σ 满足稳态 Riccati 方程

$$\Sigma = \bar{\Phi} [\Sigma - \Sigma H^T (H \Sigma H^T + Q_v)^{-1} H \Sigma] \bar{\Phi}^T + \Gamma (Q_w - S Q_v^{-1} S^T) \Gamma^T. \quad (9)$$

它可用迭代法求解^[2]. 可证明^[3]: Ψ_p 是一个稳定矩阵, 即 Ψ_p 的所有特征值位于单位圆内.

引入单位滞后算子 q^{-1} , $q^{-1} \hat{x}(t+1|t) = \hat{x}(t|t-1)$, 则式(5)可写为

$$\hat{x}(t|t-1) = (I_n - q^{-1} \Psi_p)^{-1} [Bu(t-1) + K_p y(t-1)]. \quad (10)$$

其中 I_n 为 $n \times n$ 单位阵. 将式(10)代入式(6)可得 CARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \Psi(q^{-1})\varepsilon(t), \quad (11)$$

$$\Psi(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1} \Psi_p), \quad (12)$$

$$A(q^{-1}) = \Psi(q^{-1}) I_m - H \text{adj}(I_n - q^{-1} \Psi_p) K_p q^{-1}, \quad (13)$$

$$B(q^{-1}) = H \text{adj}(I_n - q^{-1} \Psi_p) B q^{-1}. \quad (14)$$

引理 1^[2] 系统式(1)和(2)在假设 1 和 2 下, 有稳态最优 Kalman 平滑器

$$\hat{x}(t|t+j) = \hat{x}(t|t+j-1) + M_j \varepsilon(t+j), \quad (15)$$

$$M_j = \Sigma (\Psi_p^T)^j H^T Q_\varepsilon^{-1}. \quad (16)$$

引理 2 在引理 1 的条件下有稳态最优固定区间 Kalman 平滑器

$$\hat{x}(t|N) = \hat{x}(t|t-1) + \sum_{j=0}^{N-t} M_j \varepsilon(t+j), \quad (17)$$

或表示为多项式矩阵形式

$$\hat{x}(t|N) = \hat{x}(t|t-1) + M_{N-t}(q^{-1})\varepsilon(N). \quad (18)$$

其中定义多项式矩阵

$$M_{N-t}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{N-t} M_j q^{t+j-N}. \quad (19)$$

证 注意 $\hat{x}(t|N) = \hat{x}(t|t+N-t)$, 重复应用式(15), 并注意 $M_0 = K$, K 在式(8)中定义, 便得到式(17). 证毕.

3 最优和快速次优固定区间 Wiener 平滑器 (Optimal and fast suboptimal fixed-interval Wiener smoother)

定理 1 系统式(1)和式(2)在假设 1 和假设 2 下, 渐近稳定的最优固定区间递推 Wiener 平滑器 $\hat{x}(t|N)$ 为

$$\Psi(q^{-1})\hat{x}(t|N) = B_{N,t}(q^{-1})u(N) + K_{N,t}(q^{-1})y(N). \quad (20)$$

其中 $\Psi(q^{-1})$ 仅对 $\hat{x}(t|N)$ 的时标 t 运算, 且定义

$$B_{N,t}(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1} \Psi_p) B q^{t-1-N} - M_{N-t}(q^{-1}) B(q^{-1}), \quad (21)$$

$$K_{N,t}(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1} \Psi_p) K_p q^{t-1-N} + M_{N-t}(q^{-1}) A(q^{-1}). \quad (22)$$

证 由式(11)有

$$\varepsilon(N) = \Psi^{-1}(q^{-1})[A(q^{-1})y(N) - B(q^{-1})u(N)],$$

将它和式(10)代入式(18)得式(20)~(22). 因 Ψ_p 为稳定矩阵^[3], 则由式(12) $\Psi(q^{-1})$ 是稳定的多项式, 故 Wiener 平滑器式(20)是渐近稳定的. 证毕.

由式(19)看到, 多项式矩阵 $M_{N-t}(q^{-1})$ 的阶次为 $(N-t)$, 它是时变的. 当 N 很大时, 例如 $N = 300$, 而 $t = 1, 2, \dots$ 较小时, $M_{N-t}(q^{-1})$ 有非常高的阶次. 因而 $B_{N,t}(q^{-1})$ 和 $K_{N,t}(q^{-1})$ 也有非常高的阶次. 在这种情况下, 最优 Wiener 平滑器式(20)将引起很大计算负担. 注意 $M_{N-t}(q^{-1})$ 的系数阵 M_j 恰好为平滑增益阵式(16). 因 Ψ_p 为稳定矩阵, 则 Ψ_p^T 也是稳定矩阵, 且 Ψ_p 与 Ψ_p^T 有相同的特征值, 从而当 $j \rightarrow \infty$ 时, $(\Psi_p^T)^j \rightarrow 0$. 故由式(16)知, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $M_j \rightarrow 0$. 故当 $j > m_0$, $M_j \approx 0$. 可在 $j = m_0$ 处截断 $M_{N-t}(q^{-1})$, 删去系数阵近似为零的项, 可得截断的多项式矩阵 $M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})$ 为

$$M_{N-t}^{m_0}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{\min(N-t, m_0)} M_j q^{t+j-N}. \quad (23)$$

它的项数不超过 m_0 . 称 m_0 为截断指标. 通常取 m_0 为 5 ~ 10 左右, 因而 $M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})$ 是一个项数不超过 m_0 的简单的多项式矩阵. 虽然 $M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})$ 仍为 q^{-1} 的 $(N-t)$ 次多项式, 但其中已删去了 $M_{N-t}(q^{-1})$ 中的 q^{-1} 的低次幂的项, 故也称 $M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})$ 为截首多项式. 用 $M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})$ 近似代替 $M_{N-t}(q^{-1})$ 有如下定理.

定理 2 在定理 1 条件下, 渐近稳定的快速次优固定区间 Wiener 平滑器 $\hat{x}_s(t|N)$ 为

$$\Psi(q^{-1})\hat{x}_s(t|N) = B_{N,t}^{m_0}(q^{-1})u(N) + K_{N,t}^{m_0}(q^{-1})y(N). \quad (24)$$

其中定义

$$B_{N,t}^{m_0}(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)Bq^{t-1-N} - M_{N,t}^{m_0}(q^{-1})B(q^{-1}), \quad (25)$$

$$K_{N,t}^{m_0}(q^{-1}) = \text{adj}(I_n - q^{-1}\Psi_p)K_pq^{t-1-N} + M_{N,t}^{m_0}(q^{-1})A(q^{-1}). \quad (26)$$

因 $M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})$ 的项数很少, 故可简单快速计算 $B_{N,t}^{m_0}(q^{-1})u(N)$ 和 $K_{N,t}^{m_0}(q^{-1})y(N)$, 因而可快速实现次优平滑器式(24). 同式(20)相比, 式(24)显著地减少了计算负担.

4 截断误差分析和截断指标的选择 (Truncated error analysis and selecting of truncated index)

为了实现快速算法, 截断指标 m_0 应选择充分小, 另一方面为了保证次优平滑器 $\hat{x}_s(t|N)$ 的精度, m_0 应充分大. 因此 m_0 可选择为在保证精度前提下的最小正整数. 直观上, 截断指标 m_0 的大小由 $M_{N-t}(q^{-1})$ 的系数矩阵 M_j 衰减到零的速度决定. 若 M_j 很快衰减到零, 则选择较小的 m_0 就可达到满意的精度. 下述定理揭示了当 j 增大时, M_j 指数地衰减到零, 且衰减速度由 Ψ_p 的所有特征值的绝对值的最大值决定, 即由 Ψ_p 的谱半径决定, 进而可导出截断误差公式和选择截断指标的公式.

定理 3 系统式(1)和式(2)在假设 1 和假设 2 下, 由式(16)给出的平滑系数阵 M_j , 当 j 增加时指数地衰减到零, 即

$$M_j = O(\lambda^j). \quad (27)$$

这意味着 $m_{\epsilon}^j = O(\lambda^j)$, 或等价地 $|m_{\epsilon}^j| \leq c\lambda^j$. 其中

$M_j = (m_{\epsilon}^j)$, m_{ϵ}^j 是 M_j 的第 i 行, 第 s 列元素, $i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, m$; c 是一个常数, 且

$$\lambda = \max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|). \quad (28)$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 Ψ_p^T 的 n 个特征值.

证 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是相应于 Ψ_p^T 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的 n 个线性无关的 $n \times 1$ 特征向量, 则有关系式 $\Psi_p^T \alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, \dots, n$. 置

$$P = [\alpha_1, \dots, \alpha_n], \quad (29)$$

则该关系式可简写为 $\Psi_p^T P = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 从而有

$$\Psi_p^T = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}. \quad (30)$$

于是由式(16)有

$$M_j = \Sigma P \text{diag}(\lambda_1^j, \dots, \lambda_n^j) P^{-1} H^T Q_{\epsilon}^{-1}. \quad (31)$$

这引出

$$|m_{\epsilon}^j| \leq c\lambda^j, i = 1, \dots, n, s = 1, \dots, m. \quad (32)$$

因 Ψ_p^T 为稳定矩阵, 则 $|\lambda_i| < 1, i = 1, \dots, n$. 从而 $0 < \lambda < 1, \lambda^j \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$. 注意关系式(32)意味着 $m_{\epsilon}^j = O(\lambda^j)$, 即式(27)成立. 证毕.

现在分析截断误差和解决求截断指标 m_0 的问题. 由式(18), 次优平滑器 $\hat{x}_s(t|N)$ 等价于

$$\hat{x}_s(t|N) = \hat{x}(t|t-1) + M_{N-t}^{m_0}(q^{-1})\epsilon(N). \quad (33)$$

当 $N-t > m_0$ 时, 由最优平滑器式(18)减式(33)有由截断引起的误差 $e(t|N)$ 为

$$e(t|N) = \hat{x}(t|N) - \hat{x}_s(t|N) = \sum_{j=m_0+1}^{N-t} M_j \epsilon(t+j). \quad (34)$$

记 $\epsilon(t) = [\epsilon_1(t), \dots, \epsilon_m(t)]^T, e(t|N) = [e_1(t|N), \dots, e_n(t|N)]^T$. 假设 $|\epsilon_j(t)| \leq \beta, \forall t, i = 1, \dots, m_0$.

定理 4 系统式(1)和式(2)在假设 1 和假设 2 下, 最优和次优平滑器之间的误差 $e(t|N)$ 的分量 $e_i(t|N)$ 满足不等式

$$|e_i(t|N)| < \rho \lambda^{m_0+1}, i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

代 $\rho = mc\beta/(1-\lambda)$. 为保证次优平滑器具有所要求的精度

$$|e_i(t|N)| < \delta, i = 1, \dots, n, \quad (36)$$

其中精度指标 δ 为给定的设计参数, 截断指数 m_0 选择公式为

$$m_0 = \left\lceil \ln \frac{\delta}{\rho \lambda} / \ln \lambda \right\rceil + 1. \quad (37)$$

证 应用式(32)和式(34)有

$$|e_i(t|N)| \leq \sum_{j=m_0+1}^{N-t} mc\lambda^j \beta = mc\beta \lambda^{m_0+1} \sum_{j=0}^{N-t-m_0-1} \lambda^j =$$

$$mc\beta \lambda^{m_0+1} \frac{1-\lambda^{N-t-m_0}}{1-\lambda} < \frac{mc\beta \lambda^{m_0+1}}{1-\lambda} = \rho \lambda^{m_0+1}. \quad (38)$$

这证明了式(35). 注意式(35)和式(36), 为使式(36)成立, 只要使下式成立:

$$\rho \lambda^{m_0+1} < \delta. \quad (39)$$

上式两边取对数, 并注意 $0 < \lambda < 1, \ln \lambda < 0$, 可得

$$m_0 > \ln \frac{\delta}{\rho \lambda} / \ln \lambda. \quad (40)$$

这引出公式(37).

5 仿真例子 (Simulation example)

考虑带相关噪声控制系统

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} w(t), \quad (41)$$

$$y(t) = [1 \quad 0.5] x(t) + v(t), \quad (42)$$

$$v(t) = w(t) + \xi(t), \quad u(t) = \sin(2\pi t/300). \quad (43)$$

其中: $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$, $w(t)$ 和 $\xi(t)$ 是零均值, 方差各为 $Q_w = 1$ 和 $Q_\xi = 1$ 的独立 Gaussian 白噪声. 显然 $v(t)$ 为零均值, 方差为 $Q_v = 2$ 的白噪声, 且相关系数 $S = E[w(t)v(t)] = 1$. 容易计算出 Ψ_p 为

$$\Psi_p = \begin{bmatrix} -0.43844719 & 0.28077640 \\ -0.56155281 & 0.71922360 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

它有较小的特征值 $\lambda_1 = -0.28077640, \lambda_2 = 0.56155281$. 取 $N = 300, m_0 = 6$, 由定理 2 快速次优固定区间 Wiener 平滑器 $\hat{x}_s(t|N) = [\hat{x}_{s1}(t|300) \quad \hat{x}_{s2}(t|300)]^T$ 的仿真结果如图 1 和图 2 所示, 其中实线表示状态 $x_i(t)$, 虚线表示次优平滑估值 $\hat{x}_{si}(t|N)$.

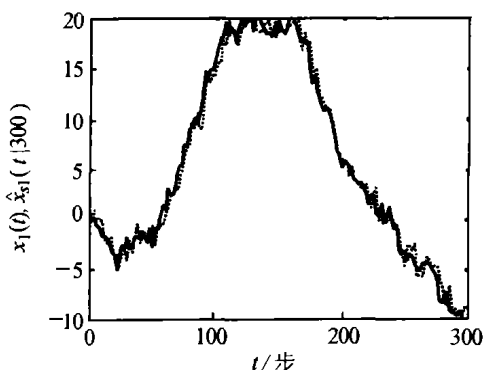


图 1 状态 $x_1(t)$ 和快速次优固定区间 Wiener 平滑器 $\hat{x}_{s1}(t|300)$

Fig. 1 State $x_1(t)$ and fast suboptimal fixed-interval Wiener smoother $\hat{x}_{s1}(t|300)$

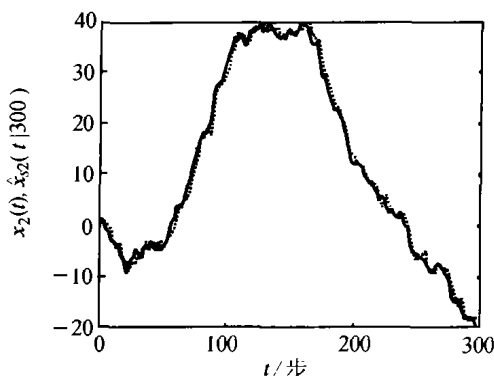


图 2 $x_2(t)$ 和快速次优固定区间 Wiener 平滑器 $\hat{x}_{s2}(t|300)$

Fig. 2 State $x_2(t)$ and fast suboptimal fixed-interval Wiener smoother $\hat{x}_{s2}(t|300)$

6 结论 (Conclusion)

本文基于 Kalman 滤波和 CARMA 新息模型提出了最优固定区间递推 Wiener 状态平滑器. 为了减少计算负担, 用对高阶多项式矩阵的截断方法提出了一种快速次优固定区间 Wiener 平滑算法, 可显著减少计算负担, 适合于工程实时应用. 对所提出的截断方法进行了严格的理论分析, 给出了截断误差公式和选择截断指标的公式.

参考文献 (References):

- [1] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2000.
- [2] 邓自立. 卡尔曼滤波与维纳滤波——现代时间序列分析方法 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
(DENG Zili. *Kalman Filtering and Wiener Filtering - Modern Time Series Analysis Method* [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001.)
- [3] ANDERSON B D, MOORE J B. *Optimal Filtering* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.

作者简介:

邓自立 (1938—), 男, 黑龙江大学应用数学研究所和自动化系教授. 主要研究方向为状态估计, 最优滤波, 信号处理等.
E-mail: dzl@hlju.edu.cn;

石莹 (1971—), 女, 黑龙江大学自动化系讲师, 哈尔滨工业大学在职博士. 主要研究方向为卡尔曼滤波, 维纳滤波, 信号处理等.
E-mail: shiying89@tom.com;

孙书利 (1971—), 男, 黑龙江大学自动化系讲师, 哈尔滨工业大学在职博士. 主要研究方向为最优滤波, 状态估计, 反卷积等.
E-mail: sunsl@hlju.edu.cn;

许燕 (1966—), 女, 黑龙江大学自动化系副教授. 主要研究方向为状态估计, 最优滤波等. E-mail: yx0451@hotmail.com.