

时滞系统的降维状态预测观测器及预测控制器设计

唐功友

(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071)

摘要: 研究控制项含有时滞的线性系统的预测控制问题. 利用被控对象的预测输出向量和系统的控制向量, 设计了一种降维状态预测观测器, 并将该状态观测器用于时滞控制系统的最优状态反馈控制中. 利用该状态预测观测器可将闭环系统的时滞项移至系统闭环结构之外, 从而最优控制规律完全可以按无时滞系统进行设计. 由性能指标计算公式表明, 该预测控制器关于二次型性能指标是次优的.

关键词: 时滞系统; 预测控制; 状态观测器; 最优控制; 状态反馈

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Design of reduced-order predictive state observer and predictive controller for systems with time-delay

TANG Gong-you

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Shandong Qingdao 266071, China)

Abstract: Predictive control problems for systems with control time-delay are studied. By using the predictive output vector of the plant and control vector of the system, a reduced-order predictive state observer is designed, and applied to optimal state feedback control for systems with control time-delay. Using this predictive state observer, the time-delay term of the closed-loop system can be transferred to the outside of the system's closed-loop structure. Therefore, one can design the optimal control law according to the design methods for systems without time-delay. Computing formula of performance index shows this predictive controller is suboptimal with respect to quadratic performance indexes.

Key words: time-delay systems; predictive control; state observer; optimal control; state feedback

1 引言(Introduction)

近年来,随着计算机应用技术的迅速发展,极大地推动了先进控制技术的发展. 其中最具代表性的先进控制技术之一——模型预测控制(MPC; model predictive control)技术取得了很大的进展. MPC 方法主要有 Richiult^[1]和 Mahra^[2]等提出的建立在脉冲响应基础上的模型启发控制(MPHC)或称模型算法控制(MAC; model algorithm control)及 Clarke^[3,4]等提出的具有长时段多步预测优化的广义预测控制(GPC; general predictive control)等. 由于 MPC 有对模型精度的宽容性、有限时域滚动优化的有效性以及在设计中考虑各种软、硬约束的可能性, MPC 引起了众多科学研究和科技开发工作者的兴趣. 20 世纪 90 年代以来,无论在理论上还是在实际应用中 MPC 都得到了突飞猛进的发展^[5~7]. 目前, MPC 已广泛

应用于线性、非线性、时滞等生产过程控制系统中. 由于 MPC 在理论和实用中还有很大的研究价值和发展空间, 目前在国际上是非常热门的研究课题之一.

本文研究用状态空间模型描述的控制项含有时滞的控制系统降维状态预测观测器及最优预测控制器的设计问题. 利用构造预测模型得到的被控对象预测输出向量和系统的控制向量, 设计了一种降维状态预测观测器. 并将该状态观测器用于时滞控制系统的最优状态反馈控制中. 从频域的分析来看, 应用该状态预测观测器可将闭环系统的时滞项移至系统闭环结构之外, 从而其优化控制规律完全可以按无时滞系统进行设计. 文中从时域分析了系统特性, 给出了二次型性能指标计算公式. 其性能指标该计算公式表明, 本文提出的预测控制器在系统模型无失配的情况下关于二次型性能指标是次优的.

2 预测控制系统设计 (Design of predictive control systems)

考虑用状态空间数学模型描述的控制项含有时滞的线性定常控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau), \quad y(t) = Cx(t). \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^q$ 分别是状态向量、输出向量和控制向量; A, B 和 C 分别是相应维数的常量矩阵, $\tau > 0$ 是系统的常量时滞项. 假设开环系统 (1) 具有自衡能力, 即矩阵 A 为稳定矩阵, 并假设 (A, B) 和 (A, C) 分别是能控和能观测的. 用系统 (1) 描述的控制系统的实际过程控制系统中大量存在. 事实上, 几乎所有的控制系统或多或少都带有控制时滞. 对于小时滞系统或在对控制精度要求不高的情况下, 人们经常忽略时滞对系统的影响. 而对时滞 τ 对系统性能的影响无法忽略的情况下, 用常规的控制很难达到满意的控制效果.

本文建立的预测控制系统由被控对象、降维状态预测观测器、预测与校正模型及最优状态反馈预测控制器等控制模块组成. 下面分别讨论预测控制系统各模块的设计问题.

2.1 降维状态预测观测器设计 (Design of state predictive observer)

对于满秩矩阵 C , 存在常量矩阵 $D \in \mathbb{R}^{(n-p) \times n}$ 使得矩阵 $[C^T \ D^T] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为可逆的. 令

$$\begin{cases} T = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}^{-1} = [T_1 \ T_2], \\ T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (2)$$

其中, $T_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}, T_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}, A_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}, A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}, A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}, A_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$. 为了构造降维状态预测观测器, 对系统 (1) 作等价变换. 令 $x = T\bar{x}$. 记 $\bar{x}^T = [\bar{x}_1 \ \bar{x}_2]$, 其中 $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^p, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)}$. 则得到系统 (1) 的等价系统

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1(t) = A_1\bar{x}_1(t) + A_{12}\bar{x}_2(t) + B_1u(t-\tau), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = A_{21}\bar{x}_1(t) + A_2\bar{x}_2(t) + B_2u(t-\tau), \\ y(t) = \bar{x}_1(t). \end{cases} \quad (3)$$

由系统 (3) 知, $\bar{x}_1$ 即为系统输出 y . 本文只需构造预测的降维状态预测观测器即可.

注意到 (A, C) 的可观测性及 $CT = [I_p \ 0]$, 可知 (A_2, A_{12}) 也是可观测的. 令 $\hat{y}(t+\tau)$ 为被控对象的预测输出. 为了设计出物理可实现的降维状态预测观测器, 选择被控对象的预测输出 $\hat{y}(t+\tau)$ 和系

统的控制向量 $u(t)$ 作为降维状态预测观测器输入, 构造降维状态预测观测器模型为

$$\begin{aligned} \dot{w}(t+\tau) &= \hat{A}w(t+\tau) + \hat{B}u(t) + \hat{C}\hat{y}(t+\tau), \\ \hat{x}_2(t+\tau) &= w(t+\tau) + K\hat{y}(t+\tau). \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\hat{x}_2$ 为 $\bar{x}_2$ 的观测值, $\hat{A} = A_2 - KA_{12}, \hat{B} = B_2 - KB_1, \hat{C} = A_2K + A_{21} - KA_{12}K - KA_1$. 由式 (1) ~ (4) 可以得到状态向量的预测观测值为

$$\hat{x}(t+\tau) = T_2w(t+\tau) + (T_1 + T_2K)\hat{y}(t+\tau). \quad (5)$$

注意到 $w \in \mathbb{R}^{(n-p)}$, 故该降维状态预测观测器是 $(n-p)$ 维的. 这一结果显然比全维预测观测器^[8]要好.

因为 (A_2, A_{12}) 是可观测的, 所以可以这样选择矩阵 K , 它使得矩阵 $\hat{A} = A_2 - KA_{12}$ 的特征值配置在要求的左半根平面内. 由状态预测观测器模型 (4) 知, 状态观测器精度除了取决于 $(A_2 - KA_{12})$ 的特征值的位置外, 还取决于被控对象的预测输出 $\hat{y}(t+\tau)$ 的预测精度.

2.2 预测及校正模型设计 (Design of predictive and revised models)

仿效系统 (1) 的结构, 构造状态预测模型如下:

$$\dot{\hat{x}}(t+\tau) = A\hat{x}(t+\tau) + Bu(t). \quad (6)$$

系统的预测输出校正模型选择如下:

$$\hat{y}(t+\tau) = C\hat{x}(t+\tau) + F(y(t) - C\hat{x}(t)). \quad (7)$$

其中 $F = \text{diag}\{f_1, f_2, \dots, f_q\}$ 为校正加权矩阵, 用于调节预测模型的输出预测精度.

2.3 最优状态反馈控制律 (Optimal state feedback control law)

最优控制的目的是选择状态反馈控制规律 $u(t)$, 使性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t-\tau)Ru(t-\tau)]dt \quad (8)$$

取得极小值, 其中 $Q = C^THC$, 而 $H \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 和 $R \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 为正定矩阵. 如果状态预测观测器 (4) 的观测误差能按任意要求的指数速率趋近于零, 则可取状态预测观测器的输出作为状态反馈信号. 根据 LQ 控制理论, 系统的最优反馈预测控制律为

$$u(t) = -R^{-1}B^TP\hat{x}(t+\tau). \quad (9)$$

其中 P 是下列 Riccati 矩阵方程的唯一正定解矩阵.

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0. \quad (10)$$

至此, 预测控制系统各模块设计完毕. 以下将对

该预测控制系统的性能分别在频域和时域进行分析.

3 系统性能分析 (Analysis of system performance)

3.1 频域分析 (Frequency domain analysis)

令系统的初始条件全部为零. 系统(1)的拉氏变换表达式为

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} B e^{-\tau s} U(s). \quad (11)$$

由状态预测观测器(4)得

$$\begin{aligned} L(\hat{x}(t + \tau)) = & T_2(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} U(s) + [T_2(sI - \hat{A})^{-1} \hat{C} + \\ & T_2 K] L(\hat{y}(t + \tau)). \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $L(w(t)) = W(s)$ 为 $w(t)$ 的拉氏变换. 由预测模型(6)和校正模型(7)得

$$\begin{cases} L(\hat{x}(t + \tau)) = (sI - A)^{-1} B U(s), \\ L(\hat{y}(t + \tau)) = F Y(s) + C(I - e^{-\tau s} F) L(\hat{x}(t + \tau)). \end{cases} \quad (13)$$

从而,有

$$L(\hat{y}(t + \tau)) = F Y(s) + C(I - e^{-\tau s} F)(sI - A)^{-1} B U(s). \quad (14)$$

再由预测最优化反馈控制律(9)得

$$U(s) = R^{-1} B^T P (X_s(s) - L(\hat{x}(t + \tau))). \quad (15)$$

综合式(11)~(15),可以得到如图1所示的闭环预测控制系统结构图.

其中 $x_s(t)$ 是外部给定状态向量. 对于定值调节系统而言, $x_s(t) \equiv 0$. 图1给出了实现此预测控制系统的结构. 这为实现本文提出的预测控制系统提供了方便.

由图1容易看出,在系统无模型失配时,闭环控制系统的结构图在原理上与图2等效.

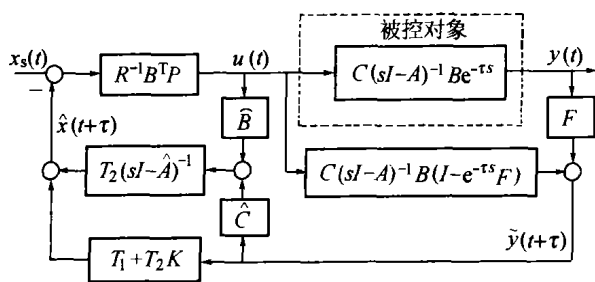


图1 闭环控制系统的结构图

Fig. 1 Diagram of the closed-loop system

从图2可知,由此预测控制器构成的闭环系统将系统的时滞项移至等效系统的闭环结构之外. 即此预测控制器具备 Smith 预估器^[9]相同的功能. 因此在系统无模型失配的情况下,闭环系统的极点已与时滞项无关. 在设计系统的最优预测控制律时,完

全可以按无时滞系统情形最优控制理论处理. 由于加权矩阵 F 可根据需要任意选取,故此带有状态预测观测器的预测控制器的设计方法比 Smith 预估器更加灵活且对模型精度有更大的宽容性.

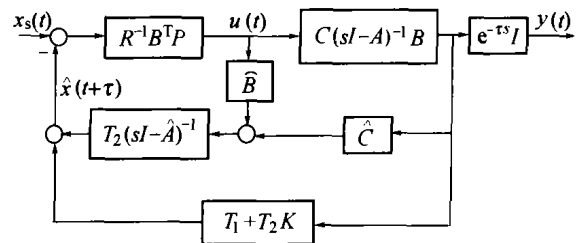


图2 闭环控制系统的等效原理结构图

Fig. 2 Equivalent diagram of the closed-loop system

3.2 时域分析 (Time domain analysis)

为了方便,取 $F = I$. 令 $x_{oe} = (D - KC)x - w$ 为状态观测误差, $x_{pe} = x - \hat{x}$ 为状态预测误差, $y_{pe} = y - \hat{y}$ 为输出预测误差. 下面建立状态观测误差方程和模型预测误差方程,以便分析估计由状态预测观测器和预测模型带来得观测与预测误差. 由式(1)和式(4)得状态观测误差方程

$$\dot{x}_{oe}(t + \tau) = \hat{A} x_{oe}(t + \tau) + \hat{C} y_{pe}(t + \tau). \quad (16)$$

而由式(6)和式(7)得预测误差方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pe}(t + \tau) &= A x_{pe}(t + \tau), \\ y_{pe}(t + \tau) &= C(x_{pe}(t + \tau) - x_{pe}(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

因为 (A_2, A_{12}) 是可观测的,由式(16)知,可以选择矩阵 K ,使得 $\hat{A} = A_2 - KA_{12}$ 的特征值配置在任意要求的左半根平面内,以保证状态观测误差按预先给定的指数速率趋于 $\hat{C} y_{pe}(t)$. 所以观测器的观测精度取决于预测模型输出预测误差 y_{pe} . 由式(17)和积分中值定理可以得到 y_{pe} 的估计式如下:

$$\begin{aligned} y_{pe}(t + \tau) &= C(x_{pe}(t + \tau) - x_{pe}(t)) = \\ & C \int_t^{t+\tau} \dot{x}_{pe}(t) dt = CA \int_t^{t+\tau} x_{pe}(t) dt = \tau CA x_{pe}(t + \theta). \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $0 < \theta < \tau$. 由上式可知: $\|y_{pe}\|$ 的值取决于 $\|x_{pe}\|$, $\|x_{pe}(t + \tau) - x_{pe}(t)\|$ 和 τ 的大小. 因为矩阵 A 是稳定矩阵,所以由式(17)的第一式知,状态预测误差满足 $x_{pe}(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$. 然而,由于开环系统即使稳定一般也只具有其自身的自衡能力, $x_{pe}(t)$ 趋于零的能力通常是较慢的. 因此只有这一条件很难达到满意的控制指标要求. 输出预测误差 y_{pe} 取决于 $(x_{pe}(t + \tau) - x_{pe}(t))$ 的值说明作者并不一定要求 $\|x_{pe}\|$ 很小,只要 $x_{pe}(t)$ 变化缓慢,则可

保证输出预测误差 $\|y_{pe}\|$ 就比较小. 输出预测误差 $\|y_{pe}\|$ 取决于 τ 的大小, 说明对小时滞系统效果更好. 综上分析可知, 在系统扰动不太恶劣或在小时滞的情况下, 本文的设计方法一般是可行的.

对性能指标的计算和估计问题, 给出以下结果:

定理 1 假设 A 为稳定矩阵, (A, B) 和 (A, C) 分别是能控和能观测的. 由式(4)~(7)及式(9)构成的带降维状态预测观测器的预测控制律关于时滞系统(1)和二次型性能指标式(8)是次优的. 且有

$$J = \frac{1}{2} [x^T(0)Px(0) + \int_0^\infty [x(t) - \hat{x}(t)]^T PBR^{-1}B^TP[x(t) - \hat{x}(t)]dt]. \quad (19)$$

证 将式(9)代入式(8)中, 并利用方程(1)及式(10), 得到

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + \hat{x}^TPBR^{-1}B^TP\hat{x}(t)]dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[-\frac{\partial x^T(t)Px(t)}{\partial t} + (x(t) - \hat{x}(t))^TPBR^{-1}B^TP(x(t) - \hat{x}(t)) \right]dt = \\ &= \frac{1}{2} [x^T(0)Px(0) + \int_0^\infty [x(t) - \hat{x}(t)]^TPBR^{-1}B^TP[x(t) - \hat{x}(t)]dt]. \end{aligned} \quad (20)$$

定理证毕.

显然, 如果忽略状态预测误差 $x_{pe}(t)$ 和状态观测误差 $x_{oe}(t)$, 则系统的性能指标近似为无时滞系统的最优控制, 即

$$J = \frac{1}{2} [x^T(0)Px(0)]. \quad (21)$$

定理 1 的结果表明, 本文提出的预测控制器可以用于具有自衡的时滞系统. 而且, 在一般情况下, 此预测控制器关于系统(1)和性能指标式(8)是次优的. 它的次优性取决于系统的输出预测误差 $y_{pe}(t)$ 和状态观测误差 $x_{oe}(t)$ 的大小.

4 结论(Conclusion)

本文利用被控对象的预测输出向量和系统的控制向量, 设计了一种降维状态预测观测器. 并将该状

态观测器用于时滞控制系统的最优状态反馈控制研究中. 状态预测观测器可将闭环系统的时滞项移至系统闭环结构之外. 与 Smith 预估器^[9]相比, 该状态预测观测器应用更灵活, 且具有更强的鲁棒性. 性能指标计算公式表明, 该预测控制器关于二次型性能指标是次优的. 从而对本文提出的预测控制律的设计方法提供了理论依据.

参考文献(References):

- [1] RICHalet J. Model predictive heuristic control: applications to industrial process [J]. *Automatica*, 1978, 14(5): 413-428.
- [2] MAHRA R K. Model algorithmic control (MAC), basic theoretical properties [J]. *Automatica*, 1982, 18(4): 401-404.
- [3] CLARKE D W, MOHTADI C, TUFFS P S. Generalized predictive control - I: the basic algorithm [J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 137-148.
- [4] CLARKE D W, MOHTADI C, TUFFS P S. Generalized predictive control - II: extension and interpretations [J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 149-160.
- [5] KOTHARE S L O, MORARI M. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(6): 1053-1071.
- [6] BEMPORAD A, BORRELLI F, MORARI M. Model predictive control based on linear programming-the explicit solution [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(12): 1974-1985.
- [7] 席裕庚, 耿晓军, 陈虹. 预测控制性能研究的新进展 [J]. *控制理论与应用*, 2000, 17(4): 469-475.
(XI Yugeng, GENG Xiaojun, CHEN Hong. Recent advances in research on predictive control performance [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(4): 469-475.)
- [8] 唐功友, 于忠清, 孙朝晖. 时滞系统的状态预测观测器及预测控制器设计 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(2): 207-209, 216.
(TANG Gongyou, YU Zhongqing, SUN Zhaohui. Design of state predictive observer and predictive controller for systems with time-delay [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 207-209, 216.)
- [9] SMITH D J M. Closer control of loops with dead time [J]. *Chemical Engineering Progress*, 1957, 53(5): 271-280.

作者简介:

唐功友 (1953—), 男, 博士, 教授, 博士生导师. 主要研究方向为大系统理论与应用, 时滞系统的分析与综合, 计算机控制等.
Email: gtang@ouc.edu.cn.