

鲁棒极点配置约束下的模糊控制系统设计

苗志宏¹, 李洪兴²

(1. 中国人民武装警察部队学院 基础部, 河北 廊坊 065000; 2. 北京师范大学 数学系, 北京 100875)

摘要: 针对一类利用 T-S 模糊模型近似描述的不确定非线性系统, 给出了一种具有鲁棒极点配置功能的模糊控制器和模糊状态观测器的设计方法. 首先, 利用并行分配补偿(PDC)设计思想和基于线性矩阵不等式(LMI)的鲁棒极点配置理论, 得到了使整个闭环系统全局渐近稳定并满足希望的动态性能的充分条件. 然后将这些条件转化为标准的 LMI 问题. 最后将该设计方法应用于倒立摆的平衡控制中, 验证了本方法的有效性.

关键词: 模糊控制器; 模糊状态观测器; 鲁棒极点配置; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Design of fuzzy control system with robust pole placement constraints

MIAO Zhi-hong¹, LI Hong-xing²

(1. Department of Basic Science, The Chinese People's Armed Police Force Academy, Langfang Hebei 065000, China;

2. Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: A method of designing fuzzy controllers and fuzzy state observers with robust pole placement constraints for a class of uncertain nonlinear systems approximatively expressed by Takagi-Sugeno(T-S) fuzzy dynamic model was proposed. Firstly, based on the concept of the prallel distributed compensation(PDC) and the theory of robust pole placement, a sufficient condition which guarantees global asymptotic stability of the whole system and satisfies desired performance was obtained. Then, the condition was converted to a standard linear matrix inequalities(LMI) problem in the design procedures. Finally, the simulation of an inverted pendulum verified the effectiveness of the design method.

Key words: fuzzy controller; fuzzy state observer; robust pole placement; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

基于 T-S 模糊模型^[1], Tanaka 和 Sugeno 在文献[2]中给出了控制系统全局渐近稳定的一个充分条件, 主要是寻找一个共同的对称正定矩阵 P 使其满足几个同类型的 Lyapunov 不等式. 在此之后 Wang 等学者在文献[3]中提出了所谓的“并行分配补偿(parallel distributed compensation)”设计框架(以下简称 PDC), 并将系统稳定问题转化为求解几个线性矩阵不等式(LMIs)的标准可行解问题. 但该方法中当反馈控制增益 $K_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 未知时, 得到的是非线性矩阵不等式(NMIs), 求解时需要预先指定反馈控制增益 $K_i (i = 1, 2, \dots, r)$. 因此, 这种方法实际上是验证设计好的控制系统是否稳定的方法, 需要反复试错来设计控制器. 鉴于此, Joh 等学者在文献[4, 5]中, 利用 Schur 补^[6]将文献[3]的非线性矩

阵不等式(NMIs)转化为线性矩阵不等式(LMIs), 并称其为“稳定 LMI(stability LMI)”. 基于稳定 LMI 他们提出了一个系统设计 T-S 模糊控制器的方法. 关于线性系统的闭环极点配置问题, 文献[7, 8]中把系统动态品质(如超调量、调整时间等)用 LMI 区域来表示, 其中指定的闭环极点将位于 LMI 区域中, 然后将系统闭环极点配置问题转化为求解 LMI 问题.

对于一类确定性非线性系统, 文献[9]中给出了一种基于 LMI 的模糊控制器和模糊状态观测器的设计方法, 在该方法中系统状态的动态性能和观测器状态估计的动态性能分别通过对相应的局部系统闭环极点的配置来确定, 并且, 模糊状态反馈的设计和模糊状态估计的设计可以独立进行, 即满足分离定律. 另一面, 对于参数不确定线性系统, 文献[10]中给出了一种基于 LMI 的鲁棒极点配置方法, 但未

涉及状态观测器的设计.

本文将文献[10]提出的基于LMI的鲁棒极点配置方法推广到一类用模糊T-S模型描述的不确定非线性系统的状态反馈控制设计问题中.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下由T-S模糊模型描述的非线性不确定系统:

Plant Rule i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_n(t)$ is M_{in} ,

THEN $\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t)$,

$y(t) = C_i x(t), i = 1, 2, \dots, r$,

(1)

其中 M_{ij} 是模糊集; $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量; $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T$ 是可量测的变量; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制向量; $y(t) \in \mathbb{R}^q$ 是输出向量; A_i, B_i 和 C_i 是定常实矩阵, 而 $\Delta A_i = HFE_{1i}, \Delta B_i = HFE_{2i}$ 表示系统不确定性部分, 这里 H, E_{1i} 和 $E_{2i}, (i = 1, 2, \dots, r)$ 是已知的实矩阵, 而 F 是未知的实矩阵且 $F \in \Omega: = \{F | F^T F \leq I\}$.

采用单值模糊化、乘积模糊推理和加权平均解模糊法, 整个模糊系统的状态方程推导得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i)x(t) + \\ (B_i + \Delta B_i)u(t) \}, \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i x(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(z_j(t)).$$

这里 $M_{ij}(z_j(t))$ 是模糊集 M_{ij} 在 $z_j(t)$ 处的隶属度. 设对任意的 $t > 0, w_i(z(t)) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$,

$\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) > 0$, 则对任意的 $t > 0$ 有 $h_i(z(t)) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$, $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$.

以上系统中, 每一个模糊规则对应一个局部线性系统, 本文中假设每一个局部线性系统对任意的 $F \in \Omega$ 是既能控又能观的. 在实际应用中, 并非所有的状态变量都能够测量到, 因此有必要设计模糊状态观测器来估计状态变量. 在本文中考虑如下全

维模糊状态观测器:

Observer Rule i :

IF $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_n(t)$ is M_{in} ,

THEN $\dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) - L_i(y(t) - \hat{y}(t))$,

$\hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t), i = 1, 2, \dots, r$.

(3)

其中 $\hat{x}(t)$ 是状态向量 $x(t)$ 的估计, L_i 是待设计的状态估计增益.

采用同样的运算方法, 模糊状态观测器最终结果为

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [(A_i + L_i C_j) \hat{x}(t) + B_i u(t) - L_i y(t)]. \quad (4)$$

利用PDC的设计思想, 采用如下的控制策略:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i \hat{x}(t), \quad (5)$$

这里 K_i 是针对第 i 个局部线性系统待设计的状态反馈增益.

将式(5)代入式(2)式中, 整理后得到方程

$$\dot{\hat{x}}(t) = [\bar{A} + B_p F C_q] \hat{x}(t) + [\bar{B} + B_p F D_q] \tilde{x}(t), \quad (6)$$

其中 $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ 为状态估计误差, 而

$$\begin{cases} \bar{A} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [A_i + B_i K_j], \\ \bar{B} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) B_i K_j, \\ B_p = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) H, \\ C_q = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [E_{1i} + E_{2i} K_j], \\ D_q = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) E_{2i} K_j. \end{cases} \quad (7)$$

引入虚构变量 $p(t), q(t)$, 将上式表示为如下线性分式表达式(LFR):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \bar{A} \hat{x}(t) + \bar{B} \tilde{x}(t) + B_p p(t), \\ q(t) = C_q \hat{x}(t) + D_q \tilde{x}(t), \\ p(t) = F q(t). \end{cases} \quad (8)$$

然后, 将式(5)代入式(4)中, 整理后得到状态估计方程为

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) [(A_i + B_i K_j) \hat{x}(t) + L_i C_j \tilde{x}(t)]. \quad (9)$$

将式(9)与式(8)式相减得状态估计误差方程

$$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{C}\bar{x}(t) - B_p p(t). \quad (10)$$

这里 $\bar{C} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i + L_i C_j)$. 联合式(8)与式(10), 得到整个闭环系统的动态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_p \\ -B_p \end{pmatrix} p(t). \quad (11)$$

为便于进行极点配置, 下面分别给出第 i 个模糊规则对应的局部闭环状态方程和局部状态估计方程:

$$\dot{x}(t) = [\bar{A}_i + HFC_{qi}]x(t) + [\bar{B}_i + HFD_{qi}]\bar{x}(t), \quad (12)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A_i + L_i C_i)\bar{x}(t) + B_i u(t) - L_i y(t), \quad (13)$$

其中 $\bar{A}_i = A_i + B_i K_i$, $\bar{B}_i = B_i K_i$, $C_{qi} = E_{1i} + E_{2i} K_i$, $D_{qi} = E_{2i} K_i$.

本文的设计目标是: 针对不确定非线性系统(1), 求出状态反馈增益 $K_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 及状态估计增益 $L_i (i = 1, 2, \dots, r)$, 使得系统达到如下的性能指标: 1) 整个闭环系统(11)是全局渐近稳定的; 2) 对 $\forall F \in \Omega$, 每一个局部闭环状态系统(12)的极点配置到指定的 LMI 区域 D_1 中, 即每个局部系统是鲁棒 D_1 -稳定的; 3) 每一个局部状态估计系统

$$\begin{pmatrix} G_{ii} & B_i V_i & H & \lambda T_{ii} \\ V_i^T B_i^T & Q\Phi_{ii}Q & -QPH & \lambda V_i^T E_{2i}^T \\ H^T & -H^T P Q & -\lambda I & 0 \\ \lambda T_{ii} & \lambda E_{2i} V_i & 0 & -\lambda I \end{pmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, r, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} G_{ij} + G_{ji} & B_i V_j + B_j V_i & 2H & \lambda(T_{ij} + T_{ji}) \\ V_j^T B_i^T + V_i^T B_j^T & Q(\Phi_{ij} + \Phi_{ji})Q & -2QPH & \lambda(V_j^T E_{2i}^T + V_i^T E_{2j}^T) \\ 2H^T & -2H^T P Q & -2\lambda I & 0 \\ \lambda(T_{ij}^T + T_{ji}^T) & \lambda(E_{2i} V_j + E_{2j} V_i) & 0 & -2\lambda I \end{pmatrix} < 0, i < j \leq r. \quad (16)$$

这里 $G_{ij} = A_i Q + Q A_i^T + B_i V_j + V_j^T B_i^T$, $\Phi_{ij} = A_i^T P + P A_i + C_j^T W_i^T + W_i C_j$, $T_{ij} = Q E_{1i}^T + V_j^T E_{2i}^T$, 则存在一个模糊控制器(5)和模糊状态观测器(4)使得整个闭环系统(11)全局渐近稳定. 这里系统状态反馈增益为 $K_i = V_i Q^{-1} (i = 1, 2, \dots, r)$, 状态估计增益为 $L_i = P^{-1} W_i (i = 1, 2, \dots, r)$.

定理2中以 Q, P, V_i 及 W_i 为矩阵变量的不等式组(15), (16)不是线性矩阵不等式, 因此不能直接用 Matlab 的 LMI 工具箱求解. 为解决这个问题, 受到文献[11]中解非线性矩阵不等式的启发, 这里也分两步来求解: 1) 通过线性矩阵不等式组 $G_{ii} < 0 (i = 1, 2,$

(13)的极点配置到指定的 LMI 区域 D_2 中.

3 模糊控制器和模糊观测器的设计 (Design of fuzzy controllers and fuzzy observers)

首先, 设计出的模糊控制器和模糊状态观测器应使整个闭环系统全局渐近稳定, 为此, 先给出以下稳定性定理:

定理1 对于不确定非线性系统(1), 如果存在共同的对称正定矩阵 Q 及 P , 矩阵 $K_i, L_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 及正实数 λ 满足如下矩阵不等式组:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}Q + Q\bar{A}^T & \bar{B} & B_p & QC_q^T \\ \bar{B}^T & \bar{C}^T P + P\bar{C} & -PB_p & D_q^T \\ B_p & -B_p^T P & -\lambda I & 0 \\ C_q Q & D_q & 0 & -\frac{1}{\lambda}I \end{pmatrix} < 0, \quad (14)$$

则整个闭环系统(11)是全局渐近稳定的.

证明见附录.

为便于用 LMI 方法求出 $K_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 及 $L_i (i = 1, 2, \dots, r)$, 基于上述稳定性定理容易得到如下定理:

定理2 对于不确定非线性系统(1), 如果存在共同的对称正定矩阵 Q 及 P , 矩阵 $V_j, W_j (j = 1, 2, \dots, r)$ 及正实数 λ 满足如下矩阵不等式组:

$$\begin{pmatrix} G_{ii} & B_i V_i & H & \lambda T_{ii} \\ V_i^T B_i^T & Q\Phi_{ii}Q & -QPH & \lambda V_i^T E_{2i}^T \\ H^T & -H^T P Q & -\lambda I & 0 \\ \lambda T_{ii} & \lambda E_{2i} V_i & 0 & -\lambda I \end{pmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, r, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} G_{ij} + G_{ji} & B_i V_j + B_j V_i & 2H & \lambda(T_{ij} + T_{ji}) \\ V_j^T B_i^T + V_i^T B_j^T & Q(\Phi_{ij} + \Phi_{ji})Q & -2QPH & \lambda(V_j^T E_{2i}^T + V_i^T E_{2j}^T) \\ 2H^T & -2H^T P Q & -2\lambda I & 0 \\ \lambda(T_{ij}^T + T_{ji}^T) & \lambda(E_{2i} V_j + E_{2j} V_i) & 0 & -2\lambda I \end{pmatrix} < 0, i < j \leq r. \quad (16)$$

$\dots, r)$ 与 $G_{ij} < 0 (i < j \leq r)$, 求出矩阵 $Q, V_i (i = 1, 2, \dots, r)$; 2) 将得到的 Q 及 $V_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 代入到矩阵不等式组(15), (16)中, 此时矩阵不等式组(15), (16)变成了以 $P, W_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 为矩阵变量的线性矩阵不等式组. 于是便可求出 $P, W_i (i = 1, 2, \dots, r)$.

然后, 就系统状态 x 的动态性能和模糊观测器状态估计 $\bar{x}$ 的动态性能, 分别进行极点配置. 对每一个局部闭环状态系统(12), 根据系统状态 x 响应的要求指定矩阵 L, M , 从而定义一个 LMI 区域 $D_1 = \{z \in C | f_{D_1}(z) := L + Mz + M^T \bar{z} < 0\}^{[10]}$. 关于鲁

棒极点配置,文献[10]中给出了基于 LMI 的一个充分条件.针对本文提出的非线性不确定系统,给出另一形式的定理:

定理 3 如果存在一个共同的正定对称矩阵 Q , 存在矩阵 $Y_j (j = 1, 2, \dots, r)$ 及常数 $\mu > 0$ 使得如下的矩阵不等式成立:

$$\begin{pmatrix} M_D(\bar{A}_i, Q) + \mu(M_1^T M_1 \otimes HH^T) & M_2^T \otimes (C_{q_i} Q)^T \\ M_2 \otimes (C_{q_i} Q) & -\mu I \end{pmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中 $M_D(\bar{A}_i, Q) \triangleq L \otimes Q + M \otimes (A_i Q + B_i Y_i) + M^T \otimes (A_i Q + B_i Y_i)^T$, $M = M_1^T M_2$ 是矩阵 M 的满秩分解.于是对 $\forall F \in \Omega$ 每一个局部系统(12)的闭环极点将配置到区域 D_1 中(即鲁棒 D_1 -稳定^[10]),这里状态反馈增益为 $K_i = Y_i Q^{-1} (i = 1, 2, \dots, r)$.

证明见附录.

对每一个局部状态估计系统(13),根据状态观测器的响应要求指定矩阵 L^* , M^* , 从而定义另一个 LMI 区域 $D_2 = \{z \in C \mid f_{D_2}(z) = L^* + M^* z + M^{*T} \bar{z} < 0\}$. 关于模糊状态观测器的极点配置,根据文献[10],有如下定理:

定理 4 如果存在一个共同的正定对称矩阵 P , 存在矩阵 $W_i (j = 1, 2, \dots, r)$ 使得如下的矩阵不等式组成立:

$$\begin{aligned} L^* \otimes P + M^* \otimes (PA_i + W_i C_i) + \\ M^{*T} \otimes (PA_i + W_i C_i)^T < 0 (i = 1, 2, \dots, r), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $L^* = L^{*T}$, 则每一个局部状态估计系统(13)的极点将配置到区域 D_2 中(即 D_2 -稳定), 这里状态估计增益为 $L_i = P^{-1} W_i (i = 1, 2, \dots, r)$.

注 由于模糊状态观测器中没有不确定性部分,因此,这里是通常意义下的极点配置.此外上述式(17)和式(18)均是线性矩阵不等式.

最后,联合上述稳定性定理和极点配置定理,有如下定理:

定理 5 对于不确定非线性系统(1),如果存在共同的正定对称矩阵 Q, P , 矩阵 $V_i, W_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 及正实数 λ 和 μ 满足矩阵不等式组(15)~(18).则存在一个模糊控制器(5)及模糊状态观测器(4),使得整个闭环系统(11)是全局渐近稳定的,并且系统的动态性能满足指定的要求.这里系统状态反馈增益为 $K_i = V_i Q^{-1} (i = 1, 2, \dots, r)$, 状态估计增益为 $L_i = P^{-1} W_i (i = 1, 2, \dots, r)$.

4 仿真研究 (Simulation research)

倒立摆的动态方程为^[12]

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{g(M+m)\sin(x_1) - ml\sin(x_1)\cos(x_1)x_2^2}{4l/3(M+m) - ml\cos^2(x_1)} - \frac{\cos(x_1)}{4l/3(M+m) - ml\cos^2(x_1)} u. \quad (20)$$

这里 x_1, x_2 分别为摆杆与垂直方向的夹角和摆杆的角速度, u 是作用在小车上的力, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 为重力加速度, $M = 8 \text{ kg}$ 为小车的质量,摆杆长度为 $2l = 1.0 \text{ m}$, 而摆杆的质量 m 是一个不确定的量,其取值范围是 $[m_0 - \Delta m, m_0 + \Delta m]$, 这里 $m_0 = 2.0 \text{ kg}$, $\Delta m = m_0 \times 40\%$. 利用泰勒公式作近似替代,可以获得倒立摆的模糊 T-S 模型:

$$\begin{cases} \text{Rule 1: IF } x_1 \text{ is about } 0 \text{ THEN} \\ \quad \dot{x} = (A_1 + \Delta A_1)x + (B_1 + \Delta B_1)u, y = C_1 x, \\ \text{Rule 2: IF } x_1 \text{ is about } \pm \frac{\pi}{2} \text{ THEN} \\ \quad \dot{x} = (A_2 + \Delta A_2)x + (B_2 + \Delta B_2)u, y = C_2 x. \end{cases} \quad (21)$$

这里

$$\begin{cases} A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g(M+m_0)}{l(4/3(M+m_0) - m_0)} & 0 \end{pmatrix}, \\ B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l(4/3(M+m_0) - m_0)} \end{pmatrix}, C_1 = (1 \ 0), \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g(M+m_0)}{\pi l(4/3(M+m_0) - m_0 \beta^2)} & 0 \end{pmatrix}, \\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\beta}{l(4/3(M+m_0) - m_0 \beta^2)} \end{pmatrix}, C_2 = (1 \ 0). \end{cases} \quad (23)$$

其中 $\beta = \cos 88^\circ$, 而 $[\Delta A_1, \Delta B_1] = HF[E_{11}, E_{21}]$; $[\Delta A_2, \Delta B_2] = HF[E_{12}, E_{22}]$, 这里 $H = [0 \ \Delta m]^T$, $E_{11} = [1.2208 \ 0]$, $E_{21} = 0.0052$, $E_{12} = [6.8414 \times 10^{-4} \ 0]$, $E_{22} = 5.2321 \times 10^{-4}$.

选取“about 0”和“about $\pm \frac{\pi}{2}$ ”的隶属函数分别为

$$\begin{aligned} h_1(x_1) &= \frac{1 - 1/(1 + \exp(-7(x_1 - \pi/4)))}{1 + \exp(-7(x_1 + \pi/4))}, h_2(x_1) \\ &= 1 - h_1(x_1). \end{aligned}$$

分别指定两类局部系统的闭环极点配置区域 D_1 及 D_2 (如图 1 所示).由于模糊状态观测器的收敛速度必须快于状态闭环系统的收敛系

统,因此选取相应的 LMI 区域 D_2 位于 D_1 之左侧(见图 1). 由于被控对象是一个二阶系统,因此对应的阻尼系数 ζ (或超调量)和调整时间 T_s 满足: $\zeta > 0.995\%$ 或 $\%OS < 2.55 \times 10^{-12}\%$, $T_s < 2.67$ s. 由此可以分别获得矩阵 L, M 和 L^*, M^* [10]. 用 Matlab 中的 LMI 工具箱,解出 $K_1 = [199.5309 \quad 56.1785]$, $K_2 = [4737.9 \quad 1735.9]$, $L_1 = [-34.1521 \quad -285.4554]^T$, $L_2 = [-34.1517 \quad -277.5118]^T$,

$$\begin{cases} Q = \begin{pmatrix} 0.5448 & -1.6829 \\ -1.6829 & 6.9330 \end{pmatrix}, \\ P = \begin{pmatrix} 3.2606 \times 10^4 & -0.1848 \times 10^4 \\ -0.1848 \times 10^4 & 0.0118 \times 10^4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (24)$$

容易验证 Q 和 P 是正定对称矩阵. 于是由此设计的模糊控制器和模糊观测器使整个闭环系统全局渐近稳定.

在实验中分别选择了 $m = m_0 - \Delta m$, $m = m_0$ 及 $m = m_0 + \Delta m$, 而初始条件为 $x_1 = 50^\circ$, $x_2 = 0$. 实验结果(见图 2)说明整个闭环系统是全局渐近稳定的,并满足相应的超调量和调整时间,并且三种情况下系统的响应差别很小,这说明系统的响应对摆杆质量的变化具有鲁棒性.

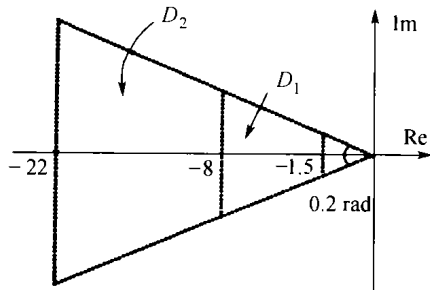


图 1 极点配置区域 D_1 和 D_2

Fig. 1 Pole placement constraint regions: D_1 and D_2

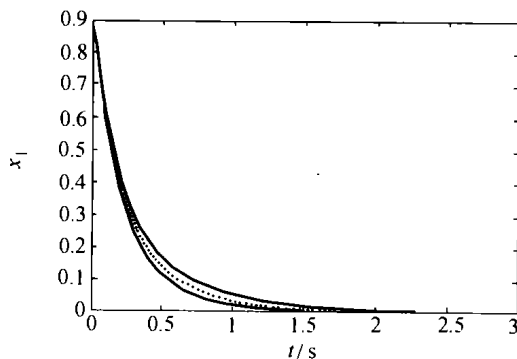


图 2 状态 x_1 的响应曲线

Fig. 2 Response of the state x_1

5 结论(Conclusion)

针对一类利用 T-S 模糊模型近似描述的不确定

非线性系统,给出了一种具有鲁棒极点配置功能的模糊控制器和模糊观测器的设计方法. 获得了使系统全局渐近稳定并满足希望的动态性能的充分条件,并将这些条件转化为标准的 LMI 问题. 这种设计方法的优势是在系统的某些参数不确定的情况下,可以根据要求预先设定系统的动态性能(如超调量,调整时间等).

参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 - 132.
- [2] TANAKA K, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 - 156.
- [3] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M. An analytical framework of fuzzy modeling and design issues [C] // *Proc of American Control Conference*. New Jersey: IEEE Piscataway Press, 1995: 2272 - 2276.
- [4] JOH J, HONG S K, NAM Y, et al. On the systematic design of Takagi-Sugeno fuzzy control Systems [C] // *Proc of Int ICSC Symp. On Engineering of Intelligent Systems*. Canada: ICSC Academic Press, 1998: 113 - 119.
- [5] JOH J, LANGARI R, CHUANG W J. A new design method for continuous Takagi-Sugeno fuzzy controller with pole placement constraints: an LMI approach [C] // *Proc of IEEE Int Conf on Systems, Man, and Cybernetics*. New Jersey: IEEE Piscataway Press, 1997: 2969 - 2974.
- [6] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [7] CHILALI M, GAHINET P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI Approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 - 367.
- [8] GAHINET P, NEMIROVSKI A, LAUB A J, et al. *LMI Control Toolbox* [M]. New Jersey: Pentice-hall, 1995.
- [9] KIM K, JOH J, LANGARI R, et al. LMI-based design of Takagi-Sugeno fuzzy controllers for nonlinear dynamic systems using fuzzy estimators [J]. *Int J of Fuzzy System*, 1999, 1(2): 133 - 144.
- [10] CHILALI M, GAHINET P, APKARIAN P. Robust pole placement in LMI regions [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(12): 2257 - 2270.
- [11] TSENG C S, CHEN B S, UANG H J. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 2001, 9(3): 381 - 392.
- [12] LEE K R, JEUNG E T. Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: an LMI approach [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 120(2): 123 - 134.
- [13] FRADKOV A L, YAKUBOVICKH V A. The S-procedure and duality relations in nonconvex problems of quadratic programming [J]. *Vestnik Leningrad Univ Math*, 1979, 6(1): 101 - 109.

附录(Appendix):

定理1的证明

记 $\bar{x} = [x \quad \dot{x}]^T$, 考虑 Lyapunov 函数 $V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{P} \bar{x}$, 这里 $\bar{P} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$. 沿式(11)的所有非零轨迹 $\bar{x}(t)$, 有 $\frac{d}{dt}V(\bar{x}(t)) < 0$ 成立当且仅当: 对于任意满足不等式

$$p^T(t)p(t) \leq \bar{x}^T(t) \begin{pmatrix} C_q^T \\ D_q^T \end{pmatrix} (C_q \quad D_q) \bar{x}(t) \quad (A1)$$

的 $p(t)$ 及 $\bar{x}(t) (\neq 0)$, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \dot{\bar{x}}^T(t) \bar{P} \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) \bar{P} \dot{\bar{x}}(t) = \\ & (\bar{x}^T(t) \quad p^T(t)) \cdot \\ & \begin{pmatrix} \bar{A}^T Q^{-1} + Q^{-1} \bar{A} & Q^{-1} \bar{B} & Q^{-1} B_p \\ \bar{B}^T Q^{-1} & \bar{C}^T P + P \bar{C} & -P B_p \\ B_p^T Q^{-1} & -B_p^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ p(t) \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

利用 S-过程^[13], 上述条件等价于: 存在实数 $\lambda > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \bar{A}^T Q^{-1} + Q^{-1} \bar{A} & Q^{-1} \bar{B} & Q^{-1} B_p \\ \bar{B}^T Q^{-1} & \bar{C}^T P + P \bar{C} & -P B_p \\ B_p^T Q^{-1} & -B_p^T P & -\lambda I \end{pmatrix} + \\ & \lambda \begin{pmatrix} C_q^T \\ D_q^T \\ 0 \end{pmatrix} I (C_q \quad D_q \quad 0) < 0. \end{aligned} \quad (A2)$$

利用 Schur 补^[6], 上述条件又等价于: 存在实数 $\lambda > 0$ 使得如下不等式成立

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T Q^{-1} + Q^{-1} \bar{A} & Q^{-1} \bar{B} & Q^{-1} B_p & C_q^T \\ \bar{B}^T Q^{-1} & \bar{C}^T P + P \bar{C} & -P B_p & D_q^T \\ B_p^T Q^{-1} & -B_p^T P & -\lambda I & 0 \\ C_q & D_q & 0 & -\frac{1}{\lambda} I \end{pmatrix} < 0. \quad (A3)$$

上述不等式两边分别左乘和右乘一个对角分块矩阵 $\text{diag}(Q, I, I, I)$ 便可得定理中的不等式. 定理得证.

定理3的证明 由于每一个局部闭环系统(12)鲁棒 D_1 -稳定的充分条件是存在一个共同的正定对称矩阵 $Q > 0$ 及矩阵 $Y_i (i = 1, 2, \dots, r)$, 对于 $\forall F \in \Omega$ 及 $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 有

$$\begin{aligned} & 0 > L \otimes Q + M \otimes ((\bar{A}_i + HFC_{q_i})Q) + \\ & M^T \otimes (Q(\bar{A}_i + HFC_{q_i})^T) = \\ & M_D(\bar{A}_i, Q) + M \otimes (HFC_{q_i}Q) + \\ & M^T \otimes (QC_{q_i}^T F^T H^T). \end{aligned} \quad (A4)$$

利用矩阵直积的运算, 将上述不等式整理得

$$\begin{aligned} & M_D(\bar{A}_i, Q) + (M_1^T \otimes H)(I \otimes F)(M_2 \otimes (C_{q_i}Q)) + \\ & (M_2^T \otimes (C_{q_i}Q)^T)(I \otimes F^T)(M_1 \otimes H) < 0. \end{aligned} \quad (A5)$$

上述不等式成立等价于: 对于任意的非零向量 φ 和任意的矩阵 $F \in \Omega$ 有

$$\begin{aligned} & \varphi^T M_D(\bar{A}_i, Q) \varphi + 2\varphi^T (M_2^T \otimes (C_{q_i}Q)^T) \cdot \\ & (I \otimes F^T)(M_1 \otimes H) \varphi < 0. \end{aligned} \quad (A6)$$

另外记 $\psi = (I \otimes F^T)(M_1 \otimes H) \varphi$, 并注意到 $F^T F \leq I$, 则有

$$\begin{aligned} & \psi^T \psi \leq \varphi^T (M_1^T \otimes H)(M_1 \otimes H^T) \varphi = \\ & \varphi^T (M_1^T M_1 \otimes HH^T) \varphi. \end{aligned}$$

这样式(28)成立的充分条件是: 对于满足不等式 $\psi^T \psi \leq \varphi^T (M_1^T M_1 \otimes HH^T) \varphi$ 的所有 φ, ψ 有

$$\varphi^T M_D(\bar{A}_i, Q) \varphi + 2\varphi^T (M_2^T \otimes (C_{q_i}Q)^T) \psi < 0 \quad (A7)$$

成立, 即当

$$(\varphi^T \quad \psi^T) \begin{pmatrix} (M_1^T M_1) \otimes (HH^T) & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \geq 0 \quad (A8)$$

时, 有

$$(\varphi^T \quad \psi^T) \begin{pmatrix} M_D(\bar{A}_i, Q) & M_2^T \otimes (C_{q_i}Q)^T \\ M_2 \otimes (C_{q_i}Q) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} < 0. \quad (A9)$$

利用 S-过程, 上述条件可转换为定理中的不等式, 于是定理3得证.

作者简介:

苗志宏 (1964—), 男, 2001年毕业于北京师范大学数学系获理学博士学位, 现任中国人民武装警察部队学院副教授, 研究领域为模糊数学与人工智能, E-mail: miaozh@21cn.com;

李洪兴 (1953—), 男, 北京师范大学复杂系统智能控制实验室主任、教授、博士生导师, 研究领域为模糊系统与智能控制. E-mail: lhxqx2bnu.edu.cn