文章编号: 1000-8152(2004)03-0432-03

不确定时滞系统鲁棒镇定新方法

苏宁军, 苏宏业, 褚 健
(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室,浙江大学 先进控制研究所,浙江 杭州 310027)

摘要: 针对一类同时具有状态和控制滞后的不确定时滞系统,提出了一种新的时滞依赖型鲁棒镇定设计方法.通过引入一种新的线性状态变换,分离出时滞依赖因子,采用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法,导出了不确定时滞系统可鲁棒镇定的时滞依赖型的新判据,所得结论以线性矩阵不等式组的解的形式表示.仿真结果表明所得结论较之已有结果更为简单,具有更小保守性,且有更广泛的应用范围,不仅可以解决小时滞问题,也可用于解决大时滞问题.

关键词: 时滞系统; 不确定性; 时滞依赖; 鲁棒镇定; 线性矩阵不等式(LMI)
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

New design approach of delay-dependent robust stabilizing control for uncertain time-delay systems

SU Ning-jun, SU Hong-ye, CHU Jian
(National Key Laboratory of Industrial Control Technology and
Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: A new design approach of delay-dependent robust stabilizing control for a class of uncertain time-delay systems with time-delay in both state and control variables is provided. A new linear state transformation is first proposed to separate the delay-dependent factors out. The sufficient condition of delay-dependent robust stabilizability is then derived by the Lyapunov-Krasovskii functional method. The results are given in terms of LMI. Numerical examples are presented to show that the proposed results can be less conservative and can be used to deal with small or large delay problems.

Key words: time-delay systems; uncertainty; delay-dependent; robust stabilization; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

近年来,不确定时滞系统时滞依赖的鲁棒稳定性分析及控制问题一直是控制理论界的研究热点之一.目前得到的时滞依赖型鲁棒控制律一般采用类似文献[1]的方法,然而此方法非常繁杂,得到的结论仍然有较大保守性,且常只能解决小时滞问题.文献[2]给出了一种较为简单的时滞依赖的鲁棒稳定性分析方法,具有较少保守性,并能解决大时滞问题.本文在文献[2]基础上,提出了一种更为理想的时滞依赖的鲁棒镇定方法,所得结论较之其他方法更为简单,具有更小保守性,且有更广泛的应用范围.

2 问题描述(System description and preliminaries)

考虑如下线性不确定时滞系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [A_d + \Delta A_d(t)]x(t - d_1) + [B + \Delta B(t)]u(t) + [B_d + \Delta B_d(t)]u(t - d_2), \tag{1}$$

$$x(t) = \Phi(t),\ \forall t \in [-d, 0]. \tag{2}$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^q$ 表示状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 表示控制输入, $d_1 \in [0, d_a]$, $d_2 \in [0, d_b]$ 分别表示时滞, $d = \max\{d_a, d_b\}$, $\Phi(t)$ 表示初始状态, A, A_d, B, B_d 为适当维数的已知常矩阵, $\Delta A(t), \Delta A_d(t), \Delta B(t), \Delta B_d(t)$ 为实值连续矩阵函数,表示系统的时变参数不确定性.本文假设不确定性可以描述为如下形式:

$$[\Delta A\quad \Delta A_d\quad \Delta B\quad \Delta B_d] = HF(t)[E_a\quad E_{ad}\quad E_b\quad E_{bd}]. \tag{3}$$

其中, $H, E_a, E_{ad}, E_b, E_{bd}$ 是适当维数的已知常实矩阵, $F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$ 表示未知的实值时变矩阵,其元素 Lebesgue 可测且有界,且

$$F(t)^{\mathrm{T}}F(t) \leqslant I,\ \forall t \geqslant 0. \tag{4}$$

收稿日期:2002-09-05; 收修改稿日期:2003-06-20.
基金项目:国家杰出青年科学基金项目(60025308);国家教育部高等学校优秀青年教师教学与科研奖励基金.

本文考虑如下状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t),\ K \in \Xi^{p\times q}. \tag{5}$$

下面为简便起见,记

$\bar{A} = A + \Delta A$, $\bar{B} = B + \Delta B$, $\bar{A}_d = A_d + \Delta A_d$, $\bar{B}_d = B_d + \Delta B_d$, $\tilde{A} = \bar{A} + \bar{B}K$.

引理 1[3]　设 $X \geqslant 0, Y < 0, Z \geqslant 0$ 为给定的 n 阶对称正定阵,若对于任意非零向量 $\xi \in \Xi^q$, 有

$$(\xi^T Y\xi)^2 > 4\xi^T X\xi\xi^T Z\xi,$$

则存在标量 $\lambda > 0$, 使得

$$\lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0.$$

引理 2[4]　设 x 和 y 是具有适当维数的向量, Q 为适当维数正定阵,则

$$2x^T y \leqslant x^T Qx + y^T Q^{-1} y.$$

3　主要结论(Main results)

定理 1　对不确定时滞系统(1)、(2),通过状态反馈控制律(5)实现鲁棒镇定的充分条件是存在矩阵 K_1,正定对称阵 P_1, Q_1, Q_2, R_1, R_2 及标量 $\alpha > 0$, 满足如下线性矩阵不等式

$$S = \left[\begin{array}{cc|c} M & G & \\ G^T & L & E \\ \hline E & & -\alpha I \end{array}\right] < 0. \tag{6}$$

其中

$$M = P_1A^T + AP_1 + K_1^TB^T + BK_1 + 2mP_1 + Q_1 + Q_2 + R_1 + R_2 + \alpha HH^T,$$

$$G = [A_dP_1 \quad B_dK_1 \quad md_aA_dP_1 \quad md_bB_dK_1],$$

$$L = \mathrm{diag}[-Q_1 \quad -Q_2 \quad -R_1 \quad -R_2],$$

$$E = [E_aP_1 + E_bK_1 \ E_{ad}P_1 \ E_{bd}K_1 \ md_aE_{ad}P_1 \ md_bE_{bd}K_1].$$

并且相应的鲁棒镇定控制律为

$$u(t) = K_1P_1^{-1}x(t).$$

证　本文首次引入如下状态变换

$$y(t) = (1 + mt)x(t),\ t > 0.$$

其中 $0 < m \leqslant 1$ 为时滞相关度因子. 考虑 $d_1 = d_a$, $d_2 = d_b$ 时滞界限时的情形,则由式(1)通过状态反馈控制律(5)得

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= m\,x(t) + \dot{x}(t) + mt\dot{x}(t) = \\ & m\,x(t) + md_a\bar{A}_d x(t-d_a) + md_b\bar{B}_dK\,x(t-d_b) + \\ & \tilde{A}y(t) + \bar{A}_d y(t-d_a) + \bar{B}_dKy(t-d_b). \end{aligned} \tag{7}$$

选取如下的 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$\begin{aligned} V(t) = & y^T(t)Py(t) + \int_{t-d_a}^{t} y^T(s)Q_ay(s)\mathrm{d}s + \\ & \int_{t-d_b}^{t} y^T(s)Q_by(s)\mathrm{d}s + \int_{t-d_a}^{t} x^T(s)R_ax(s)\mathrm{d}s + \\ & \int_{t-d_b}^{t} x^T(s)R_bx(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

其中, P, Q_a, Q_b, R_a, R_b 为正定对称阵.

考虑到

$$\begin{aligned} & mx^T(t)Py(t) + my^T(t)Px(t) + \\ & x^T(t)R_ax(t) + x^T(t)R_bx(t) = \\ & \frac{1}{1+mt}y^T(t)(2mP)y(t) + \\ & \frac{1}{(1+mt)^2}y^T(t)(R_a + R_b)y(t) \leqslant \\ & y^T(t)(2mP + R_a + R_b)y(t), \end{aligned} \tag{8}$$

则该 Lyapunov-Krasovskii 函数沿闭环系统(7)关于时间 t 的导数为

$$\dot{V}(t) \leqslant X^TSX.$$

其中

$$X = [y^T(t) \quad y^T(t-d_a) \quad y^T(t-d_b) \quad x^T(t-d_a) \quad x^T(t-d_b)]^T,$$

$$S = \begin{bmatrix} M & G \\ G^T & L \end{bmatrix},$$

$$M = \tilde{A}^TP + P\tilde{A} + 2mP + Q_a + Q_b + R_a + R_b,$$

$$G = [P\bar{A}_d \quad P\bar{B}_dK \quad md_aP\bar{A}_d \quad md_bP\bar{B}_dK],$$

$$L = \mathrm{diag}[-Q_a \quad -Q_b \quad -R_a \quad -R_b].$$

不确定时滞系统(1)、(2)通过状态反馈控制律(5)可鲁棒镇定的充分条件是

$$S < 0. \tag{9}$$

根据引理 1 及 2 可得不等式(9)等价于下列不等式

$$S_0 + \alpha\Delta S_1 + (1/\alpha)\Delta S_2 < 0. \tag{10}$$

其中 α 为任意大于 0 标量,且

$$S_0 = \begin{bmatrix} M_0 & G_0 \\ G_0^T & L_0 \end{bmatrix},$$

$$M_0 = (A + BK)^TP + P(A + BK) + 2mP + Q_a + Q_b + R_a + R_b,$$

$$G_0 = [PA_d \quad PB_dK \quad md_aPA_d \quad md_bPB_dK],$$

$$L_0 = \mathrm{diag}[-Q_a \quad -Q_b \quad -R_a \quad -R_b],$$

$$\Delta S_1 = [PH^T\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T[PH^T\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0],$$

$$\Delta S_2 = [E_a + E_bK \quad E_{ad} \quad E_{bd}K \quad md_aE_{ad} \quad md_bE_{bd}K]^T \cdot [E_a + E_bK \quad E_{ad} \quad E_{bd}K \quad md_aE_{ad} \quad md_bE_{bd}K].$$

运用 Schur 补引理,并引入变换

$$P_1 = P^{-1},\ Q_1 = P_1Q_aP_1,\ Q_2 = P_1Q_bP_1,$$

$$R_1 = P_1R_aP_1,\ R_2 = P_1R_bP_1,\ K = K_1P_1^{-1}.$$

其中 K_1 为适当维数任意矩阵, Q_1, Q_2, R_1, R_2 为适当维数的对称正定矩阵. 由(10)可得到不等式(6).

证毕.

注 1 由不等式(8),显而易见通过减小时滞相关度因子 m,可以减少所得结论的保守性.然而当 $m=0$时,所得结论是时滞无关的,这也是定义 m 为时滞相关度因子的原因.为了增强所得结论的时滞相关性,m 应取得大些;而为了减少保守性,m 又应取得小些,因此 m 的最优取值原则是在满足克服系统的最大时滞界限的前提下应尽量取得大些.

4 数值例子(Numerical examples)

例 1 考虑文献[1,2]中报导的不确定时滞系统

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.8 & -1\end{bmatrix},$$

$$H_1=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\ E_a=E_{ad}=I.$$

根据定理1结论,求得 $m=0.1$时,保证上述系统鲁棒稳定的时滞区间为$0\leqslant d(t)\leqslant 6.3480$.而文献[2]求得结论为$0\leqslant d(t)\leqslant 3.0369$;文献[1]求得结论仅为$0\leqslant d(t)\leqslant 0.4428$.显然选取 $m=0.1$时,本文方法所得到的结论比文献[1]和文献[2]的结果保守性要小得多.

例 2 考虑形如式(1)~(3)的不确定时滞系统

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{bmatrix},\ A_d=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.8 & -1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ B_d=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.2\end{bmatrix},$$

$$H=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},\ E_a=E_{ad}=I,$$

$$E_b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ E_{bd}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ d_a=d_b=d.$$

根据定理1求得在取不同的时滞相关度因子 m 时,能允许的最大时滞 $d_{\max}$ 及此时可实现鲁棒镇定的状态反馈增益 K 如下表

表 1 本文方法鲁棒镇定结果

Table 1 Robust stabilizing results based on the method of this paper

m	$d_{\max}$	K
1.0	0.74	$-[7.7676\quad 26.5809]$
0.5	2.00	$-[8.0404\quad 31.3958]$
0.1	11.74	$-[4.1871\quad 1.7988]$

然而上述系统,即便在 B_d,E_b,E_{bd} 都为0时,采用文献[1]方法求得的 $d_{\max}=0.55$,相应的 $K=-[8.2601\quad 6.7979]$;采用文献[2]方法,在稳定度因子 $\alpha=0.1$时,求得的 $d_{\max}=9.01$,相应的 $K=-[3.1980\quad 3.0423]\times 10^5$.而当 B_d,E_b,E_{bd} 不都为0时,文献[1]和文献[2]方法得出的结论过于复杂,且不便于用 Matlab 的 LMI 工具箱求解.显然本文方法较之文献[1]和文献[2]的方法有较大改进.

5 结论(Conclusion)

本文提出了一种新的时滞依赖型鲁棒镇定问题的设计方法.该方法的一个独特优点是可以通过选择时滞相关度因子来调节可鲁棒镇定的最大允许时滞范围,因此本文方法不仅适用于小时滞系统,也适用于大时滞系统.而且通过减小时滞相关度因子可以得到保守性更小的结论.

参考文献(References):

[1] LI X, de SOUZA C E. Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems: a linear matrix inequality approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1144 – 1148.

[2] SU T J, LU C Y, TSAI J S H. LMI approach to delay-dependent robust stability for uncertain time-delay systems [J]. *IEE Proc-Control Theory and Applications*, 2001, 148(3): 209 – 212.

[3] PERTERSEN I R, HOLLOT C V. A Riccati equation approoach to the stabilization of uncertain linear systems [J]. *Automatica*, 1986, 22(3): 397 – 411.

[4] SU H Y, WANG J C, CHU J. Robust control for linear time-varying uncertain time-delay systems via dynamic output feedback [J]. *Int J of System Science*, 1999, 30(10): 1093 – 1107.

作者简介:

苏宁军 (1975 —),男,浙江大学控制理论与工程专业研究生,研究方向为鲁棒控制,现场总线技术,无线应用,E-mail: njsu@mail.nbptt.zj.cn;

苏宏业 (1969 —),男,浙江大学先进控制研究所教授,博士生导师,1995年获浙江大学工业自动化专业博士学位,研究方向为鲁棒控制,非线性控制,时滞系统控制和 PID 自整定理论等,E-mail: hysu@mail.hz.zj.cn;

褚 健 (1963 —),男,浙江大学教授,博士生导师,"长江计划"特聘教授,1989年获浙江大学工学博士学位,研究方向为时滞系统控制,非线性控制,鲁棒控制,E-mail: chuj@iipc.zju.edu.cn.