

## 带有两个动量飞轮刚体航天器的姿态非完整运动规划问题

戈新生<sup>1,2</sup>, 陈立群<sup>2</sup>, 刘延柱<sup>3</sup>

(1. 北京机械工业学院 基础部, 北京 100085; 2. 上海大学 上海应用数学和力学研究所, 上海 200072;

3. 上海交通大学 工程力学系 上海 200030)

**摘要:** 航天器利用三个动量飞轮可以控制其姿态和任意定位. 当其中一个动量飞轮失效, 在某些特定的情况下, 如何控制航天器的姿态问题还没有有效的方法. 利用最优控制方法研究了带有两个动量飞轮的刚体航天器姿态优化控制问题. 为此考虑系统角动量为零的情况下, 将航天器姿态运动方程化为非完整形式约束方程, 系统的控制问题可转化为无漂移系统的非完整运动规划问题. 通过 Ritz 近似理论得到求解带有两个动量飞轮航天器姿态的运动规划控制算法. 通过数值仿真, 表明该方法对航天器姿态运动规划控制是有效的.

**关键词:** 刚体航天器; 姿态控制; 运动规划; 非完整约束; 欠驱动

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Nonholonomic motion planning for the attitude of rigid spacecraft with two momentum wheel actuators

GE Xin-sheng<sup>1,2</sup>, CHEN Li-qun<sup>2</sup>, LIU Yan-zhu<sup>3</sup>

(1. Basic Science Courses Department, Beijing Institute of Machinery, Beijing 100085, China;

2. Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China

3. Department of Engineering Mechanics, Shanghai JiaoTong University, Shanghai, 200030 China)

**Abstract:** The attitude of spacecraft can be controlled and thus reoriented arbitrarily via three momentum wheels. When one of the wheels fails to function properly, there is no effective way to control rigid spacecraft attitude motion in certain practical circumstances. Based on the optimal control theory, an optimal attitude control strategy was proposed for the rigid spacecraft with two momentum wheel actuators. The attitude motion equations were formulated for the spacecraft under a nonholonomic constraint resulting from the constant time-rate of its total angular momentum. The original control problem could be converted to a motion planning problem of a drift-free system. The Ritz approximation theory was applied to develop an algorithm for attitude motion planning of spacecraft with only two momentum wheel actuators. Numerical simulations has proved of the approach to be effective.

**Key words:** rigid spacecraft; attitude control; motion planning; nonholonomic constraint; underactuated

### 1 引言 (Introduction)

航天器姿态控制通常是由 3 个独立的喷气推力或动量飞轮提供激励. 航天器利用 3 个动量飞轮可以完全控制其姿态和任意定位. 当航天器的某一动量飞轮发生故障或失效, 仅依靠两个动量飞轮维持姿态控制和定位, 这一特殊的航天器系统被称为欠驱动航天器. 在某些情况下, 欠驱动航天器也能有效地进行姿态控制和定位. 因此欠驱动航天器的姿态控制问题引起人们广泛重视. Crouch<sup>[1]</sup>证明了航天器在少于 3 个喷气推力或动量飞轮激励下的可控性. Krishnan<sup>[2]</sup>和 Tsiotras<sup>[3]</sup>讨论了利用两个动量飞轮控制航天器的姿态稳定性问题. Krishnaprasad<sup>[4]</sup>利

用微分几何方法提出多体航天器姿态改变的一般框架理论. Walsh<sup>[5]</sup>研究了带有两个转子的航天器定位控制, 提出利用系统内部运动操纵航天器从一个方位到另一方位的控制算法. Coverstone-Carroll<sup>[6]</sup>采用数值优化技术讨论了带机器人航天器系统的优化控制问题. Fernandes<sup>[7]</sup>基于泛函分析中的 Ritz 近似理论, 建立了一种非完整运动规划的控制方法, 给出了双刚体航天器系统的优化输入和姿态运动轨迹. 作者<sup>[8]</sup>利用遗传方法和小波分析理论, 研究了航天器太阳帆板展开过程运动规划的优化控制问题.

作者考虑带有两个动量飞轮的航天器姿态运动. 在系统动量矩为零情况下刚体航天器的姿态控

制问题可以转化为无漂移系统的运动规划问题. 利用最优控制方法和 Ritz 近似理论, 针对带有两个动量飞轮航天器系统给出优化控制算法, 得到了两个动量飞轮的控制输入规律, 以确定航天器载体姿态运动达到期望姿态. 文末给出了数值仿真算例.

## 2 系统的模型(The model of system)

带有两个动量飞轮的刚体航天器系统在无外力矩作用情况下, 动力学方程可由角动量守恒原理导出. 航天器的姿态控制问题可以转化为非完整系统的运动规划问题. 由于飞轮的转动是通过非完整约束运动学关系引起航天器载体的姿态运动, 这种运动也称为内运动<sup>[9]</sup>. 设航天器系统由载体  $B_0$  和两个对称分布动量飞轮  $B_i (i = 1, 2)$  组成(见图1). 以系统总质心  $O$  为原点建立相对惯性空间平动的坐标系  $(O-XYZ)$ , 设  $(O_i-x_i y_i z_i) (i = 0, 1, 2)$  分别为航天器载体  $B_0$  和动量飞轮  $B_i (i = 1, 2)$  的主轴连体坐标系, 相对于  $(O-XYZ)$  的坐标变换矩阵为  $R(\theta, \psi, \varphi)$ , 其中  $\theta, \psi$  和  $\varphi$  为卡尔丹角. 航天器载体和两个飞轮的质量及惯量张量分别为  $m_0, m_1, m_2$  和  $I_0, I_1, I_2$ . 各连体坐标系原点  $O_i (i = 0, 1, 2)$  相对系统总质心  $O$  的矢径为  $\rho_i (i = 0, 1, 2)$ , 飞轮  $B_i$  质心  $O_1$  和  $O_2$  到航天器载体质心  $O_0$  距离分别为  $d_1$  和  $d_2$ . 飞轮  $B_i (i = 1, 2)$  相对于系统总质心的位置可写为

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho_0 + d_1 \mathbf{b}_1, \\ \rho_2 = \rho_0 + d_2 \mathbf{b}_2. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{b}_1$  和  $\mathbf{b}_2$  分别为飞轮 1 和 2 旋转轴的单位基矢量, 并且两飞轮旋转轴的基矢量均位于航天器的主轴平面内而垂直于航天器另一主轴.  $\mathbf{b}_1$  和  $\mathbf{b}_2$  的一般表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = (b_{1x}, b_{1y}, 0)^T, \\ \mathbf{b}_2 = (b_{2x}, b_{2y}, 0)^T. \end{cases} \quad (2)$$

由系统质心定义可分别求出矢径  $\rho_i = (\rho_{ix}, \rho_{iy}, 0)^T (i = 0, 1, 2)$ . 设  $\boldsymbol{\omega}$  为航天器的绝对角速度矢量, 则航天器系统相对  $O_0$  点的动量矩写为

$$\mathbf{R}(\theta, \Psi, \varphi) \mathbf{H} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i (\boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_i \dot{\theta}_i), \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \left[ \mathbf{I}_0 + \sum_{i=0}^2 \bar{\mathbf{I}}_i + \sum_{i=1}^2 (\mathbf{I}_i - \bar{\mathbf{I}}_i) \right],$$

$$\bar{\mathbf{I}}_i = m_i \begin{bmatrix} \rho_{1y}^2 & -\rho_{ix} \rho_{iy} & 0 \\ -\rho_{ix} \rho_{iy} & \rho_{ix}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{1x}^2 + \rho_{1y}^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T J_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

其中  $\theta_i (i = 1, 2)$  分别为飞轮  $B_i$  绕  $\mathbf{b}_i$  轴的转动角,  $J_i (i = 1, 2)$  分别为动量飞轮  $B_i$  相对于  $\mathbf{b}_i$  轴的惯量矩. 设航天器系统起始动量矩  $\mathbf{H}$  为零, 则式(3)可表示为

$$\boldsymbol{\omega} = - \left( \mathbf{J} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^2 \mathbf{b}_i \dot{\theta}_i. \quad (4)$$

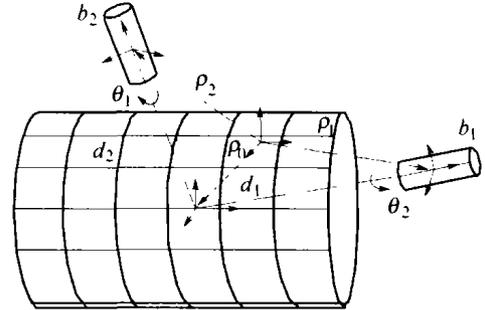


图1 带有两个动量飞轮的航天器  
Fig. 1 Spacecraft with two momentum wheels

航天器绕  $O$  点转动的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  相对载体坐标系  $(O_0-x_0 y_0 z_0)$  各轴的投影  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  可用卡尔丹角及导数表示为<sup>[10]</sup>

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\cos \psi \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \psi & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)得到

$$\dot{\mathbf{q}} = - \mathbf{L}^{-1} \left( \mathbf{J} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^2 \mathbf{b}_i \dot{\theta}_i. \quad (6)$$

由系统动量矩守恒导出的方程(6)为不可积形式, 即带有两个动量飞轮航天器系统具有不可积的角速度约束或称为非完整约束.

## 3 航天器姿态优化控制问题 (Optimal control for spacecraft attitude motion)

定义航天器载体姿态角  $\mathbf{q} = (\theta, \psi, \varphi)^T$  为状态变量, 将动量飞轮  $B_i (i = 1, 2)$  相对转动角速度  $\dot{\theta}_i (i = 1, 2)$  取作控制输入变量, 记作  $\mathbf{u} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)^T$ , 则系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = - \mathbf{L}^{-1} \left( \mathbf{J} + \sum_{i=1}^2 \mathbf{I}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^2 \mathbf{b}_i.$$

方程(7)描述了带有两个飞轮的刚体航天器姿态运动(3个状态变量)受控于2个控制输入的非线性控制系统. 将系统姿态控制问题转化为无漂移系统的非完整运动规划问题, 即给定航天器系统初始和终端位形  $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_f \in \mathbb{R}^3$ , 通过目标函数寻求控制输入  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T]$  从而确定系统(7)从  $\mathbf{q}_0$  到  $\mathbf{q}_f$

的运动轨迹.

设系统为可控的<sup>[1]</sup>,存在优化解  $u^* \in L^2([0, T])$ ,其中  $L^2([0, T])$  是由定义在区间  $[0, T]$  内的可测向量函数  $u(t)$  构成的 Hilbert 空间.根据最小能量控制原理,选择航天器动量飞轮转动耗散能作为最优控制目标,其目标函数为

$$J(u) = \int_0^T \langle u, u \rangle dt, \quad (8)$$

在实际计算中,利用 Ritz 逼近方法取其有限维而求解问题的近似解,如取前  $N$  项,则  $u$  可表示为 Fourier 基向量  $\{e_i\}_{i=1}^N$  的线性组合<sup>[11]</sup>

$$u = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i = \Phi \alpha. \quad (9)$$

其中  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, N)$  为函数  $u$  在  $\{e_i\}_{i=1}^N$  基上的投影,  $\Phi = (e_1(t), e_2(t), \dots, e_N(t))$  为  $2 \times N$  矩阵,因此,式(7)可表示为

$$\dot{q} = B(q)\Phi \alpha, \quad (10)$$

将  $\alpha$  视作新的控制变量,引入罚函数方法,式(8)目标函数  $J(u)$  可写为

$$J(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle + \lambda \|f(\alpha) - q_f\|^2. \quad (11)$$

其中  $\lambda > 0$  为罚因子.可以证明,当  $N, \lambda \rightarrow \infty$  时,上述有限维问题的近似优化解收敛于无穷维优化解<sup>[7]</sup>.对  $\alpha \in \mathbb{R}^2, f(\alpha)$  为方程(7)由控制输入  $u$  给定在  $t = T$  时的解.因此寻找控制输入  $u(t)$  使式(8)取极小值问题转化为寻找  $\alpha$  使目标函数(11)为极小值问题.式(11)的极值问题可用下列修正的牛顿法迭代求解:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \sigma [\gamma E + A^T A]^{-1} [\gamma a_n + A^T (f(\alpha_n) - q_f)]. \quad (12)$$

迭代公式(12)的推导利用了 Taylor 展开,并忽略了二阶以上高阶项.式中  $A = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$  为  $f$  的 Jacobi 矩阵,  $E$  为单位阵.  $\gamma = 1/\lambda, \sigma$  为步长因子,  $0 < \sigma < 1$ .

显然  $A$  为矩阵函数  $y$  在  $t = T$  时的值,  $y$  定义为

$$y(t) = \frac{\partial q(t)}{\partial \alpha}, \quad (13)$$

且  $y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0$ .对  $y(T)$  微分可得

$$\dot{y} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial \alpha} = \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \sum_{i=1}^2 B_i u_i \right) = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial B_i}{\partial q} \Phi_i \alpha \right) y + B(q)\Phi. \quad (14)$$

因此对下列微分方程组从 0 到  $T$  数值积分:

$$\begin{cases} \dot{q} = B(q)\Phi \alpha_n, \\ \dot{y} = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial B_i}{\partial q} \Phi_i \alpha \right) y + B(q)\Phi. \end{cases} \quad (15)$$

并设  $f(\alpha_n) = q(T)$ ,将  $A = y(T)$  代入式(12)迭代求解  $\alpha$ ,再利用式(9)即得系统的输入  $u(t)$ ,从而得到系统状态变量的优化轨迹.

### 4 数值仿真(Numerical simulation)

考虑带有两个动量飞轮刚体航天器的姿态运动,对上节提出的非完整运动规划的优化控制问题进行仿真验证.设两个动量飞轮分别位于航天器主轴上,沿主轴基矢量  $b_1$  和  $b_2$  分别定义为  $b_1 = (1, 0, 0)^T$  和  $b_2 = (0, 1, 0)^T$ .航天器系统质量几何参数分别为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} d_1 &= d_2 = 0.2 \text{ m}, \quad j_1 = j_2 = 0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ m_0 &= 500 \text{ kg}, \quad m_1 = m_2 = 5 \text{ kg}, \\ I_0 &= \text{diag}(86.215, 85.07, 113.565) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_1 &= \text{diag}(0.5, 0.25, 0.25) \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_2 &= \text{diag}(0.25, 0.5, 0.25) \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

航天器载体的初始和终端姿态分别为

$$q_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi/6 \end{bmatrix}.$$

其中终端姿态要求航天器载体绕无动量飞轮的第三主轴转动  $\pi/6$ .仿真试验中选取 10 个 Fourier 正交基矢量组成矩阵  $\Phi$ ,其中  $\{e_i(t)\}_{i=1}^5$  为

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} \sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} \cos t \\ 0 \end{bmatrix}, \\ e_4 &= \begin{bmatrix} \sin 2t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_5 = \begin{bmatrix} \cos 2t \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\{e_i(t)\}_{i=6}^{10}$  分别由上式各基矢量行轮换得到.算例通过 26 次迭代达到最优指标值,  $\|\alpha\|_{26} = 45.12$ ,误差精度为  $10^{-3}$ .仿真结果如图 2,3 所示,其中图 2 为航天器载体从  $q_0$  到  $q_f$  姿态运动的优化轨线.图 3 为两个动量飞轮相对航天器主轴转动的最优控制输入规律.

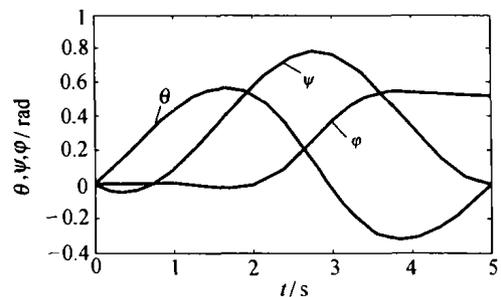


图 2 航天器主刚体姿态运动优化轨线  
Fig. 2 Optimal trajectory of the rigid spacecraft

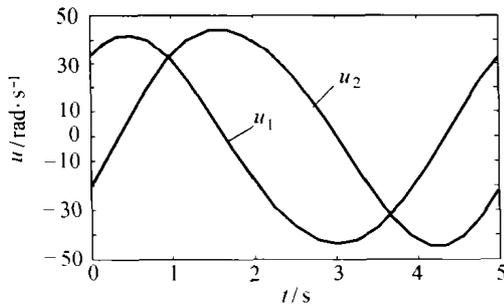


图3 航天器动量飞轮转动的优化输入规律

Fig. 3 Optimal control input for two momentum wheels

## 5 结论(Conclusion)

带有两个动量飞轮航天器的姿态控制是非线性控制问题,可以转化为非完整运动规划的优化控制问题研究.文中导出了欠驱动刚体航天器系统动力学方程,利用文献[7]的方法求解刚体航天器从初始位形到终端位形的有效姿态运动轨迹.数值仿真表明了方法的有效性.同时也表明航天器系统在无外力矩作用下,利用其自身(动量飞轮)内部运动完全可以调节航天器主刚体的姿态运动.

## 参考文献(References):

- [1] CROUCH P E. Spacecraft attitude control and stabilization: application of geometric control theory to rigid body models [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1984, 29(4): 87 - 95.
- [2] KRISHNAN H, McCLAMROCH N H, REYHANOGLU M. Attitude stabilization of a rigid spacecraft using two momentum wheel actuators [J]. *J of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, 18(2): 256 - 263.
- [3] TSIOTRAS P, CORLESS M, LONGUSKI J M. A novel approach to the attitude control of axisymmetric spacecraft [J]. *Automatica*, 1995, 31(8): 1099 - 1112.
- [4] KRISHNAPRASAD P S. Geometric phases and optimal reconfiguration for multibody systems [C]// *Proc of American Control Conf.* New York: the American Automatic Control Council, 1990: 2440 - 2444.
- [5] WALSH G, MONTGOMERY R, SASTRY S S. Orientation control of the dynamic satellite [C]// *Proc of American Control Conf.* Baltimore, Maryland: the American Automatic Control Council, 1994: 138 - 142.
- [6] COVERSTONE-CARROLL V L, WILKEY N M. Optimal control of a satellite-robot system using direct collocation with nonlinear programming [J]. *Acta Astronautica*, 1995, 36(3): 149 - 162.
- [7] FERNANDES C, GURVITS L, LI Z. Near-optimal nonholonomic motion planning for a system of coupled rigid bodies [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(3): 450 - 463.
- [8] 张奇志, 戈新生, 刘延柱. 基于小波逼近的航天器太阳帆板展开过程最优控制的遗传算法[A]. *控制理论与应用*, 1999, 16(6): 842 - 847.  
ZHANG Qizhi, GE Xinseng, LIU Yanzhu. A genetic algorithm for optimal control of stretching process of solar arrays on spacecraft based on wavelet approximation [J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(6): 842 - 847.
- [9] REYHANOGLU M, McCLAMROCH N H. Planar reorientation maneuvers of space multibody systems using internal controls [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1992, 15(6): 1475 - 1480.
- [10] 刘延柱. 航天器姿态动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.  
(LIU Yanzhu, *Spacecraft Attitude Dynamics* [M], Beijing: The Nation Defense Industry Press, 1995.)
- [11] 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.  
(HU Yue ming, *Nonlinear Control Systems Theory and Applications* [M], Beijing: The Nation Defense Industry Press, 2002.)

## 作者简介:

戈新生 (1957—), 男, 博士, 北京机械工业学院基础部教授, 主要研究方向为多体系统动力学及航天器姿态动力学与控制, E-mail: gebim@vip.sina.com;

陈立群 (1963—), 男, 上海大学力学系和上海市应用数学和力学研究所教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性动力学和控制;

刘延柱 (1936—), 男, 上海交通大学工程力学系教授, 博士生导师, 主要研究方向为一般力学及航天器姿态动力学.