第21卷第5期
2004年10月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.21 No.5
Oct. 2004

文章编号: 1000-8152(2004)05-0765-05

一类不确定离散奇异系统的鲁棒稳定化

马树萍, 程兆林
(山东大学 数学与系统科学学院,山东 济南 250100)

摘要: 讨论了离散奇异系统矩阵 E 中含时不变参数不确定的鲁棒状态反馈稳定化问题.首先,在一系列等价变换下,阐述了其和一个不确定正常线性离散系统的鲁棒状态反馈稳定化问题的等价关系;然后,利用线性矩阵不等式(LMI)方法,给出了鲁棒状态反馈稳定化控制器存在的一个充分必要条件,控制器的设计方法及控制器的一个解;最后,通过一个数值算例验证了本设计方法的有效性.

关键词: 离散奇异系统; 鲁棒稳定化; 状态反馈; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Robust stabilization for a class of discrete-time singular systems with uncertainties

MA Shu-ping, CHENG Zhao-lin
(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan Shandong 250100, China)

Abstract: The robust stabilization via state feedback for discrete-time singular systems with norm-bounded time-invariant parameter uncertainties in the matrix E is discussed. In a series of equivalent transformation, the equivalence between the stabilization under discussion and the robust stabilization via state feedback for uncertain standard state-space discrete-time linear systems was obtained. In terms of linear matrix inequality (LMI), a necessary and sufficient condition where there exists a robust state feedback stabilizing controller was given. The design method of the controller and a solution of the controller were also given. The effectiveness of the proposed method was illustrated through an example.

Key words: discrete-time singular system; robust stabilization; state feedback; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

奇异系统是比正常状态系统更为一般的系统,它的许多性质已得到广泛的研究[1].近年来,随着对正常状态空间系统鲁棒控制问题的广泛研究[2,3],奇异系统的鲁棒控制问题逐渐受到广大学者的重视[4~6],其中多数是考虑连续时间奇异系统的情形. Lin等[6]利用Riccati不等式方法讨论了微分矩阵 E 中含不确定的鲁棒状态反馈稳定化问题,但此方法并不能推广应用于离散奇异系统的鲁棒控制问题的讨论.对于离散奇异系统的鲁棒控制问题,目前也有一些结果[7~9].Fang等[7]讨论了含结构不确定的离散奇异系统的鲁棒稳定性,并得到了系统鲁棒稳定的结构不确定的上界.Xu等[9]利用矩阵不等式方法讨论了离散奇异系统状态矩阵中含参数不确定的鲁棒状态反馈稳定化问题,此方法的求解却比较困难.

本文考虑离散奇异系统 E 矩阵中含时不变参数不确定且不改变 E 的秩的鲁棒状态反馈稳定化问题,在不要求无干扰系统正则的条件下,首先阐述了其和一个不确定正常线性离散系统的鲁棒状态反馈稳定化问题的等价关系,利用线性矩阵不等式方法,给出了鲁棒状态反馈稳定化控制器存在的一个充分必要条件,控制器的设计方法及控制器的一个解.

2 问题描述及预备知识(Preliminaries and problem statement)

本文考虑不确定离散奇异系统

$$(E + M_0\Delta N_0)x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \tag{1}$$

其中 $x(k)\in\mathbb{R}^n$ 为状态, $u(k)\in\mathbb{R}^p$ 为控制.矩阵 $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 奇异, $\operatorname{rank}E = r < n$, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times p}$, $M_0\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $N_0\in\mathbb{R}^{q\times n}$ 为已知常矩阵, $\Delta\in\mathbb{R}^{m\times q}$ 为时不变不确定,且满足 $\Delta^{\mathrm T}\Delta\leqslant I$.

定义 1[1]　1)称 (E,A) 为正则的,若 $\det(zE-A)\neq 0$.

收稿日期:2002-03-25;收修改稿日期:2003-01-20.
基金项目:山东大学青年基金项目(11140053187004).

2) 称 (E,A) 是因果的,如果其为正则的,且 $\text{degree}\{\det(zE-A)\} = \text{rank}E$.

3) 称 (E,A)(或系统 $Ex(k+1)=Ax(k)$)是稳定的,如果其为正则的,且 $\det(zE-A)=0$ 的所有根都位于以原点为圆心的单位圆内.

定义 2 称 (E,A) 是容许的,若其为正则的,因果的,稳定的.

本文的目的是设计一个状态反馈控制器

$$u(k) = Kx(k), \tag{2}$$

使得对满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的所有时不变不确定,系统(1)的闭环是容许的,即对系统(1)设计一个鲁棒状态反馈稳定化控制器[9].

引理 1 若存在状态反馈控制器(2)使得对满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的所有时不变不确定,系统(1)的闭环是容许的,则

$$\text{rank}(E+M_0\Delta N_0) \leqslant \text{rank}E = r. \tag{3}$$

引理1的证明类似于连续奇异系统情形[6].

由引理1可知,若问题有解,则干扰 Δ 不能增加 E 的秩,故干扰只能有三种情形,即 $M_0 = E\bar{M}_0$,或 $N_0 = \bar{N}_0E$,或二者同时成立[6](引理3). 本文中只考虑第二、第三种且干扰不改变 E 的秩的情形,于是对系统(1)作如下假设:

假设 1 对满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的所有时不变不确定,有

$$\text{rank}(E+M_0\Delta N_0) \equiv r. \tag{4}$$

假设 2 $$N_0 = \bar{N}_0E. \tag{5}$$

假设 3 $$\text{rank}\begin{bmatrix} 0 & E & 0 \\ E & A & B \end{bmatrix} = n+r. \tag{6}$$

注 若 $\Delta=0$ 时系统(1)是正则的,则假设3即是系统 (E,A,B) Y-能控的定义[1],它是系统(1)鲁棒稳定化问题有解的必要条件,本文中不要求 $\Delta=0$ 时系统(1)的正则性.

因为 $\text{rank}E = r < n$,故存在非奇异矩阵 $M,N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\begin{cases} MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\ MB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ MM_0 = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}, \\ N_0N \overset{(5)}{=} [N_1\quad 0],\ N^{-1}x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{7}$$

其中 $A_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}, B_1 \in \mathbb{R}^{r\times p}, M_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}, N_1 \in \mathbb{R}^{q\times r}, x_1(k) \in \mathbb{R}^r, x_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}$.

引理 2[6] 假定假设1成立. 若存在状态反馈控制器(2)使得对满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的所有时不变不确定,系统(1)的闭环是容许的,则一定存在两个非奇异矩阵 $M,N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\|N_1M_1\| < 1, \tag{8}$$

其中 $\|\cdot\|$ 指谱范数, N_1, M_1 如式(7)所示.

由式(8)知,对所有满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的时不变不确定, $I_r + M_1\Delta N_1$ 非奇异,故取

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} (I_r+M_1\Delta N_1)^{-1} & 0 \\ -M_2\Delta N_1(I_r+M_1\Delta N_1)^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

则有

$$M_\Delta M(E+M_0\Delta N_0)N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

由

$$(I+CD)^{-1} = I - C(I+DC)^{-1}D \tag{11}$$

可得

$$\begin{aligned} M_\Delta &= \begin{bmatrix} I_r - M_1\tilde{\Delta}N_1 & 0 \\ -M_2\tilde{\Delta}N_1 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Delta} &= \Delta(I_q + N_1M_1\Delta)^{-1}, \end{aligned} \tag{12}$$

于是有

$$\begin{cases} M_\Delta MAN = \begin{bmatrix} A_{11}-M_1\tilde{\Delta}N_1A_{11} & A_{12}-M_1\tilde{\Delta}N_1A_{12} \\ A_{21}-M_2\tilde{\Delta}N_1A_{11} & A_{22}-M_2\tilde{\Delta}N_1A_{12} \end{bmatrix} = \\ \qquad \begin{bmatrix} A_{11\Delta} & A_{12\Delta} \\ A_{21\Delta} & A_{22\Delta} \end{bmatrix}, \\ M_\Delta MB = \begin{bmatrix} B_1 - M_1\tilde{\Delta}N_1B_1 \\ B_2 - M_2\tilde{\Delta}N_1B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{1\Delta} \\ B_{2\Delta} \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{13}$$

故由式(10),(13)知系统(1)受限等价于

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A_{11\Delta}x_1(k) + A_{12\Delta}x_2(k) + B_{1\Delta}u(k), \\ 0 = A_{21\Delta}x_1(k) + A_{22\Delta}x_2(k) + B_{2\Delta}u(k). \end{cases} \tag{14}$$

根据假设3可知矩阵 $[A_{22}\quad B_2]$ 行满秩[1],故存在非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{(n-r+p)\times(n-r+p)}$ 使得

$$[A_{22}\quad B_2]P = [I_{n-r}\quad 0]. \tag{15}$$

相应地,记

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix},\ [A_{12}\quad B_1]P = [\bar{A}_{12}\quad \bar{B}_1]. \tag{16}$$

对系统(14)作如下非奇异变换

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \bar{x}_2(k) \\ \bar{u}(k) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中 $\bar{x}_2(k) \in \mathbb{R}^{n-r}, \bar{u}(k) \in \mathbb{R}^p$. 则系统(14)等价地转化为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A_{11\Delta}x_1(k)+(\bar{A}_{12}-M_1\tilde{\Delta}N_1\bar{A}_{12})\bar{x}_2(k)+ \\ \qquad (\bar{B}_1 - M_1\tilde{\Delta}N_1\bar{B}_1)\bar{u}(k), \\ 0 = A_{21\Delta}x_1(k) + (I_{n-r} - M_2\tilde{\Delta}N_1\bar{A}_{12})\bar{x}_2(k) - \\ \qquad M_2\tilde{\Delta}N_1\bar{B}_1\bar{u}(k). \end{cases} \tag{18}$$

由(11),(12)容易证明下面的结论成立.

引理 3　假设 1 ~ 3 成立.若系统(1)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器(2),则一定存在非奇异矩阵 P,且

$$P = \begin{bmatrix} \bar{A}_{22}^{-1} & -\bar{A}_{22}^{-1}B_2 \\ K_2\bar{A}_{22}^{-1} & -K_2\bar{A}_{22}^{-1}B_2 + I_p \end{bmatrix}, \tag{19}$$

$\bar{A}_{22} = A_{22} + B_2K_2$ 非奇异,使得

$$\| N_1(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \| < 1, \tag{20}$$

其中 $\|\cdot\|$ 指谱范数.

引理 3 指出,若不存在形如(19)的 P 使得式(20)成立,则系统(14)(或系统(1))的鲁棒状态反馈稳定化问题无解.

容易验证 $\| N_1(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \|$ 只与 P 的选取有关,与 M,N 的选取无关. 下面给出 P 的选取方法,取

$$\begin{cases} \hat{P} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{22}^{-1} & -\hat{A}_{22}^{-1}B_2 \\ \hat{K}_2\hat{A}_{22}^{-1} & -\hat{K}_2\hat{A}_{22}^{-1}B_2 + I_p \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{22} = A_{22} + B_2\hat{K}_2, \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{22}^{-1} & -\tilde{A}_{22}^{-1}B_2 \\ \tilde{K}_2\tilde{A}_{22}^{-1} & -\tilde{K}_2\tilde{A}_{22}^{-1}B_2 + I_p \end{bmatrix}, \\ \tilde{A}_{22} = A_{22} + B_2\tilde{K}_2, \end{cases} \tag{22}$$

由 $\hat{P}, P$ 同时满足式(15),推得

$$[A_{22} \quad B_2]\left(\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{21} \end{bmatrix}\right) = 0, \tag{23}$$

故

$$\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} \\ \hat{P}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{22} \end{bmatrix}\hat{Q}, \hat{Q} \in \mathbb{R}^{p\times(n-r)}, \tag{24}$$

从而由式(21),(22) 推出

$$\begin{cases} \det(I_{n-r} - B_2\hat{Q}) \neq 0, \\ \tilde{K}_2 = \hat{K}_2 + \hat{Q}(I_{n-r} - B_2\hat{Q})^{-1}\hat{A}_{22}, \end{cases} \hat{Q} \in \mathbb{R}^{p\times(n-r)}. \tag{25}$$

而又由 $[A_{12} \quad B_1]\hat{P} = [\bar{A}_{12} \quad \bar{B}_1]$ 及式(24) 推得

$$[A_{12} \quad B_1]\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} = \bar{A}_{12} + \bar{B}_1\hat{Q}. \tag{26}$$

若式(20)成立,则根据式(11)可推得

$$\begin{cases} (I_{n-r} - M_2\tilde{\Delta}N_1\bar{A}_{12})^{-1} = I_{n-r} + M_2\hat{\Delta}N_1\bar{A}_{12}, \\ \hat{\Delta} = \Delta(I_q + N_1(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)\Delta)^{-1}, \end{cases} \tag{27}$$

经过计算,系统(18)可等价转化为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (\bar{A}_{11} + \Delta\bar{A}_{11})x_1(k) + (\bar{B}_1 + \Delta\bar{B}_1)\bar{u}(k), \\ \bar{x}_2(k) = -(I_{n-r} + M_2\hat{\Delta}N_1\bar{A}_{12})((A_{21} - \\ \qquad M_2\tilde{\Delta}N_1A_{11})x_1(k) - M_2\tilde{\Delta}N_1\bar{B}_1\bar{u}(k)), \end{cases} \tag{28}$$

其中

$$\begin{cases} \bar{A}_{11} = A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21}, \\ \Delta\bar{A}_{11} = -(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)\hat{\Delta}N_1\bar{A}_{11}, \\ \Delta\bar{B}_1 = -(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)\hat{\Delta}N_1\bar{B}_1. \end{cases} \tag{29}$$

定义 3[3]　不确定离散系统 $x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + (B + \Delta B)u(k)$ 是通过状态反馈 $u(k) = Kx(k)$ 可二次稳定的,当且仅当存在对称正定矩阵 $X > 0$ 使得

$$(A + \Delta A + (B + \Delta B)K)^{\mathrm{T}}X(A + \Delta A + (B + \Delta B)K) - X < 0. \tag{30}$$

引理 4[9]　给定适当维数的矩阵 Y, L 和 R, $Y = Y^{\mathrm{T}}$,则 $Y + L\tilde{\Delta}R + R^{\mathrm{T}}\tilde{\Delta}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}} < 0$ 成立,其中 $\tilde{\Delta} = \Delta(I + J\Delta)^{-1}, \Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I$, 当且仅当存在正数 $\epsilon > 0$,使得

$$Y + [\epsilon^{-1}R^{\mathrm{T}} \quad \epsilon L]\begin{bmatrix} I & J \\ J^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \epsilon^{-1}R \\ \epsilon L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0. \tag{31}$$

3　主要结果(Main results)

定理 1　设假设 1 ~ 3 成立. 则系统(1)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器(2)的充分必要条件是存在形如(22)的矩阵 P, 使得系统(28)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器

$$\bar{u}(k) = \bar{K}x_1(k). \tag{32}$$

证　必要性. 若系统(1)与状态反馈(2)构成的闭环系统对满足 $\Delta^{\mathrm{T}}\Delta \leqslant I$ 的所有时不变不确定是容许的,则由假设 1 ~ 3 成立及等价变换(7),(10),(13)知, 系统(14)与状态反馈 $u(k) = [K_1 \quad K_2]\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$ 构成的闭环系统

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \check{A}_{11}x_1(k) + \check{A}_{12}x_2(k), \\ 0 = \check{A}_{21}x_1(k) + \check{A}_{22}x_2(k), \end{cases} \tag{33}$$

其中

$$\begin{cases} \check{A}_{11} = A_{11} + B_1K_1 - M_1\tilde{\Delta}N_1(A_{11} + B_1K_1), \\ \check{A}_{12} = A_{12} + B_1K_2 - M_1\tilde{\Delta}N_1(A_{12} + B_1K_2), \\ \check{A}_{21} = A_{21} + B_2K_1 - M_2\tilde{\Delta}N_1(A_{11} + B_1K_1), \\ \check{A}_{22} = A_{22} + B_2K_2 - M_2\tilde{\Delta}N_1(A_{12} + B_1K_2), \end{cases} \tag{34}$$

是容许的.系统(33)等价于

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (\breve{A}_{11} - \breve{A}_{12}\breve{A}_{22}^{-1}\breve{A}_{21})x_1(k), \\ x_2(k) = -\breve{A}_{22}^{-1}\breve{A}_{21}x_1(k), \end{cases} \tag{35}$$

从而系统(35)对满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的所有时不变不确定,是稳定的.

取 P 如式(19)所示,$\bar{K} = K_1$,对系统(28)实施控制,则闭环系统为

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K} + \Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{B}_1\bar{K})x_1(k), \\ \bar{x}_2(k) = -(I_{n-r} + M_2\hat{\Delta}N_1\bar{A}_{12})(A_{21} - \\ \qquad M_2\tilde{\Delta}N_1(A_{11} + B_1\bar{K}))x_1(k), \end{cases} \tag{36}$$

其中

$$\begin{cases} \bar{K} = K_1, \bar{A}_{12} = (A_{12} + B_1K_2)\bar{A}_{22}^{-1}, \\ \bar{B}_1 = -(A_{12} + B_1K_2)\bar{A}_{22}^{-1}B_2 + B_1. \end{cases} \tag{37}$$

则由(11),(12),(34),(35),(37),经计算可推得

$$\bar{A}_{11} + \bar{B}_1K_1 + \Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{B}_1K_1 = \breve{A}_{11} - \breve{A}_{12}\breve{A}_{22}^{-1}\breve{A}_{21}, \tag{38a}$$

$$x_2(k) = -\bar{A}_{22}^{-1}(\bar{x}_2(k) + B_2K_1x_1(k)), \tag{38b}$$

由(38a)知,系统(36)与系统(35)有相同的系数矩阵,故系统(36)对所有满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的时不变不确定,是稳定的,又由(38b)知 $\bar{x}_2(k)$ 也稳定.

充分性.假定存在矩阵 P 使得系统(28)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器(32),则闭环系统(36)是稳定的,对所有满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的时不变不确定成立.对系统(14)实施控制

$$u(k) = K_1x_1(k) + K_2x_2(k), K_1 = \bar{K}, K_2 = \tilde{K}_2, \tag{39}$$

$\tilde{K}_2$ 如式(22)所示,则其与系统(14)构成的闭环系统为式(33),由 $\|N_1(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)\| < 1$ 知 $\breve{A}_{22}$ 非奇异对所有满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的时不变不确定成立,故系统(33)是正则的,因果的,且等价于系统(35).经计算可知仍有式(38)成立,从而系统(35)是稳定的,故对所有满足 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的时不变不确定,闭环系统(33)是稳定的.由等价变换(7),(10),(13)即知系统(1)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器 $u(k) = [\bar{K} \quad \tilde{K}_2]N^{-1}x(k)$. 证毕.

定理 2 设假设 1~3 成立.则

1) 系统(1)(系统(14))存在鲁棒状态反馈稳定化控制器的充分必要条件是,存在正数 $\varepsilon > 0$,正定矩阵 $Q > 0$ 及矩阵 W 使得如下 LMI 成立:

$$\begin{bmatrix} -Q & \bar{A}_{11}Q + \bar{B}_1W & 0 & \varepsilon(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \\ Q\bar{A}_{11}^T + W^T\bar{B}_1^T & -Q & (Q\bar{A}_{11}^T + W^T\bar{B}_1^T)N_1^T & 0 \\ 0 & N_1(\bar{A}_{11}Q + \bar{B}_1W) & -\varepsilon I & \varepsilon N_1(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \\ \varepsilon(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)^T & 0 & \varepsilon(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)^TN_1^T & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{40}$$

2) 若 LMI(40)有解,则系统(1)的一个鲁棒状态反馈稳定化控制器为

$$u(k) = [\bar{K} \quad \tilde{K}_2]N^{-1}x(k), \tag{41}$$

其中 $\bar{K} = WQ^{-1}$,$\tilde{K}_2$ 如式(22)所示.

证 1) 由定理 1 知,在假设 1~3 下,系统(1)(或系统(14))的鲁棒状态反馈稳定化问题等价于系统(28)的鲁棒状态反馈稳定化问题.再由定义 3 知系统(28)是通过状态反馈可二次稳定的,当且仅当存在矩阵 $\bar{K}$ 及正定矩阵 $X > 0$,对所有 $\Delta^T\Delta \leqslant I$ 的时不变不确定,满足

$$(\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K} + \Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{B}_1\bar{K})^TX(\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K} + \Delta\bar{A}_{11} + \Delta\bar{B}_1\bar{K}) - X < 0, \tag{42}$$

根据式(29),将上式等价写为

$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & \bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K} \\ (\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K})^T & -X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \\ 0 \end{bmatrix}\hat{\Delta}[0 \quad N_1(\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K})] + \begin{bmatrix} 0 \\ (\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K})^TN_1^T \end{bmatrix}\hat{\Delta}^T[-(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)^T \quad 0] < 0, \tag{43}$$

由引理 4 及 Schur 补偿方法知式(43)等价于存在正数 $\bar{\varepsilon} > 0$,使得

$$\begin{bmatrix} -X^{-1} & \bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K} & 0 & -\bar{\varepsilon}(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \\ (\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K})^T & -X & \bar{\varepsilon}^{-1}(\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K})^TN_1^T & 0 \\ 0 & \bar{\varepsilon}^{-1}N_1(\bar{A}_{11} + \bar{B}_1\bar{K}) & -I & -N_1(M_1 - \bar{A}_{12}M_2) \\ -\bar{\varepsilon}(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)^T & 0 & -(M_1 - \bar{A}_{12}M_2)^TN_1^T & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{44}$$

必要性.假设系统(1)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器,则系统(28)是通过状态反馈可二次稳定的,故存在矩阵 $\bar{K}$, 正定矩阵 $X>0$, 及正数 $\bar{\varepsilon}>0$ 使得式(42)及(44)成立.取 $T_1=\mathrm{diag}\{I, X^{-1}, \bar{\varepsilon}I, -\bar{\varepsilon}I\}$, 不等式(44)左乘 T_1, 右乘以 T_1^{T}, 并令 $X^{-1}=Q$, $\bar{\varepsilon}^2=\varepsilon$, $\bar{K}X^{-1}=W$, 则有式(40)成立.

充分性.假设存在正数 $\varepsilon>0$, 正定矩阵 Q 及矩阵 W 满足(40), 则取 $T_2=\mathrm{diag}\{I, Q^{-1}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}I, -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}I\}$, 不等式(40)左乘 T_2, 右乘以 T_2^{T}, 并令 $X=Q^{-1}$, $\bar{\varepsilon}=\sqrt{\varepsilon}$, $\bar{K}=WQ^{-1}$, 即有式(40)等价于式(44), 从而式(42)成立.

2) 若LMI(40)有解,则由必要性知 $\bar{K}=WQ^{-1}$, 由定理1及由变换(7)知式(41)是系统(1)的鲁棒状态反馈稳定化控制器. 证毕.

若LMI(40)中 $M_2=0$, 此即第三种情形.于是有

推论 若假设1~3成立,且 $M_0=E\bar{M}_0$. 则

1° 系统(1)存在鲁棒状态反馈稳定化控制器的充分必要条件是,存在正数 $\varepsilon>0$, 正定矩阵 $Q>0$ 及矩阵 W 使得 $M_2=0$ 时, LMI(40)成立.

2° 若 $M_2=0$ 时LMI(40)有解,则系统(1)的鲁棒状态反馈稳定化控制器为

$$u(k)=[K_1 \quad K_2]N^{-1}x(k). \tag{45}$$

其中

$$K_1=(-P_{21}A_{21}+P_{22}\bar{K})-K_2(-P_{11}A_{21}+P_{12}\bar{K}), \tag{46}$$

K_2 为使得 $A_{22}+B_2K_2$ 非奇异的任一实矩阵, $\bar{K}=WQ^{-1}$, P 如式(15)所示.

证明从略.

综合前面的推导,作者给出设计满足假设1~3的系统(1)的鲁棒状态反馈稳定化控制器的算法.

1) 取 $\bar{M}_1, \bar{N}_1$ 非奇异,满足 $\bar{M}_1E\bar{N}_1=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 检查是否有 $\|N_1M_1\|<1$, 若"是",则令 $M=\bar{M}_1$, $N=\bar{N}_1$, 若 $M_2=0$, 转向第6)步;若 $M_2\neq0$, 转向第3)步.若"否",则检查是否 $M_2=0$, 若 $M_2=0$, 则问题无解;若 $M_2\neq0$, 转向第2)步.

2) 找矩阵 Y 使得 $\|N_1(M_1+YM_2)\|<1$, 若 Y 不存在,则问题无解;若 Y 存在,则

$$\bar{M}_2=\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{11}Y \\ 0 & \bar{M}_{13} \end{bmatrix}, \ \bar{N}_2=\begin{bmatrix} \bar{M}_{11}^{-1} & 0 \\ \bar{N}_{21} & \bar{N}_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $\bar{M}_{11}, \bar{M}_{13}, \bar{N}_{22}$ 为任意非奇异矩阵, $\bar{N}_{21}$ 任意的,令 $M=\bar{M}_2\bar{M}_1$, $N=\bar{N}_1\bar{N}_2$.

3) 取 $\hat{P}$ 如式(21)所示,检查是否有 $\|N_1(M_1-\bar{A}_{12}M_2)\|<1$, 若"是",令 $P=\hat{P}$, $\bar{K}=\hat{K}$, 转向第5)步;若"否",则转向第4)步.

4) 取 $\hat{Q}\in\mathbb{R}^{p\times(n-r)}$ 使得 $\det(I-B_2\hat{Q})\neq0$, 并使 $\|N_1(M_1-(\bar{A}_{12}+\bar{B}_1\hat{Q})M_2)\|<1$, 若 $\hat{Q}$ 存在,则令 $\tilde{K}_2$ 如式(25)所示, $\tilde{P}$ 如式(22)所示,转向第5)步;若 $\hat{Q}$ 不存在,则问题无解.

5) 解LMI(40), 若有解, 则令控制器为式(41);若无解,则重新转向第4)步.

6) 取 P 如式(15)所示,解LMI(40),若无解,则问题无解;若有解,则令控制器为式(45),(46).

4 算例(Example)

例 考虑具有形式(1)的不确定系统 Σ_2:

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ M_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix},$$

$$N_0=[0 \quad 0 \quad 0.5], \ \Delta=\delta, \ \delta^2\leqslant1.$$

取

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

经计算可得 $N_2=0$, $M_2\neq0$. 取 $\tilde{K}_2=[1 \quad 1]$, 则由式(22),(16)得 $N_1(M_1-\bar{A}_{12}M_2)=0.375<1$, $\bar{A}_{11}=-1$, $\bar{B}_1=-2$. 令 $\varepsilon=0.5$, 解LMI(40),得 $Q=1.1681$, $W=-0.5840$, 故有 $\bar{K}=-0.5$, 从而

$$K=[-0.5 \quad 1 \quad 1]N^{-1}=[1 \quad 1 \quad -0.5].$$

5 结束语(Conclusions)

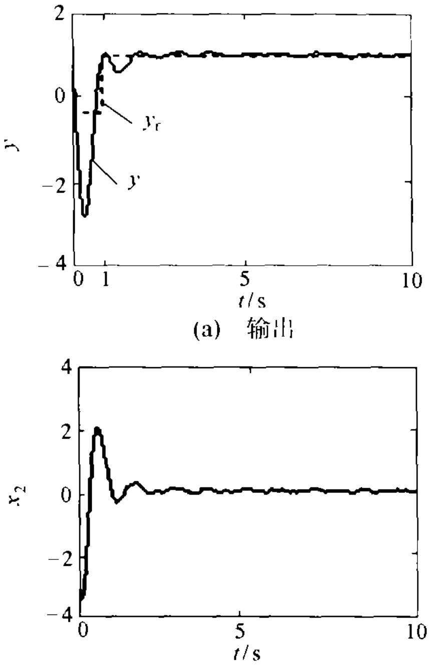
本文中讨论了离散奇异系统 矩阵 E 中含有时不变不确定,且不改变 E 的秩的鲁棒状态反馈稳定化问题.通过讨论,指出问题可等价转化为一个不确定正常线性离散系统的鲁棒状态反馈稳定化问题,并利用LMI给出了问题可解的充分必要条件,控制器的解及控制器的设计方法.此方法只能用于状态反馈问题的讨论,对于输出反馈问题此方法却很难应用.

参考文献(References):

[1] DAI L. *Singular Control Systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences*[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

(下转第775页)

由响应曲线可以看出，文中所提出的方法可以稳定不确定的混沌非线性系统，并使其具有期望的跟踪性能．



(a)　输出

(b) 状态x_2

图 3　系统在模糊控制和自适应 RBF 神经网络作用下响应曲线

Fig. 3　Response of the system controlled by the fuzzy controller and adaptive NN

6　结论(Conclusion)

针对一类具有未知不确定项的非线性多变量系统，提出了一种将 RBF 自适应神经网络与基于模糊模型的 H_∞ 跟踪控制律相结合的模糊跟踪控制方法．所提出的跟踪控制方法，直接从原始被控系统出发，考虑了系统的不确定性和模糊建模误差的影响，不需要对系统的不确定性和模糊建模误差做任何假设，具有较好的跟踪控制效果．

参考文献(References)：

[1] TANAKA K, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1998, 6(2): 250 – 268.

[2] LEE H J, PARK J B, CHEN G. Robust fuzzy control of nonlinear system with parametric uncertainties [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 2001, 9(2): 369 – 379.

[3] LI J, WANG H O, NIEMANN D, et al. Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems: An LMI approach [J]. *Information Sciences*, 2000, 123(3 – 4): 201 – 221.

[4] TSENG C S, CHEN B S, UANG H J. Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic system via T-S fuzzy model [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 2001, 9(3): 381 – 392.

[5] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 1996, 4(1): 14 – 23.

[6] GU Y, WANG H O, TANAKA K. Fuzzy control of nonlinear timedelay systems: stability and design issues [C]// 2001 *American Control Conference*. Arlington, VA: [s.n.], 2001: 4771 – 4777.

[7] GE S S, WANG C. Direct adaptive NN control of a class nonlinear system [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(1): 214 – 221.

作者简介：

刘　亚　(1975 —)，女，博士，毕业于南京航空航天大学自动化学院，研究方向为非线性控制和智能控制，liuyan@263.net；

胡寿松　(1937 —)，男，1960 年毕业于北京航空航天大学自控专业，现为南京航空航天大学首席教授、博士生导师、中国自动化学会理事，近期研究方向为非线性控制、鲁棒控制及智能自修复控制．

(上接第 769 页)

[2] MAGANA M E, ZAK S H. Robust state feedback stabilization of discrete-time uncertain dynamical systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(9): 887 – 891.

[3] CARAVANI P. Stabilization and disturbance attenuation of uncertain discrete-time linear systems [J]. *Int J of Systems Science*, 1998, 29(11): 1313 – 1323.

[4] FANG C, CHANG F. Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations [J]. *Systems & Control Letters*, 1993, 21(2): 109 – 114.

[5] 马树萍，程兆林．线性奇异系统的 H_∞ 控制问题：状态反馈情形[J]．控制理论与应用，2001，18(4)：513 – 518.
(MA Shuping, CHENG Zhaolin. State feedback H_∞ control design problem for linear singular systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(4): 513 – 518.)

[6] LIN C, WANG J, YANG G, et al. Robust stabilization via state feedback for descriptor systems with uncertainties in the derivative matrix [J]. *Int J Control*, 2000, 73(5): 407 – 415.

[7] FANG C, LEE L, CHANG F. Robust control analysis and design for discrete-time singular systems [J]. *Automatica*, 1994, 30(12): 1741 – 1750.

[8] 徐胜元，陈雪如，杨成梧．一类离散广义系统的 H_∞ 控制[J]．控制理论与应用，2000，17(5)：739 – 741.
(XU Shengyuan, CHEN Xueru, YANG Chengwu. H_∞ Control for a class of discrete singular systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(5): 739 – 741.)

[9] XU S, YANG C, NIU Y, et al. Robust stabilization for uncertain discrete singular systems [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 769 – 774.

[10] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *Int J Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

作者简介：

马树萍　(1970 —)，女，山东大学数学院副教授，从事多变量控制理论与应用的研究，E-mail：mashup@sdu.edu.cn；

程兆林　(1939 —)，男，山东大学数学院教授，博士生导师，研究方向为多变量控制．