

## 一类非线性系统的输出反馈半局鲁棒镇定

王兴平<sup>1</sup>, 程兆林<sup>2</sup>, 张宪福<sup>2</sup>

(1. 海军航空工程学院 应用数学研究所, 山东 烟台 264001; 2. 山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

**摘要:** 从半局镇定角度研究了一类非线性系统的输出反馈镇定问题, 这类系统具有较强的非线性增长特征. 利用高增益观测器, 把非分离设计原则应用于输出反馈半局镇定控制器设计. 在不需系统具有一个一致完全可观状态反馈控制器情况下, 给出了输出反馈控制器的设计方法. 对任意给定紧子集, 所设计的反馈控制器使闭环系统是渐近稳定的且吸引域包含指定的紧子集. 最后的仿真实例说明了设计方法的有效性.

**关键词:** 半局鲁棒镇定; 非线性增长; 动态输出反馈

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Semiglobal robust stabilization for a class of nonlinear systems with dynamic output feedback

WANG Xing-ping<sup>1</sup>, CHENG Zhao-lin<sup>2</sup>, ZHANG Xian-fu<sup>2</sup>

(1. Institute of Applied Mathematics, Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai Shandong 264001 China;

2. School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan Shandong 250100 China)

**Abstract:** The problem of semiglobal robust stabilization via output feedback for a class of nonlinear systems with nonlinear growth is addressed. Based on high-gain observer, the nonseparation principle was applied to the design of semiglobally stabilizing output feedback. A procedure for explicitly constructing dynamic output controllers was presented without assuming that the systems had a uniformly completely observable state feedback. For any given compact, the resulting output compensators make the closed-loop system asymptotically stable at equilibrium origin with the basin of attraction containing the given compact set. Finally, a simulation showed the effectiveness of the result.

**Key words:** semiglobal robust stabilization; nonlinear growth; dynamic output feedback

### 1 引言 (Introduction)

在只有系统输出是可量测的条件下如何实现控制系统的镇定是控制理论一个重要的问题. 在线性系统中, 这个问题可以利用分离设计原则解决, 即可对可观可控的线性系统, 分别设计状态反馈控制器和状态观测器就可以获得系统的输出反馈控制器. 但在非线性系统, 由于分离原则不再成立, 利用输出反馈实现系统的镇定问题就是一个非常困难问题. 文献[1]中指出了一个简单的例子,

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_2^3 + u,$$

$$y = x_1.$$

这个系统可经变换  $u = -x_2^3 + v$  完全线性化, 并且线性化后的线性系统是能控且可观的, 但是这个简单的系统却不存在连续的有限维的动态输出反馈实

现系统的镇定. 近 10 年来, 非线性系统的输出反馈镇定问题得到了广泛的关注, 如文献[1~6]. 在这些文献中可以看到两个思路. 一个是对系统的增长条件做出限制然后用非分离设计构造输出反馈镇定系统, 如文献[2,3]限制系统方程关于不可量测状态的增长是线性的. 另一个就是从半局镇定角度研究非线性系统的输出反馈镇定问题, 建立非线性系统的分离原则. 半局镇定就是, 对任意给定的紧子集, 设计控制器使闭环系统是渐近稳定的且收敛域包含指定的紧子集. 文献[1]在半局镇定的意义下研究了一般非线性系统的分离设计问题, 证明了如果系统存在状态反馈镇定系统且状态反馈本身具有一致完全可观性 (uniform complete observability), 则对任意给定的状态空间的紧子集, 可以建立分离原则构造输出反馈实现系统的半局镇定. 但是如何判断一个

系统的状态反馈是一致完全可观的却是一个困难的问题.

受文献[1,2]的启发,本文用半局镇定研究一类非线性系统的输出反馈镇定问题,所用的方法综合了前面提到的两种方法,即半局镇定意义下的非分离设计(nonseparation principle).在牺牲全局镇定的前提下,放宽了对非线性系统增长条件的限制,允许增长条件关于不可量测状态是非线性的.如果考虑到一个系统的初始状态总是有界的,我们的结论也是有实际意义的.

## 2 预备知识及问题描述(Preliminaries and problem formulation)

本文考虑如下形式的系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(t, x, u), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(t, x, u), \\ \dot{x}_n = u + f_n(t, x, u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

这里  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  是系统状态变量,  $u \in \mathbb{R}$  是控制输入,  $y \in \mathbb{R}$  是系统输出,  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  均为连续函数并且满足如下假设:

**假设 1** 存在非负连续函数  $q_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 使得对任意实数  $L \geq 1$ , 成立

$$\begin{aligned} & |L^{-(i-1)} f_i(t, \xi_1, L\xi_2, \dots, L^{n-1}\xi_n, u)| \leq \\ & (|\xi_1| + \dots + |\xi_n|) q_i(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned} \quad (2)$$

**注 1** 下面具体给出一个假设 1 成立的充分条件:对任意  $1 \leq i \leq n$ , 存在连续非负函数  $q(x_1)$  使得

$$|f_i(t, x, u)| \leq q(x_1)(|x_1| + |x_2|^{i-1} + \dots + |x_{i-1}|^{\frac{i-1}{i-2}} + |x_i|). \quad (3)$$

验证如下:当  $L \geq 1$  时,

$$\begin{aligned} & |L^{-(i-1)} f_i(t, \xi_1, L\xi_2, \dots, L^{n-1}\xi_n, u)| \leq \\ & L^{-(i-1)} q(\xi_1)(|\xi_1| + |L\xi_2|^{i-1} + \dots + |L^{i-2}\xi_{i-1}|^{\frac{i-1}{i-2}} + |L^{i-1}\xi_i|) \leq \\ & q(\xi_1)(|\xi_1| + \dots + |\xi_i|)(1 + |\xi_2|^{i-2} + \dots + |\xi_{i-1}|^{\frac{1}{i-2}}). \end{aligned}$$

假设 1 成立.在式(3)中可以看到,这里对系统(1)提出的增长条件(growth conditions)关于状态变量可以是非线性的.

**注 2** 文献[2]研究了系统(1)的输出全局镇定的问题,提出的条件为:存在正数  $c$  使得对任意  $i = 1, \dots, n$  都有

$$|f_i(t, x, u)| \leq c(|x_1| + \dots + |x_i|). \quad (4)$$

文献[3]研究了与系统(1)类似的具有下三角结构的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1, u), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, u), \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (5)$$

的输出反馈全局镇定问题,所提出的条件是

$$|f_i(x_1, x_2 + \xi_2, \dots, x_i + \xi_i, u) - f_i(x_1, x_2, \dots, x_i, u)| \leq \gamma(x_1)(|\xi_2| + \dots + |\xi_i|). \quad (6)$$

对系统(1),本文研究其输出反馈半局镇定的问题.问题叙述如下:对任意给定的  $K_1 > 0$ , 寻找动态输出反馈控制律

$$\dot{\xi} = \vartheta(\xi, y), \quad u = \bar{\omega}(\xi, y), \quad (7)$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$ , 满足  $\vartheta(0, 0) = 0, \bar{\omega}(0, 0) = 0$ , 使得由式(1) ~ (7) 构成的闭环系统满足:存在  $K_2 > 0$ , 闭环系统在平衡点  $(x_1, \dots, x_n, \xi) = 0$  处是渐近稳定的并且吸引域包含

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq K_1\} \times \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq K_2\}.$$

这一问题的提出主要是建立在文献[1,2]的基础上,本文的结论是,在假设 1 的条件下,上面的问题是有解的.

为解决本文的问题给出两个引理.

**引理 1** 考虑如下的系统

$$\dot{z} = F(t, z). \quad (8)$$

其中  $z \in \mathbb{R}^n$ .  $F$  是连续函数且  $F(t, 0) = 0$ . 如果存在一个光滑的正定径向无界函数  $V(z)$ ,  $K$  类函数  $\alpha$  和正实数  $\lambda$ , 使得对任意满足  $V(z) \leq \lambda$  的  $z$  成立

$$\frac{\partial V}{\partial z} F(t, z) \leq -\alpha(|z|), \quad (9)$$

则系统在平衡点  $z = 0$  是渐近稳定的并且吸引域包含  $\{z : V(z) \leq \lambda\}$ .

证明参见文献[7].

**引理 2** 考虑系统(8), 假设存在一个非奇异的线性变换  $\bar{z} = Tz$  把系统(8)变为如下形式:

$$\dot{\bar{z}} = \bar{F}(t, \bar{z}). \quad (10)$$

如果存在正实数  $\bar{\alpha}, \lambda$  和一个光滑的正定径向无界函数  $\bar{V}(\bar{z})$ , 使得

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \bar{F}(t, \bar{z}) \leq -\bar{\alpha} |\bar{z}|^2 \quad (11)$$

对所有满足  $\bar{V}(\bar{z}) \leq \lambda$  的  $\bar{z}$  成立, 则存在正实数  $\alpha$  和一个光滑的正定径向无界函数  $V(z)$ , 使得

$$\frac{\partial V}{\partial z} F(t, z) \leq -\alpha |z|^2 \quad (12)$$

对所有满足  $V(z) \leq \lambda$  的  $z$  成立.

**证** 经  $\bar{z} = Tz$  变换后有

$$\bar{F}(t, \bar{z}) = TF(t, T^{-1}\bar{z}),$$

故

$$\bar{F}(t, Tz) = TF(t, z).$$

利用  $\bar{V}(\bar{z})$  构造

$$V(z) = \bar{V}(Tz),$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} F(t, z) &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \bigg|_{\bar{z}=Tz} TF(t, z) = \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \bigg|_{\bar{z}=Tz} \bar{F}(t, Tz) &= \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \bar{F}(t, \bar{z}) \bigg|_{\bar{z}=Tz}. \end{aligned}$$

当  $V(z) = \bar{V}(Tz) \leq \lambda$  时, 由已知条件(11)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} F(t, z) &= \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \bar{F}(t, \bar{z}) \bigg|_{\bar{z}=Tz} &\leq -\bar{\alpha} |Tz|^2 = -\bar{\alpha} z^T T^T Tz. \end{aligned}$$

设  $T^T T$  的最小特征根为  $\lambda_1$ , 使得

$$\frac{\partial V}{\partial z} F(z) \leq -\alpha |z|^2.$$

其中  $\alpha = \bar{\alpha}\lambda_1$ . 证毕.

### 3 主要结论(Main results)

建立系统(1)的动态补偿器首先要构造系统状态变量观测器, 然后基于观测器和系统(1)设计最终的补偿器. 这里不同于线性系统补偿器设计中的分离原则, 即分别设计系统的状态反馈控制器和观测器, 然后建立系统的动态补偿器, 而是直接基于观测器设计控制器. 建立系统(1)的状态  $(x_1, \dots, x_n)^T$  的观测器:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \dot{\bar{x}}_2 + La_1(y - \bar{x}_1), \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = \dot{\bar{x}}_n + L^{n-1}a_{n-1}(y - \bar{x}_1), \\ \dot{\bar{x}}_n = u + L^na_n(y - \bar{x}_1). \end{cases} \quad (13)$$

这里  $L \geq 1$  是待定正实数,  $a_1, \dots, a_n$  是一个 Hurwitz 多项式的系数, 即使得多项式

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

的根全部具有负实部.

**定理 3** 假设系统(1)满足假设 1, 则对任意给定正实数  $K_1, K_2 > 0$ , 存在实数  $L_1^*, \dots, L_n^*$ , 反馈控制器

$$u = -(L_1^* \bar{x}_1 + L_2^* \bar{x}_2 + \dots + L_n^* \bar{x}_n) \quad (14)$$

使得由式(1), (13)和(14)组成的闭环系统在平衡点  $(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$  是渐近稳定的, 其吸引域包含  $\mathbb{R}^{n+n}$  中的紧子集  $\{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq K_1\} \times \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n: |\bar{x}| \leq K_2\}$ .

**证** 对系统(1)~(13)进行非奇异的线性变换

$$e_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{L^{i-1}}, \bar{\eta}_i = \frac{\bar{x}_i}{L^{i-1}}, i = 1, \dots, n. \quad (15)$$

这里  $L$  与式(13)中的  $L$  相同. 在新的坐标系下系统表示为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = Le_2 - La_1e_1 + \tilde{f}_1, \\ \dot{e}_2 = Le_3 - La_2e_1 + \tilde{f}_2, \\ \vdots \\ \dot{e}_n = -La_ne_1 + \tilde{f}_n, \\ \dot{\bar{\eta}}_1 = L\bar{\eta}_2 + La_1e_1, \\ \dot{\bar{\eta}}_2 = L\bar{\eta}_3 + La_2e_1, \\ \vdots \\ \dot{\bar{\eta}}_n = \frac{1}{L^{n-1}}u + La_ne_1, \\ y = e_1 + \bar{\eta}_1. \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\tilde{f}_i =$$

$$L^{-(i-1)}f_i(t, e_1 + \bar{\eta}_1, L(e_2 + \bar{\eta}_2), \dots, L^{n-1}(e_n + \bar{\eta}_n), u).$$

选取  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_1$  是一个 Hurwitz 多项式的系数, 即使得多项式

$$q(\lambda) = \lambda^n + b_n\lambda^{n-1} + \dots + b_2\lambda + b_1$$

的根全部具有负的实部, 选取如下形式的反馈控制器

$$u^* = -L^n(b_1\bar{\eta}_1 + b_2\bar{\eta}_2 + \dots + b_n\bar{\eta}_n). \quad (17)$$

引入记号

$$\zeta = (e_1, \dots, e_n, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)^T, \quad (18)$$

则闭环系统(16), (17)表示为

$$\dot{\zeta} = LA_0\zeta + F(t, L, \zeta, u^*)^T. \quad (19)$$

这里

$$F(t, L, \zeta, u^*) = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n, 0, \dots, 0),$$

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & & & \\ \vdots & I & & \\ -a_{r-1} & & & \\ -a_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \\ -b_1 & -b_2 & \dots & -b_r \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}.$$

由  $a_1, \dots, a_{r-1}, a_r, b_1, \dots, b_{r-1}, b_r$  选取知  $A_0$  为稳定阵.

由假设 1

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_i| &\leq (|e_1| + \dots + |e_n| + |\bar{\eta}_1| + \dots + |\bar{\eta}_n|) \cdot \\ q_i(e_1 + \bar{\eta}_1, \dots, e_n + \bar{\eta}_n) &\leq \\ |\zeta| \bar{q}_i(\zeta). \end{aligned}$$

这里  $\bar{q}_i(\zeta)$  为一适当的非负连续函数. 于是存在非负连续函数  $R(\zeta)$ , 使得对任意  $\zeta \in \Xi^{2n}$  和任意  $L \geq 1$  成立

$$|F(t, L, \zeta, u^*)| \leq |\zeta| R(\zeta).$$

定义  $\Xi^{n+n}$  上的紧子集

$$\Lambda = \{x_1 - x_2 : x_1, x_2 \in$$

$$\{(x_1^T, x_2^T)^T : x_1 \in \Xi^n, x_2 \in \Xi^n, |x_1| \leq K, |x_2| \leq K\}.$$

其中  $K = \max\{K_1, K_2\}$ . 由于  $A_0$  是稳定阵, 所以存在正定阵  $P_0$ , 使得

$$A_0^T P_0 + P_0 A_0 = -I.$$

设  $P_0$  最大特征值分别为  $\lambda_1$ , 记

$$\lambda = \max\{\lambda_1 \zeta^T \zeta : \zeta \in \Lambda\},$$

构造

$$\bar{W}(\zeta) = \zeta^T P_0 \zeta, \quad (20)$$

于是对任意  $\zeta \in \Lambda$  都有

$$\bar{W}(\zeta) \leq \zeta^T P_0 \zeta \leq \lambda.$$

在紧集  $\{\zeta : \bar{W}(\zeta) \leq \lambda\}$  上, 对函数  $R(\zeta)$ , 由其连续性知, 存在  $C > 0$ , 使对满足  $W(\zeta) \leq \lambda$  的  $\zeta$ , 都有

$$R(\zeta) \leq C.$$

计算  $W(\zeta)$  沿系统(19)解的方向导数

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{\partial \bar{W}}{\partial \zeta} (L A_0 \zeta + F(t, L, \zeta, u^*)) \leq \\ &- L \|\zeta\|^2 + 2 \|P_0\| |F(t, L, \zeta, u^*)| |\zeta| R(\zeta) \leq \\ &- L \|\zeta\|^2 + 2C \|P_0\| |\zeta|^2. \end{aligned}$$

此处  $\|\cdot\|$  表示矩阵的 Frobenius 范数. 选取

$$L_* = 2C \|P_0\| + 1, \quad (21)$$

可得对满足  $W(\zeta) \leq \lambda$  的  $\zeta$  有

$$\dot{W} \leq -|\zeta|^2.$$

现在回到原坐标系下研究对由(1)和(13)组成的复合系统, 取部分状态反馈

$$\begin{aligned} u &= -L_*^n (b_1 \bar{x}_1 + b_2 L_*^{-1} \bar{x}_2 + \cdots b_n L_*^{-(n-1)} \bar{x}_n) = \\ &- (b_1 L_*^n \bar{x}_1 + \cdots + b_n L_* \bar{x}_n), \end{aligned} \quad (22)$$

则由式(1), (13)和(22)组成的闭环系统经非奇异线性变换(15)可变为系统(19). 由引理2及证明, 取

$$W(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) =$$

$$\bar{W}\left(x_1 - \bar{x}_1, \cdots, \frac{x_n - \bar{x}_n}{L_*^{n-1}}, \bar{x}_1, \cdots, \frac{\bar{x}_n}{L_*^{n-1}}\right), \quad (23)$$

则  $W$  沿由式(1), (13)和(22)组成的闭环系统的解的方向导数  $\dot{W}$  对任意满足

$$W(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \leq \lambda$$

的  $(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T$  成立

$$\dot{W} \leq -\alpha |(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T|^2, \quad (24)$$

其中  $\alpha$  为某一正实数.

下证

$$\{(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T : W(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \leq \lambda\} \supseteq$$

$$\{(x_1, \cdots, x_n)^T \in \Xi^n : |(x_1, \cdots, x_n)^T| \leq K_1\} \times$$

$$\{(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T \in \Xi^n : |(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T| \leq K_2\}. \quad (25)$$

由  $\bar{W}$  和  $W$  的定义式(20)及(23), 可得

$$W(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) =$$

$$\bar{W}\left(x_1 - \bar{x}_1, \cdots, \frac{x_n - \bar{x}_n}{L_*^{n-1}}, \bar{x}_1, \cdots, \frac{\bar{x}_n}{L_*^{n-1}}\right) \leq$$

$$\lambda_1 \left[ (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \cdots + \left( \frac{x_n - \bar{x}_n}{L_*^{n-1}} \right)^2 + \bar{x}_1^2 + \cdots + \left( \frac{\bar{x}_n}{L_*^{n-1}} \right)^2 \right] \leq$$

$$\lambda_1 [(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \cdots + (x_n - \bar{x}_n)^2 + \bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_n^2].$$

对任意满足  $|(x_1, \cdots, x_n)^T| \leq K_1$  的  $(x_1, \cdots, x_n)^T$  和任意满足  $|(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T| \leq K_2$  的  $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T$ , 都有

$$(x_1, \cdots, x_n, \underbrace{0, \cdots, 0}_n)^T \in$$

$$\{(x_1^T, x_2^T)^T : x_1 \in \Xi^n, x_2 \in \Xi^n, |x_1| \leq K, |x_2| \leq K\} \cdot$$

$$(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n, -\bar{x}_1, \cdots, -\bar{x}_n)^T \in$$

$$\{(x_1^T, x_2^T)^T : x_1 \in \Xi^n, x_2 \in \Xi^n, |x_1| \leq K, |x_2| \leq K\},$$

所以

$$(x_1 - \bar{x}_1, \cdots, x_n - \bar{x}_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)^T \in \Lambda.$$

于是利用  $\lambda$  定义即得

$$W(x_1, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \leq$$

$$\lambda_1 [(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \cdots + (x_n - \bar{x}_n)^2 + \bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_n^2] \leq \lambda,$$

即式(25)成立. 利用引理1, 本定理得证.

**注3** 最终得到补偿器的形式为

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + L_* a_1 (y - \bar{x}_1),$$

$\vdots$

$$\dot{\bar{x}}_{n-1} = \bar{x}_n + L_*^{n-1} a_{n-1} (y - \bar{x}_1),$$

$$\dot{\bar{x}}_n = - (b_1 L_*^n \bar{x}_1 + b_2 L_*^{n-1} \bar{x}_2 + \cdots + b_n L_* \bar{x}_n) +$$

$$L_*^n a_n (y - \bar{x}_1),$$

$$u = - (b_1 L_*^n \bar{x}_1 + b_2 L_*^{n-1} \bar{x}_2 + \cdots + b_n L_* \bar{x}_n). \quad (26)$$

这是一个高增益的线性补偿器. 这个补偿器具有鲁棒性, 因为在设计过程中只应用了系统的增长条件. 在证明中我们可以看到反馈的增益的大小不仅依赖于事先指定的紧子集, 也依赖于系统的非线性程度. 如果系统增长条件(3)中变量的幂次较大, 可能会导致增益过高而产生严重的峰现象 (peaking phenomenon) [1, 6, 8] 影响控制器的实用性.

下面给出一个具体的推论, 这个结论与文献[2, 3]中的结论形成明显的对比.

**推论 4** 假设系统(1)满足条件:对任意  $1 \leq i \leq n$ , 存在连续的非负函数  $q_i^j(x_1), 1 \leq j \leq i$ , 使得  $|f_i(t, x, u)| \leq q(x_1)(|x_1| + |x_2|^{i-1} + \dots + |x_{i-1}|^{\frac{i-1}{i-2}} + |x_i|)$ ,

(27)

则对任意给定正实数  $K_1, K_2 > 0$ , 存在动态输出反馈(26), 使得由式(1), (26) 组成的闭环系统在平衡点  $(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0$  是渐近稳定的, 且其吸引域包含  $\mathbb{R}^{n+n}$  中的紧子集  $\{x_1 \in \mathbb{R}^n: |x_1| \leq K_1\} \times \{x_2 \in \mathbb{R}^n: |x_2| \leq K_2\}$ .

#### 4 算例与仿真(Examples and simulation)

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \sin x_2^2, \\ \dot{x}_2 = u + x_1^2 + x_1 + x_2, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (28)$$

系统(28)不具有文献[3]所研究的下三角形形式(5), 也不满足文献[2]的条件(4), 但可以验证

$$\begin{aligned} |f_1(t, x, u)| &= |x_1 \sin x_2^2| \leq |x_1| |f_2(t, x, u)| \leq \\ &(|x_1| + 1)(|x_1| + |x_2|), \end{aligned} \quad (29)$$

即系统(28)满足条件(27).

取

$$a_1 = 2, a_2 = 2, b_1 = 2, b_2 = 3,$$

利用定理 3 证明步骤可得系统

$$\dot{\zeta} = LA_0\zeta + F(L, \zeta), \quad (30)$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

为了获得较小的  $L_*$ , 预设  $L \geq L_0$ , 估计  $F(L, \zeta)$  可得

$$|F(L, \zeta)| \leq 2|\zeta|(1 + L_0^{-1}|e_1 + \bar{\eta}_1| + L_0^{-1}),$$

故可取  $R(\zeta) = 2(1 + L_0^{-1}|e_1 + \bar{\eta}_1| + L_0^{-1})$ .

Lyapunov 方程

$$PA_0 + A_0^T P = -I$$

的解为

$$P_0 = \begin{pmatrix} 31/20 & -1/2 & 3/5 & 1/5 \\ -1/2 & 91/40 & 7/10 & 3/10 \\ 3/5 & 7/10 & 5/4 & 1/4 \\ 1/5 & 3/10 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix},$$

$P_0$  的范数为  $\|P_0\| = \sqrt{18861}/40$ ,  $P_0$  的最大特征

根为  $\lambda_1 = 2.71$ .

给定  $K_1 = K_2 = K$ , 构造紧子集

$$\Lambda = \{x_1 - x_2: x_1, x_2 \in \{x_1 \in \mathbb{R}^2: |x_1| \leq K\} \times \{x_2 \in \mathbb{R}^2: |x_2| \leq K\}\}.$$

在  $\Lambda$  上,  $\zeta^T P_0 \zeta$  的最大值  $\lambda \leq 8\lambda_1 K^2$ , 在  $\{\zeta: \zeta^T P_0 \zeta \leq \lambda\}$  上  $R(\zeta)$  的上界为

$$C = 2(1 + L_0^{-1}\sqrt{8}K + L_0^{-1}).$$

综上, 由式(21)得  $L_* = 2\|P_0\|C + 1$ , 最后得到系统(28)的补偿器为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + 2L_*(y - \bar{x}_1), \\ \dot{\bar{x}}_2 = -2L_*^2 \bar{x}_1 - 3L_* \bar{x}_2 + 2L_*^2 (y - \bar{x}_1), \\ u = -2L_*^2 \bar{x}_1 - 3L_* \bar{x}_2. \end{cases} \quad (31)$$

选取设计参数  $K = 5, L_0 = 20$ , 计算得  $L_* = 25.13$ . 选取系统初值

$$x_1^0 = 5, x_2^0 = 2, \bar{x}_1^0 = 3, \bar{x}_2^0 = 2,$$

仿真结果如图 1, 图 2 所示, 图 1 是变量  $x_1$  和  $\bar{x}_1$  的轨线, 图 2 是变量  $x_2$  和  $\bar{x}_2$  的轨线.

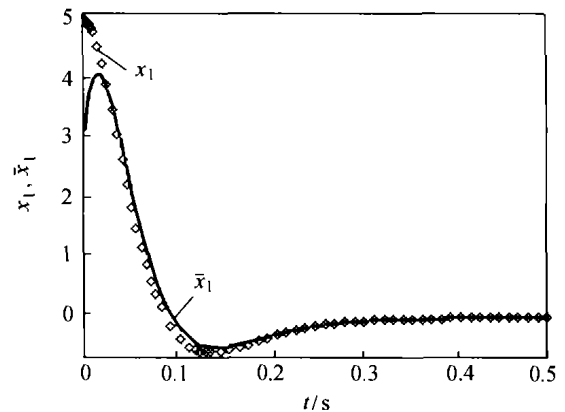


图 1 状态  $x_1$  和  $\bar{x}_1$  的轨迹

Fig. 1 Trajectories of  $x_1$  and  $\bar{x}_1$

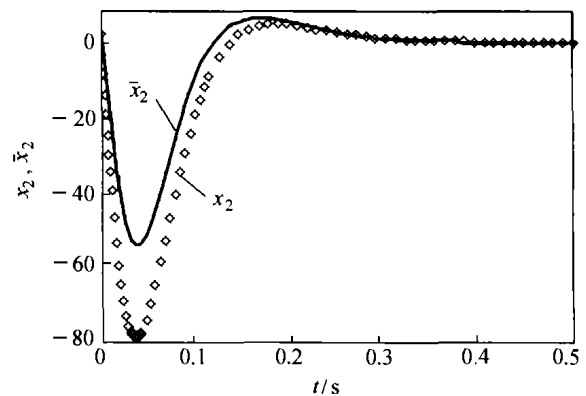


图 2 状态  $x_2$  和  $\bar{x}_2$  的轨迹

Fig. 2 Trajectories of  $x_2$  and  $\bar{x}_2$

**注 4** 结合仿真实例和定理 3 的证明, 有两个现象需

要注意,一个是闭环系统(28)和(31)的实际吸引域比事先指定的区域要大,但是从指定的区域出发的状态,不仅是渐近到原点,而且整个解一直保持在区域  $W(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \lambda$  中,这里

$$\bar{W}(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \zeta^T P_0 \zeta,$$

$$\zeta = (x_1 - \bar{x}_1, L_*^{-1}(x_2 - \bar{x}_2), \bar{x}_1, L_*^{-1}\bar{x}_2)^T.$$

另一个是,补偿器(31)是一个高增益的反馈控制器,高增益反馈的一个本质特性就是“峰”现象(peaking phenomenon)<sup>[1,7]</sup>,即系统状态会有一个瞬间的“超调”,然后快速趋于0,这在图2表现的非常显著,但系统状态会一直保持在状态空间的紧子集  $\{(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2): W(x_1, x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \lambda\}$  中,不会在有限时间内逸出。

## 5 结语(Conclusions)

在半局意义下,本文研究了一类非线性系统的输出反馈镇定问题.对任意给定的状态空间的紧子集,我们利用非分离设计方法构造出了动态输出反馈控制器,使得闭环系统是渐近稳定的且吸引域包含指定的紧子集.由于本文所考虑的非线性系统允许系统的增长条件关于不可量测状态变量是非线性的,本文的结论可以面向更一般的非线性系统。

## 参考文献(References):

- [1] TEEL A, PRALY L. Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback [J]. *SIAM J of Control Optimization*, 1995, 33 (5): 1443 - 1488.

- [2] LIN W, QIAN C J. Output feedback control of a class of a nonseparation principle paradigm [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1710 - 1715.
- [3] PRALY L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2003, 48(6): 1103 - 1108.
- [4] JIANG Z P, ARCAK M. Robust global stabilization with input unmodeled dynamics: an ISS small gain approach [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1411 - 1415.
- [5] ATASSI A N, KHALIL H K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(9): 1672 - 1687.
- [6] ESFANDIARI F, KHALIL H K. Output feedback stabilization of fully linearizable systems [J]. *Int J Control*, 1992, 56(5): 1007 - 1037.
- [7] 黄琳. 稳定性理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1992. (HUANG Lin. *Stability Theory* [M]. Beijing: Peking University Press, 1992.)
- [8] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. *Constructive Nonlinear Control* [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

## 作者简介:

王兴平 (1962 —), 男, 海军航空工程学院教员, 博士, 研究方向: 非线性控制系统稳定性, 非线性大系统控制, E-mail: xingping-wang2003@yahoo.com.cn;

程兆林 (1939 —), 男, 山东大学数学与系统科学学院教授, 博士生导师, 研究方向为多变量控制系统的理论与应用、奇异系统、时滞系统和非线性系统等;

张宪福 (1968 —), 男, 山东建筑工程学院讲师, 现在山东大学数学与系统科学学院攻读博士学位, 主要从事非线性系统和时滞系统的研究, E-mail: xianfu\_sjg@yahoo.com.cn.

## 中国自动化学会华东地区第17届学术年会即将召开

中国自动化学会华东地区第17届学术年会拟定于2004年11月2日~4日在风景秀丽的杭州召开. 这次会议由浙江省自动化学会主办, 杭州电子科技大学承办. 这是自动化界的一次盛会, 会议将就人工智能与应用、最优系统、非线性系统、运动控制、模式识别、计算机视觉、故障诊断、分形与混沌、大系统理论与方法、CIMS与制造技术、分布式控制系统、电力系统自动化、传感与测量等学科领域进行广泛的学术交流. 届时将邀请国内外知名专家学者作相关学术领域现状及发展的专题报告. 热忱欢迎各省市科技工作者及有关厂商和研制开发单位踊跃参加本次会议.

联系人: 赵伟杰 联系电话: 0571-86919086

E-mail: tzdh@hzice.edu.cn