

倒立摆系统的变结构控制方案

姚利娜, 王 宏, 周靖林, 岳 红

(中国科学院 自动化研究所, 北京 100080)

摘要: 对单级倒立摆系统的稳定和鲁棒控制问题, 提出了一种基于李雅普诺夫直接法的变结构控制方案, 理论分析和计算机模拟都表明该控制方案不仅能镇定倒立摆, 实现对台车的位移控制, 而且当系统参数变化时也实现了对该系统的鲁棒控制。

关键词: 单级倒立摆; 变结构控制; 李雅普诺夫直接法

中图分类号: TP13, TP273 **文献标识码:** A

Variable structure controller for an inverted pendulum

Yao Li-na, WANG Hong, ZHOU Jing-lin, YUE Hong

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: Using the Lyapunov direct method, a variable structure controller is proposed for the stabilization and robust control of a single inverted pendulum. Theoretical analysis and computer simulations have illustrated that this control scheme can stabilize the pendulum, control the cart displacement and also realize the robust control when the system is subjected to parameter changes.

Key words: single inverted pendulum; variable structure control; Lyapunov direct method

1 引言 (Introduction)

倒立摆系统是一个复杂、多变量、存在严重非线性、非自治不稳定系统, 只有采用行之有效的控制方法才能使之稳定。倒立摆的稳定性控制是控制理论与应用的典型问题。单级倒立摆的背景源于火箭发射助推器。从 20 世纪 60 年代起各国从事控制理论及工程研究的专家学者开始关注倒立摆系统的稳定控制研究原因就在于作为受控对象倒立摆系统是非线性、强耦合、多变量和自然不稳定的系统, 是检验各种控制理论的理想模型。在控制过程中倒立摆系统能有效地反映可镇定性、鲁棒性、随动性以及跟踪等许多控制中的关键问题。迄今, 人们已经利用经典控制理论、现代控制理论以及各种智能控制方法实现了多种倒立摆系统的控制稳定^[1~11]。

由于倒立摆系统结构的特殊性及其控制的复杂性, 传统的状态反馈方法难以达到预期的控制效果。变结构控制作为一种控制系统的综合方法, 无论对于线性还是非线性系统均有普遍的适用性, 变结构控制对系统参数摄动及外部扰动具有较强的鲁棒性, 且具有实时性强和响应快速的优点。

本文采用变结构控制方法对单级倒立摆系统的镇定、对给定运动的跟踪及鲁棒控制问题进行研究,

用 Lyapunov 直接法设计出变结构控制器, 将该变结构控制律作用于倒立摆系统。计算机模拟显示变结构控制方法能有效地实现单级倒立摆系统的镇定, 同时通过适当修正变结构控制器, 可实现对台车的位移控制, 且闭环系统的性能指标得以满足。当系统参数变化时仍有同样的结论成立。

2 倒立摆系统描述 (Description of the inverted pendulum system)

倒立摆系统是一个复杂的非线性系统。小车可以自由地在限定的轨道上左右移动。小车上的倒立摆一端被铰链在小车顶部, 另一端可以在小车轨道所在地垂直平面上自由转动。控制目的是通过电机推动小车运动, 使倒立摆平衡并保持小车不和轨道两端相撞。

倒立摆系统的示意图见文献[12]。建模时, 如果考虑到台车与导轨接触面的摩擦特性, 则台车水平方向的运动方程为

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = f(t) - f_F(t) - \delta(\dot{x}). \quad (1)$$

其中 $f(t)$ 为由电机提供的水平方向的驱动力, $f_F(t)$ 表示摆的水平运动对台车的作用力, $\delta(\dot{x})$ 表示台车与导轨间的摩擦力, 可以近似描述为接触面

速度 $\dot{x}$ 的非线性函数, M 为台车的质量. 另外摆的转动过程中的节点的摩擦系数 C 通常也是难以精确得到的参数. 这里假设

$$C = C_0 \pm \Delta C, |\delta(\dot{x})| \leq \gamma |\dot{x}|. \quad (2)$$

其中, C_0 表示摩擦系数的标称值, ΔC 为未知的摄动值, $\gamma > 0$ 为给定的正数. 为了建模方便, 假设 $\delta(\dot{x}) = F\dot{x}$, F 为描述台车与导轨间摩擦力的未知常数, 则倒立摆系统的动态过程描述的微分方程为

$$\begin{cases} (J + mL^2) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + (mL\cos\varphi(t)) \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \\ -C \frac{d\varphi(t)}{dt} + mLg\sin\varphi(t), \\ (M+m) \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{K_T^2 K_g^2}{R_a r^2} \frac{dx(t)}{dt} + (mL\cos\varphi(t)) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \\ \frac{K_T K_g}{R_a r} u(t) + mL\sin\varphi(t) \left\{ \frac{d\varphi(t)}{dt} \right\}^2 - F \left(\frac{dx}{dt} \right). \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\varphi(t)$ 表示倒立摆的摆角, $x(t)$ 表示台车位移, $J = mL^2/3$ 为摆转动惯量, $u(t)$ 为拖动台车的直流电机电枢电压, m 是摆的质量, g 为重力加速度, K_T 是电机力矩, R_a 是电枢电阻, K_E 是反向电势系数, K_g 是齿轮比, r 是台车驱动轮半径, L 是摆质点距节点的距离. 以上物理参数取值详见文献[12].

因为文中沿 $f(t)$ 方向给台车施加一较小的脉冲力, 为便于控制器的设计, 可将系统(1)在 $\varphi = 0$, $x = 0$ 附近线性化, 则有 $\sin(\varphi) \approx \varphi$, $\cos(\varphi) \approx 1$, $\dot{\varphi}^2 \approx 0$. 进而式(3)可以表示为如下的状态空间模型:

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu, \\ y = Cz. \end{cases} \quad (4)$$

其中 $z = [\varphi \quad \omega \quad x \quad v]^T$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ 为摆的角速度, $v = \frac{dx}{dt}$ 为台车的速度.

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mLgM_0}{\Delta} & -\frac{M_0 C}{\Delta} & 0 & \frac{mLK_T^2 K_g^2 + (FmL) R_a r^2}{R_a r^2 \Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2 L^2 g}{\Delta} & \frac{m^2 L^2 C}{mL\Delta} & 0 & \frac{-J_0 K_T^2 K_g^2 - J_0 F}{R_a r^2 \Delta} \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{mLK_T K_g}{J_0 R_a r} & 0 & \frac{J_0 K_T K_g}{R_a r \Delta} \end{bmatrix}^T, \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$M_0 = M + m, J_0 = J + mL^2,$$

$$\Delta = (J + mL^2)(M + m) - m^2 L^2 / 2.$$

对于标称系统, 由于假设了 $\delta(x) = 0$, $\Delta C = 0$. 代入相应参数数值可得到标称系统的线性化模型:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 31.5722 & -3.0184 & 0 & 38.1693 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.0414 & 0.2907 & 0 & -15.5222 \end{bmatrix}, \\ B = [0 \quad -8.340 \quad 0 \quad 3.498]^T. \end{cases} \quad (6)$$

3 变结构控制器设计 (Design of variable structure controller)

3.1 控制律和切换函数的设计 (Design of the controller and switched function)

通常倒立摆控制研究的重点是在于如何施加有效地控制使该系统稳定. 稳定的具体表现就是倒立摆系统不会振荡发散或突然倒下. 如果倒立摆系统是可控的, 那么对于系统(5), 存在反馈系数矩阵 K 使得矩阵 $A + BK$ 的所有特征值都具有负实部. 由矩阵理论有关知识可知, 对于如下关于 P 矩阵的李雅普诺夫方程存在正定解:

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q, \quad (7)$$

其中 Q 是任意给定的正定矩阵.

考虑能量函数 $V = z^T P z$, 易见 V 沿着系统(4)解的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T P(A + BK)z + z^T (A + BK)^T P z + \\ &2z^T P B(u - Kz) = -z^T Qz + 2z^T P B(u - Kz). \end{aligned}$$

因此在变结构控制

$$u = Kz - k_0 \text{sgn}(S), S = B^T P z, k_0 > 0 \quad (8)$$

的作用下, 恒有

$$\dot{V} = -z^T Qz - kS^T \text{sgn}(S) < 0.$$

故系统(4)的零解是渐近稳定的.

上述切换函数直接由李雅普诺夫矩阵方程(7)的解给出, 从而不需对系统(4)进行再设计.

对台车位置的调节只需将控制器(8)中的位移变量 x 变为 $x - x_d$ (x_d 为期望的位移) 即可.

3.2 系统抖振的抑制 (Restraint of dithering and quiver)

变结构控制中控制结构的切换具有理想开关特性, 能在切换面上生成滑动模态, 渐近趋向原点. 但是, 实际情况往往由于时间上的延迟和空间上的滞后等不能达到理想的开关的境界, 使得滑动模态呈

抖动形式,在光滑的滑动上叠加了自振,因此在滑模面上产生抖振.可利用饱和函数 $\text{sat}\left(\frac{s}{\Delta}\right)$ 代替符号函数 $\text{sgn}(s)$ 来抑制抖振^[13].

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\Delta}\right) = \begin{cases} 1, & s > \Delta, \\ s, & |s| \leq \Delta, \\ -1, & s < -\Delta. \end{cases}$$

式中 $k = \frac{1}{\Delta}$. 本文中取 $\Delta = 0.3$.

4 仿真(Simulations)

4.1 标称系统仿真结果(Simulations of the nominal-system)

设计系统(6)的变结构控制器时,为满足征文中给出的性能指标,经近似计算,可将极点配置在 $P = [-2 + 4j - 2 - 4j - 10 \quad -12]$, 得到的反馈矩阵为 $K = [-55.6165 \quad -8.3813 \quad -29.0433 \quad -18.4350]$ 同时将 Q 取为单位阵,可得 $B^T P = [-2.3565 \quad -0.4812 \quad -0.0172 \quad -0.5446]$. 所以滑模切换函数为 $S = -2.3565\varphi - 0.4812\omega - 0.0172x - 0.5446v$.

(9)

仿真时取 $k_0 = 0.3$, 这样就完成了控制器的设计. 为满足控制限幅要求,在控制器后增加一非线性饱和限幅器,使得控制量的变化范围有限 $u \in [-10, 10]$. 当沿水平方向给台车施加脉冲力 $40\delta(t)$ N 时,仿真结果如图1所示. 并计算出评价值为 $\int_0^6 \varphi^2(t) dt = 1.679 \times 10^{-3}$.

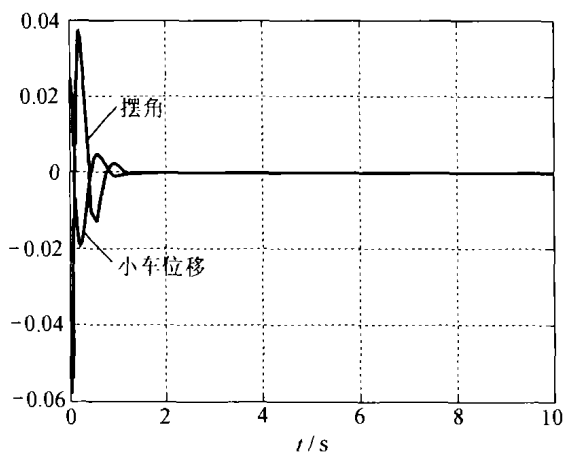


图1 倒立摆镇定摆角和小车位移仿真结果
Fig. 1 Simulation results of pendulum angle and cart displacement of stabilization

从图1可以看出将所设计的变结构控制律作用到倒立摆系统后,稳定了倒立摆,并达到了给定的性能要求. 当在图1相同条件下运行5s后,对小台车给出 $x_d = 0.2$ m 的平移指令. 图2是台车位置调节

时的摆角和小车位移随时间变化曲线. 计算出评价值为 $\int_0^{10} \{\varphi^2(t) + (x(t) - x_d)^2\} dt = 0.0319$.

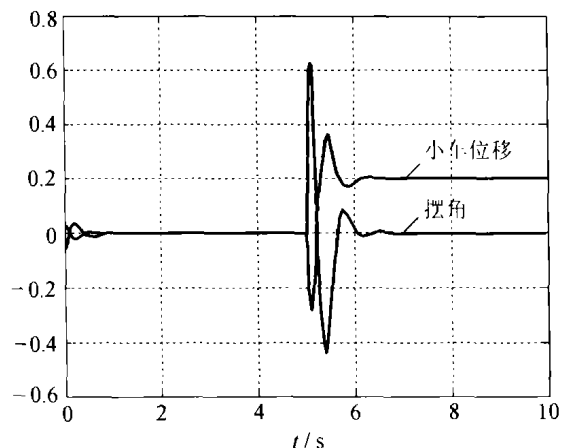


图2 小台车位置调节时摆角和小车位移仿真结果
Fig. 2 Simulation results of pendulum angle and cart displacement of cart position modulation

从图2可看出,对所设计的变结构控制器修正后,能实现小台车对给定运动($x_d = 0.2$ m)的跟踪,调节了台车位置,倒立摆又重新得到平衡,且仍能达到给定的性能要求.

线性化后对系统性能可能造成一些影响,为了说明这个问题,将本文中所设计的变结构控制器直接加到原非线性系统上,仿真结果如图3所示.

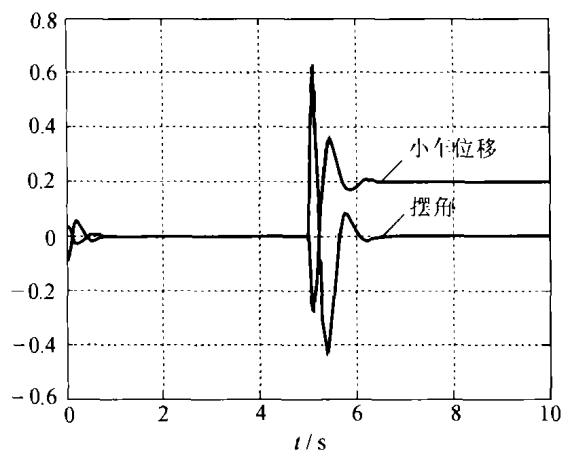


图3 摆角和小车位移仿真结果
Fig. 3 Simulation results of pendulum angle and cart displacement

从图3可看出,由于所加的脉冲力比较小,使得线性化对系统的影响不大,仍可实现倒立摆的镇定和台车位置的调节,只是性能指标略有下降. 指标评价值为 $\int_0^{10} \{\varphi^2(t) + (x(t) - x_d)^2\} dt = 0.0346$.

4.2 鲁棒控制仿真结果(Simulations of robust control)

此时摆长 $L \leq 0.6$ m, $\Delta C \neq 0$. 由于摆长取临界

值时,参数相对变化比较大,在鲁棒控制设计时取 $L = 0.6$ m. 我们不改变原来设计的变结构控制器结构,当系统参数 L 变化(取 L 为临界值), $\Delta C \neq 0$, $\delta(\dot{x}) \neq 0$ 时,在初始给台车水平 $40\delta(t)$ 的脉冲力,5 s 后给台车 0.2 m 的平移指令. 仿真结果如图 4 所示.

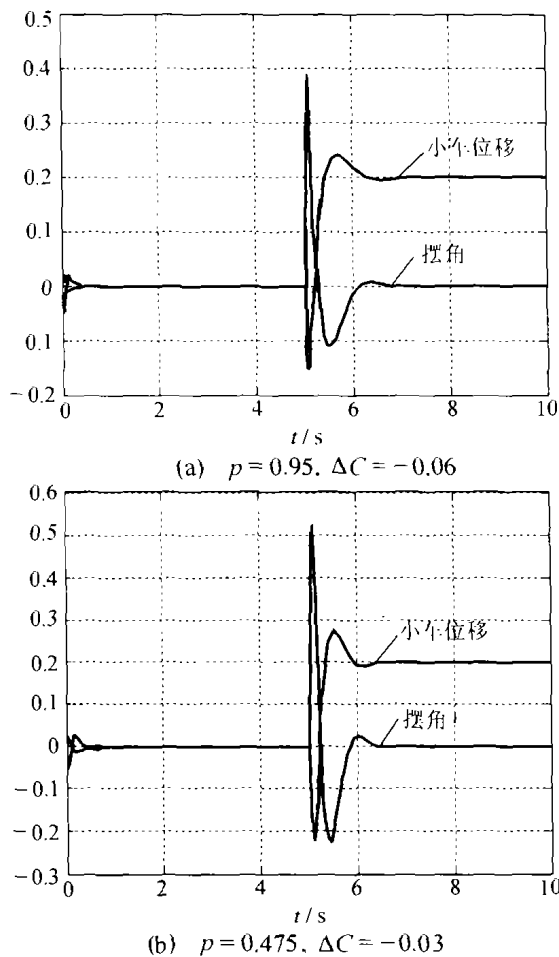


图 4 仿真结果

Fig. 4 Results of simulations

从图 4 可看出,当系统参数变化时,本文中设计的变结构控制器仍可实现系统的控制目标,且能达到给定的性能要求,鲁棒控制效果良好.这也体现了变结构控制器具有良好的鲁棒性和对参数变化的不敏感性.

5 结论(Conclusion)

基于 Lyapunov 直接法设计出倒立摆系统的变结构控制器,稳定了倒立摆,实现了对台车的位置调节.所设计控制器具有较强的鲁棒性,当系统参数变化时,该控制器仍能实现原定控制目标,达到了给定性能的要求.

参考文献(References):

[1] MORI S, NISLUBARA H, FURUTA K. Control of unstable mechanical system—control of pendulum [J]. *Int J Control*, 1976, 23(5): 673

– 692.

[2] FURUTA K, Ochiai T, ONO N. Attitude control of a triple inverted pendulum [J]. *Int J Control*, 1984, 39(6): 1351 – 1365.

[3] MEIER H, FARWIG Z, UNBEHAUEN H. Discrete computer control of a triple-inverted pendulum [J]. *Optical Control Applications & Methods*, 1990, 11(1): 151 – 171.

[4] WILLIAMS V, MATSUOKA K. Learning to balance the inverted pendulum using neural networks [C]. // *IEEE Int Joint Conference on Neural Networks*. Singapore: [s. n.], 1991, 1: 214 – 219.

[5] DOTOLI M, MAIONE B, NASO D, et al. Fuzzy sliding mode control for inverted pendulum swing-up with restricted travel [C]. // *Proc of the 10th IEEE Int Conference on Fuzzy Systems*. Australia: [s. n.], 2001, 2: 753 – 756.

[6] DAVID Angeli. Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback [J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1103 – 1108.

[7] LIN Zongli, ALI Saberi, MICHAEL Gutmann, et al. Linear controller for an inverted pendulum having restricted travel: A high-and-low gain approach [J]. *Automatica*, 1996, 32(6): 933 – 937.

[8] FURUTA K, OKUTANTI T, SONE H. Computer control of a double inverted pendulum [J]. *Computer and Elect. Engrg*, 1978, 1(5): 67 – 84.

[9] MORI S, NISHIHARA H, FURUTA K. Control of unstable mechanical system—control of pendulum [J]. *Int J Control*, 1976, 23(5): 673 – 692.

[10] FURUTA K, KAJIWARA H, KOSUGE K. Digital control of a double inverted pendulum on an inclosed rail [J]. *Int J Control*, 1980, 32(5): 907 – 924.

[11] 梁任秋, 赵松, 唐悦, 等. 二级倒立摆的数字控制器设计 [J]. 控制理论与应用, 1987, 4(1): 115 – 124.

(LIANG Renqiu, ZHAO Song, TANG Yue, et al. Digital controller design of a double inverted pendulum [J]. *Control Theory & Applications*, 1987, 4(1): 115 – 124.)

[12] 申铁龙, 梅生伟, 王宏, 等. 鲁棒控制基准设计问题: 倒立摆控制 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 974 – 975.

(SHEN Tielong, MEI Shengwei, WANG Hong, et al. The reference design issue of robust control: control of an inverted pendulum [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 974 – 975.)

[13] 姚琼荃, 黄继起, 吴汉松. 变结构控制系统 [M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1997.

(YAO Qinghui, HUANG Jiqi, WU Han Song. *Variable Structure Control System* [M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1997.)

作者简介:

姚利娜 (1977 —), 女, 博士生, 研究方向为动态系统的故障诊断与容错控制, 非线性控制等, E-mail: michelle_lnxg@126.com;

王宏 (1960 —), 男, 研究员. 中国科学院引进海外杰出人才“百人计划”项目的引进学者. 英国 UMIST 教授, 出版专著多部, 研究领域为有界随机分布系统的建模、控制与应用及动态系统故障诊断(确定系统与随机系统)等;

周靖林 (1976 —), 博士生, 研究方向为广义随机分布控制的建模及最优控制算法、变结构控制等;

岳红 (1968 —), 女, 副研究员, 主要从事复杂工业过程先进控制研究, 包括过程机理建模、系统辨识、鲁棒控制、随机分布控制、故障诊断、工业过程计算机控制等.