第21卷第5期
2004年10月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.21 No.5
Oct. 2004

文章编号：1000-8152(2004)05-0840-04

基于调节函数的一类三角结构非线性系统的自适应滑模控制

闫茂德[1,2]，许化龙[2]，贺昱曜[1]
（1.长安大学 信息工程学院，陕西 西安 710064；2.第二炮兵工程学院 自动控制系，陕西 西安 710025）

摘要：针对一类三角结构的非线性系统，基于状态参考自适应控制算法和滑模控制技术，研究了其在非匹配未知参数和不确定性干扰下的跟踪控制问题，提出了自适应滑模控制策略，实现了不确定非线性系统的鲁棒输出跟踪．与一般自适应控制相比，允许系统存在非参数化的不确定性和未知扰动，增强了控制系统鲁棒性．仿真算例证明了理论研究成果的正确性和可行性．

关键词：三角结构非线性系统；自适应滑模控制；调节函数；鲁棒性
中图分类号：TP273.2　　**文献标识码**：A

Adaptive sliding mode control based on tuning function for nonlinear systems with triangular structure

YAN Mao-de[1,2], XU Hua-long[2], HE YU-yao[1]
(1. School of Information Engineer, Chang'an University, Xi'an Shaanxi 710064, China;
2. Department of Automatic Control, Second Artillery Engineering Institute, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: In order to deal with the mismatched unknown parameters and nonparametric uncertainties, an adaptive sliding-mode controller is proposed for nonlinear systems with triangular structure. Based on the combination of state reference adaptive control algorithm and sliding mode control strategy, the proposed controller can provide robust output tracking. Compared with the existing controllers, it allows the nonparametric uncertainties and bounded disturbance in the systems. The robustness of the closed loop system is enhanced. Simulations were provided to illustrate the correctness and robustness of the controller.

Key words: nonlinear systems with triangular structure; adaptive sliding mode control; tuning function; robustness

1 引言(Introduction)

对于不确定非线性系统，变结构控制是一种较为有效的跟踪控制方法，也出现了许多研究成果，但它们要求系统的不确定性满足匹配条件[1]．对非匹配不确定非线性系统，Kanellakopoulos 等人首次提出了自适应反演(Backstepping)设计方法[2]，并解决了系统全局稳定自适应调节和跟踪控制问题，而它要求系统不确定性满足可参数化表示的假设，其主要缺点是个未知参数却需个参数估计器．稍后 Seto 等人[3]把自适应反演设计方法推广到三角结构非线性系统，设计了自适应控制器，但该方法仍存在参数重复估计问题，使系统阶次大大提高．随后我国学者慕小武等人[4]利用 Kokotovic 和 Krstic 等人提出的调节函数技术[5]，设计了参数非重复估计的自适应控制器，使系统阶次大大降低．以上结果仅局限于参数不确定性，对系统中存在的非参数不确定性和未知扰动均没有考虑．本文针对三角结构的非线性系统，基于状态参考自适应控制算法和变结构控制技术相结合，设计了一种适用于输出跟踪的自适应滑模控制器，与文献[3,4]中的自适应控制设计方法相比，允许系统存在非匹配未知参数的同时，亦允许匹配的一般不确定性和未知扰动，增强了控制系统鲁棒性．

2 系统描述(System description)

考虑如下三角结构非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \varphi_i^0(x_1,\cdots,x_{i+1}) + \theta^{\mathrm{T}}\varphi_i(x_1,\cdots,x_{i+1}), \\ \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \dot{x}_n = f(x)+\Delta f(x,t)+[g(x)+\Delta g(x,t)]u+d(t), \\ y = x_1. \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期：2002-10-22；收修改稿日期：2003-12-09．
基金项目：全国优秀博士学位论文作者专项资金项目(200250)．

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统可测状态向量,$u, y \in \mathbb{R}$ 分别为系统的输入和输出;$f(x)$ 和 $g(x)$ 为已知非线性函数;$\Delta f(x,t)$ 和 $\Delta g(x,t)$ 为系统未建模动态和时变参数不确定项,$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_p)$ 是未知常参数向量;$\varphi_i^0(x_1, \cdots, x_{i+1})(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 为已知光滑非线性函数;$\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^p$ 为已知光滑非线性函数向量. $d(t)$ 为未知有界干扰.

假设 1　非参数化不确定性满足有界条件,有

$$|\Delta f(x,t)| \leqslant \gamma(x),$$
$$0 < \Delta g_L(x) \leqslant \Delta g(x,t) \leqslant \Delta g_U(x),\ |d(t)| \leqslant D. \tag{2}$$

其中界函数 $\gamma(x)$,$\Delta g_L(x)$,$\Delta g_U(x)$ 已知,D 为已知常数.

假设 2　存在正常数 χ,使得

$$g(x) - \max|\Delta g(x,t)| \geqslant \chi, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

期望的跟踪轨迹 $y_d(t)$ 及其直到 n 阶导数 $\dot y_d$, $\ddot y_d, \cdots, y_d^{(n)}$ 有界且已知,控制目标是设计自适应滑模控制律 $u(x|\hat\theta)$ 和参数 $\hat\theta$ 的自适应律,使系统(1)的输出 y 实现对 y_d 的跟踪.

3　自适应滑模控制器设计(Design of adaptive sliding-mode controller)

3.1　状态参考自适应算法(State reference adaptive algorithm)

首先定义跟踪误差 $z_1 = x_1 - y_d$,状态参考自适应设计将系统变换为 $z_i = x_i - x_{ir}$ 表示的误差系统,取 $x_{ir}(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 x_i 的参考状态. 状态参考自适应设计如下(到 $n-1$ 步停止):

步骤 1　对 z_1 求时间导数得

$$\dot z_1 = W_1 + \theta^{\mathrm T} T_1. \tag{3}$$

其中 $W_1 = \varphi_1^0(x_1, x_2) - \dot y_d$, $T_1 = \varphi_1(x_1, x_2)$.

记 $\tau_1 = z_1 T_1$,对 x_2 定义参考状态为

$$x_{2r} = -W_1 + x_2 - c_1 z_1 - \hat\theta^{\mathrm T} T_1. \tag{4}$$

其中 $\hat\theta$ 为 θ 的估计,c_1 是正设计常数. 定义新变量 $z_2 = x_2 - x_{2r}$,$\tilde\theta = \theta - \hat\theta$ 为估计误差,则

$$\dot z_1 = -c_1 z_1 + z_2 + \tilde\theta^{\mathrm T} T_1. \tag{5}$$

步骤 i $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$　对 z_i 求时间导数并整理得

$$\dot z_i = W_i + \theta^{\mathrm T} T_i + \frac{\partial z_i}{\partial \hat\theta}\dot{\hat\theta} - z_{i-1}. \tag{6}$$

其中

$$W_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\varphi_j^0 + \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial z_i}{\partial y_d^{(j-1)}} y_d^{(j)} + z_{i-1},$$

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial z_i}{\partial x_j}\varphi_j.$$

记 $\tau_i = \tau_{i-1} + z_i T_i$,对 x_{i+1} 定义参考状态为

$$x_{(i+1)r} = -c_i z_i - W_i + x_{i+1} - \hat\theta^{\mathrm T} T_i - \frac{\partial z_i}{\partial \hat\theta}\Gamma\tau_i - \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial z_j}{\partial \hat\theta}\Gamma T_i. \tag{7}$$

其中 c_i 是设计的正常数. 引入新变量 $z_{i+1} = x_{i+1} - x_{(i+1)r}$,则

$$\dot z_i = -z_{i-1} - c_i z_i + z_{i+1} + \tilde\theta^{\mathrm T} T_i + \frac{\partial z_i}{\partial \hat\theta}(\dot{\hat\theta} - \Gamma\tau_i) - \sum_{j=2}^{i-1} z_j \frac{\partial z_j}{\partial \hat\theta}\Gamma T_i. \tag{8}$$

3.2　自适应滑模控制(Adaptive sliding-mode control)

步骤 n　选择最终的参数自适应律并设计自适应滑模控制器. 经过前面 $n-1$ 步的状态参考自适应算法,系统变换为

$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \vdots \\ \dot z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1^{\mathrm T} \\ \vdots \\ T_{n-1}^{\mathrm T} \end{bmatrix}\tilde\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ z_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial \hat\theta} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial \hat\theta} \end{bmatrix}(-\dot{\hat\theta} + \Gamma\tau_{n-1}). \tag{9}$$

其中

$$\sigma_{j,k} = -\frac{\partial z_j}{\partial \hat\theta}\Gamma T_k.$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -c_2 & 1-\sigma_{23} & \cdots & -\sigma_{2,n-1} \\ 0 & -1+\sigma_{23} & -c_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1-\sigma_{n-2,n-1} \\ 0 & \sigma_{2,n-1} & \cdots & -1+\sigma_{n-2,n-1} & -c_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix}.$$

定义滑模超平面

$$s = \delta_1 z_1 + \cdots + \delta_{n-1} z_{n-1} + z_n. \tag{10}$$

其中标量系数 $\delta_i > 0(i = 1, \cdots, n-1)$ 是适当选取的常数,使得多项式

$$P(p) = \delta_1 + \delta_2 p + \cdots + \delta_{n-1} p^{n-2} + p^{n-1} \tag{11}$$

为 Hurwitz 稳定,p 为 Laplace 算子. 构造 Lyapunov 函数

$$V_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} z_k^2 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\tilde{\theta}. \quad (12)$$

计算 $z_n = x_n - x_{nr}$ 和 s 的导数为

$$\dot{z}_n = W_n + \theta^{\mathrm{T}}T_n + \frac{\partial z_n}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial z_n}{\partial x_n}[(g(x) + \Delta g(x))u + \Delta f(x) + d(x,t)], \quad (13)$$

$$\dot{s} = \sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\rho_k + (\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k T_k^{\mathrm{T}} + T_n^{\mathrm{T}})\tilde{\theta} - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\partial z_{k+1}}{\partial\hat{\theta}}(\Gamma\tau_{n-1} - \dot{\hat{\theta}}) + \delta_{n-1}z_n + W_n + \hat{\theta}^{\mathrm{T}}T_n + \frac{\partial z_n}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}} + \frac{\partial z_n}{\partial x_n}[(g(x)+\Delta g(x))u + \Delta f(x) + d(x,t)]. \quad (14)$$

其中

$$W_n = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\varphi_j^0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial z_n}{\partial y_{\mathrm{d}}^{(j-1)}}y_{\mathrm{d}}^{(j)} + \frac{\partial z_n}{\partial x_n}f(x),$$

$$T_n = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial z_n}{\partial x_j}\varphi_j.$$

计算 V_n 的导数,为从 $\dot{V}_n$ 中消除参数估计误差 $\tilde{\theta}$,取参数自适应律和控制器为

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma\tau_{n-1} + \Gamma s(\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k T_k + T_n), \quad (15)$$

$$u = u_c + u_v. \quad (16)$$

其中 u_c 为已知非线性补偿项,u_v 为变结构项,克服非参数化不确定性的影响.他们分别为

$$u_c = -\frac{1}{\frac{\partial z_n}{\partial x_n}g(x)}[\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k\rho_k + \delta_{n-1}z_n - \sum_{k=1}^{n-2}\delta_k\frac{\partial z_{k+1}}{\partial\hat{\theta}}(\Gamma\tau_{n-1}\dot{\hat{\theta}}) + \frac{\partial z_n}{\partial\hat{\theta}}\dot{\hat{\theta}}) + \Gamma\sum_{k=1}^{n-2}z_{k+1}\frac{\partial z_{k+1}}{\partial\hat{\theta}}(\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k T_k + T_n) + W_n + \hat{\theta}^{\mathrm{T}}T_n + ks], \quad (17)$$

$$u_v = -\frac{1}{\frac{\partial z_n}{\partial x_n}(g(x) + \Delta g_L(x))}\left(\left|\frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right|\gamma(x) + \Delta g_U\left|\frac{\partial z_n}{\partial x_n}u_c\right| + \left|\frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right|D + \varepsilon\right)\mathrm{sgn}(s). \quad (18)$$

其中 ε 为任意小的正常数. 若 $\left|\frac{\partial z_n}{\partial x_n}\right| > 0$, 对 Lyapunov 函数求时间导数并整理得

$$\dot{V}_n \leqslant -\sum_{k=1}^{n-1}c_k z_k^2 + z_{n-1}z_n - ks^2 - \varepsilon|s| = -z^{\mathrm{T}}Qz - \varepsilon|s|. \quad (19)$$

其中 Q 为对称矩阵,即

$$Q = \begin{bmatrix} c_1 + k\delta_1^2 & k\delta_1\delta_2 & \cdots & k\delta_1\delta_{n-1} & k\delta_1 \\ k\delta_1\delta_2 & c_2 + k\delta_2^2 & \cdots & k\delta_2\delta_{n-1} & k\delta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k\delta_1\delta_{n-1} & c_{n-1} + k\delta_2^2 & \cdots & c_{n-1} + k\delta_{n-1}^2 & -\frac{1}{2} + k\delta_{n-1} \\ k\delta_1 & k\delta_2 & \cdots & -\frac{1}{2} + k\delta_{n-1} & k \end{bmatrix}. \quad (20)$$

证明 Q 为正定矩阵. Q 直到 $n-1$ 阶主子式为

$$\prod_{h=1}^{i}c_h + k\sum_{h=1}^{i}\prod_{j=1,j\neq h}^{i}c_j\delta_h^2 > 0, 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

则 Q 的第 n 阶主子式为

$$\det(Q) = -\frac{1}{4}\prod_{i}^{n-2}c_i + k(\prod_{i}^{n-1}c_i + \prod_{i}^{n-2}c_i\delta_{n-1} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-2}\prod_{j=1,j\neq i}^{n-2}c_j\delta_i^2), n \geqslant 2. \quad (21)$$

因此,只要选择的设计参数 k 满足,$\det(Q) > 0$,则 Q 为对称正定矩阵.故有 $\dot{V}_n \leqslant \Phi \leqslant -z^{\mathrm{T}}Qz \leqslant 0$,所以平衡点$(z,\tilde{\theta}) = (0,0)$是渐近稳定的,

$$\lim_{t\to\infty} z_1 = \lim_{t\to\infty}(x_1 - y_{\mathrm{d}}) = 0.$$

定理 考虑系统(1),在满足假设 1 和 2 的条件下,设计自适应滑模控制作用(16)和参数自适应律(15),选择设计参数 δ_i 使多项式(11)为 Hurwitz 稳定,k 满足 $\det(Q) > 0$,可实现系统输出 y 对期望跟踪轨迹 y_{d} 的跟踪.

4 仿真算例(Simulation example)

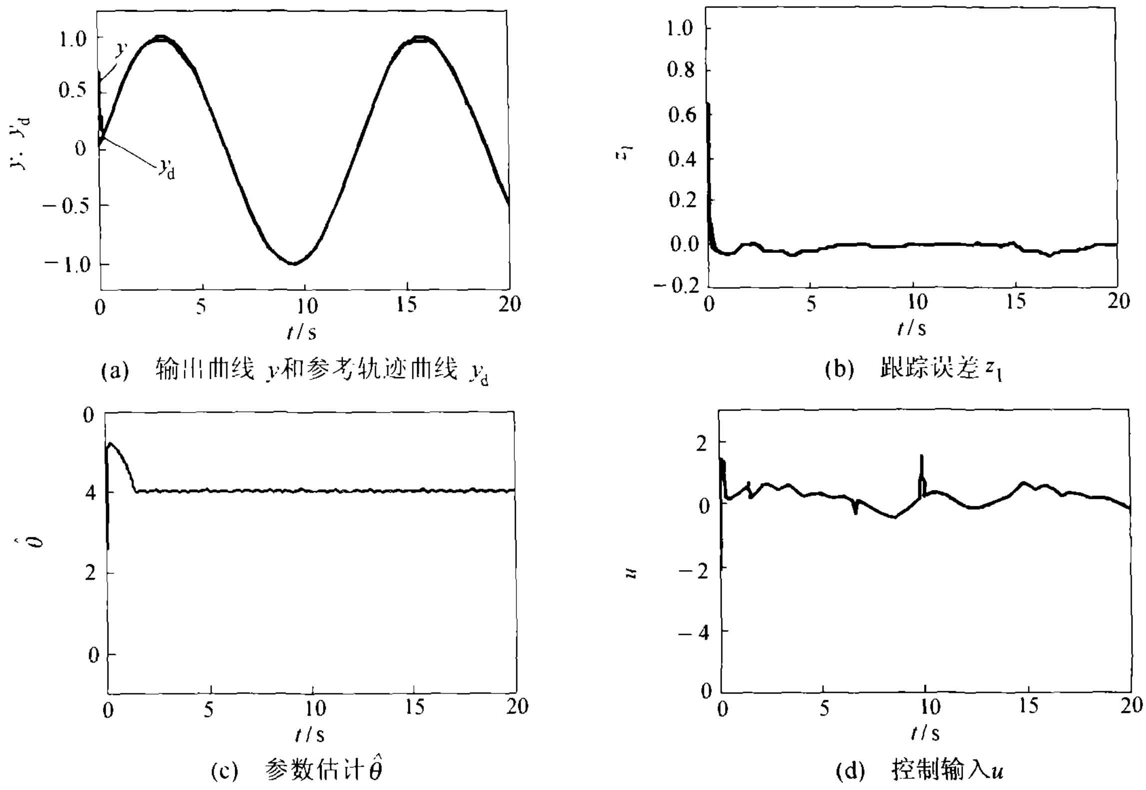
考虑如下非线性系统

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2) + \theta\phi_1,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2) + (1 + \beta(t))u + \alpha(x_1,x_2,t).$$

其中 $f_1 = (x_1+3)^2x_2, f_2 = x_1\sin x_2 + x_2, \phi_1 = (x_1 + 0.3)^2$ 已知;$\beta(t) = 0.5 + 0.3\sin 5t, \alpha(x_1,x_2,t) = x_1\sin x_2\sin t$ 未知.控制任务是使输出 $y = x_1$ 跟踪参考轨迹 $y_{\mathrm{d}} = \sin 0.5t$.

定义误差平面 $s = \delta_1 z_1 + z_2$,假设实际参数 $\theta = 4$.取,$c_1 = 2, \delta_1 = 8, \Gamma = 10. \varepsilon = 0.1$,取 $k = 4$.在初始状态 $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$ 的情况下,对系统进行了仿真,结果如图 1 所示.



(a) 输出曲线 y 和参考轨迹曲线 y_d　　(b) 跟踪误差 z_1

(c) 参数估计 $\hat{\theta}$　　(d) 控制输入 u

图 1　仿真结果

Fig. 1　Simulation results

从仿真结果可以看出,系统在不到 1 秒的时间内即进入稳态,参数估计收敛,跟踪误差收敛到零,闭环系统具有良好的动态性能,控制器对系统的非匹配未知参数和匹配不确定性具有鲁棒性.仿真结果证明理论研究成果.

5　结论(Conclusion)

针对一类三角结构非线性系统,利用前面 $n-1$ 步的状态参考自适应算法,消除了文献[3]中的参数重复估计,到第 n 步引入了滑模超平面设计自适应滑模控制器,使得控制器允许系统存在非匹配未知参数的同时,亦允许匹配的一般不确定性和未知扰动,且系统阶次大大降低,增强了控制系统的鲁棒性.仿真结果表明了该控制器的有效性和可行性.

参考文献(References):

[1] 高为炳.变结构控制理论与设计方法[M].北京:科学出版社,1996.
(GAO Weibing. *Variable Structure Control Theory and Application* [M]. Beijing: Science Press, 1996.)

[2] KANELLAKOPOULOUS I, KOKOTOVIC P V. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 - 1253.

[3] SETO D, ANNASWAMY A M, BAILLIEUL J. Adaptive control of a class of nonlinear systems with a triangular structure [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 1411 - 1428.

[4] 慕小武,席在荣.基于校正函数的一类三角结构非线性系统的自适应控制[J].应用数学学报,2001,24(4):623 - 626.
(MU Xiaowu, XI Zairong. Adaptive control based on tuning function for nonlinear systems with triangular structure [J]. *J of Applied Mathematics*, 2001, 24(4): 623 - 626.)

[5] KRISTIC M, KANELLAKOPOULOUS I, KOKOTOVIC P V. *Nonlinear and Adaptive Control Design* [M]. New York: Wiley, 1995.

作者简介:

闫茂德　(1974 —),男,博士,2001 年 9 月毕业于西北工业大学控制理论与控制工程专业,后在第二炮兵工程学院做博士后研究,现在长安大学信息工程学院任教,主要研究方向为不确定非线性系统控制、空间飞行器导航与控制、自适应变结构控制等, E-mail: yan.maode@163.com;

许化龙　(1941 —),男,教授,博士生导师,主要研究方向为空间飞行器导航与控制、导弹测控系统等;

贺昱曜　(1956 —),男,教授,博士生导师,主要研究方向为不确定非线性系统控制、自适应变结构控制、电力电子和拖动系统等.