第 21 卷第 6 期
2004 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol.21 No.6
Dec. 2004

文章编号: 1000 - 8152(2004)06 - 0932 - 03

内共振系统的混沌同步现象

毕勤胜[1], 邹 勇[1], 刘曾荣[2], 陈关荣[3]

(1. 江苏大学 理学院,江苏 镇江 212013; 2. 上海大学 数学系,上海 200436;
3. 香港城市大学 电子工程系,香港)

摘要: 研究了两耦合混沌系统之间 2:1 内共振条件下的相位混沌同步现象,发现随着耦合程度的增加,系统会进入相位混沌同步. 当耦合程度的增加到一定值时,相位混沌同步现象消失. 通过计算相应的 Lyapunov 指数,发现相位混沌同步现象的产生与消失与耦合系统的 Lyapunov 指数之间存在一定的关系.

关键词: 内共振; 相位混沌同步; Lyapunov 指数

中图分类号: O327,O232　　**文献标识码**: A

Phase synchronization of two coupled chaotic systems with internal resonance

BI Qin-sheng[1], ZOU Yong[1], LIU Zeng-rong[2], CHEN Guan-rong[3]

(1. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang Jiangsu 212013, China;
2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, China;
3. Department of Electrical Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong)

Abstract: Phase synchronization of two coupled chaotic systems with 2:1 internal resonance is studied. It demonstrats that, with the increase of coupling strength, the system leads to phase synchronization. However, when further increasing the coupling strength to a threthold, the phenomenon of phase synchronization disappears. By calculating the Lyapunov exponents, it is found that phase synchronization is related to the change of the values of the Lyapunov exponents.

Key words: internal resonance; phase chaotic synchronization; Lyapunov exponent

1 引言(Introduction)

近几年来混沌同步的研究一直是十分活跃的. 起初人们发现,两相同混沌系统之间由于存在着相互作用,在一定条件下,两系统中的状态变量会逐渐一致,而其时间历程依然保持混沌,即相同混沌同步[1,2]. 这方面的研究很快被推广到一般的混沌系统中. 在一定的条件下,两不相同混沌系统的状态变量之间存在着一定的函数关系,即广义混沌同步[3~5]. 近几年来,以 Rosenblum, Pikovsky 和 Kurths 为代表的学者提出了相位混沌同步的概念[6,7],他们首先定义了混沌运动的相位,并以 Lorenz 等系统为例发现,当耦合程度大于一定值时,两耦合系统的状态变量之间存在着相位的一致性,而其振幅都是混沌的,且是不相关的[8,9]. 这些结果都是基于两耦合系统基本相同只存在微小固有频率扰动的基础上而得到的. 人们自然要问,当系统的固有频率不匹配时,是否还存在相位混沌同步的现象? 而内共振则是工程实际中经常出现的现象,其混沌的模式也比较复杂[10~12]. 本文正是基于这种情况,讨论两混沌系统之间存在 2:1 内共振的条件下系统的相位混沌同步现象. 作者发现,在一定的参数条件下,系统依然保持有相位混沌同步现象. 作者计算了相应的 Lyapunov 指数,发现相位混沌同步现象与耦合系统的 Lyapunov 指数之间存在一定的关系.

2 混沌运动的相位和频率(Phase and frequency of chaotic movement)

混沌运动的相位不是可以直接得到的,只能通过间接的方法来计算. 本文中,借助于 Poincare 映射来定义混沌运动的相位和频率[8,9]. 设 t_k, t_{k+1} 分别表示第 k 和 $k+1$ 第次与 Poincare 截面相交时的时间度量,对 $t_k < t < t_{k+1}$, 其瞬时相位定义为

$$\varphi_k(t) = 2\pi k + 2\pi \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}. \tag{1}$$

收稿日期:2002 - 10 - 29; 收修改稿日期:2003 - 11 - 03.
基金项目:国家自然科学基金项目(10372037,20476041);江苏省自然科学基金项目(BK2002401).

相应地,混沌运动的平均频率为

$$\omega = \lim_{N\to\infty}\frac{2\pi N}{t(N)}. \tag{2}$$

其中 $t(N)$ 表示相点第 N 次相交到 Poincare 截面时所需要的时间.数值上发现当 N 为 10^6 时 $\bar{\omega}$ 能计算到小数点后 4,5 位有效数字.在本文的计算中 N 值设为 10^6.

自治混沌振子系统的相位动力行为可以描述为

$$\dot{\phi} = \omega + F(A). \tag{3}$$

其中 $\bar{\omega}$ 表示混沌运动的平均频率,$F(A)$ 表示频率对振幅的依赖情况(振幅 A 假设为混沌的).对于耦合振子,式(3)的一般形式可以写为

$$\dot{\phi}_{1,2} = \omega_{1,2} + F_{1,2}(A_{1,2}) + \varepsilon G(\phi_{2,1},\phi_{1,2}). \tag{4}$$

其中 G 对每个变量都是以 2π 为周期的描述耦合情况的.在最简单情形下,假设 $G(\phi_1,\phi_2) = \sin(\phi_2 - \phi_2)$.这样相位差为 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. 由式(4)有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\phi}{\mathrm{d}t} = \omega_1-\omega_2-2\varepsilon\sin(\Delta\phi) + F_1(A_1)-F_2(A_2). \tag{5}$$

上式与噪声作用下周期运动的锁相解的表达式的形式是相似的,不过此时其相位的变化依赖于混沌运动的幅值,而不是噪声的大小.这样就可以进一步研究一定条件下其混沌运动的锁相行为.下面对具体的系统进行相位同步分析.

3　内共振耦合 Rossler 混沌系统的相位混沌同步(Chaotic phase synchronization of coupled Rossler systems with internal resonance)

考虑如下耦合 Rossler 混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1 + \varepsilon(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = \omega_1 x_1 + a y_1, \\ \dot{z}_1 = f + z_1(x_1 - c), \\ \dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z} = f + z_2(x_2 - c). \end{cases} \tag{6}$$

其中 $a = 0.15, f = 0.2, c = 10.0$.参数 ω_1,ω_2 分别表示两系统的固有频率,ε 表示耦合程度.为研究 2:1内共振时的相位混沌同步现象,取

$$\omega_1 = 1.0,\ \omega_2 = 0.5 + \sigma. \tag{7}$$

其中 σ 表示频率ω_2 的调谐值.为方便分析起见,固定 $\sigma = 0.04$.图 1 给出了两耦合系统混沌频率之差与 ε 的关系曲线,其中纵坐标$\Delta\omega = \omega_1 - 2\omega_2,\omega_1,\omega_2$ 分别表示两耦合系统混沌频率.从图 1 中可以看出,随着耦合程度的增加,$\Delta\omega$ 也逐渐增加,到 ε 等于 0.02453 时,$\Delta\omega$ 为 0, 也即两耦合系统混沌频率为 1:2,与原系统的频率之比相同.随着 ε 的继续增加,$\Delta\omega$ 固定在 0 值,即不随 ε 的变化而变化,直到 ε 为 0.03496 时 $\Delta\omega$ 才开始增加为非 0 值, 显然 ε 在 0.02453到 0.03496 之间,耦合系统存在相位混沌同步现象.

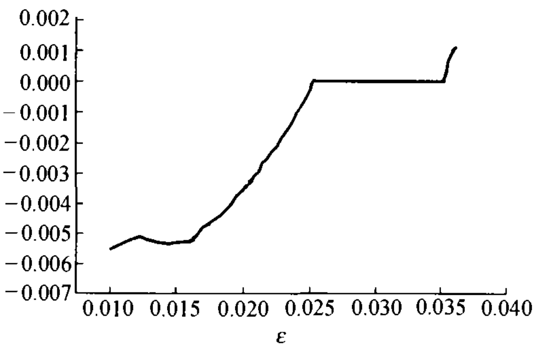

图 1　混沌运动的频率差值 $\Delta\omega = \omega_1 - 2\omega_2$ 与 ε 的关系

Fig. 1　Frequency difference $\Delta\omega = \omega_1 - 2\omega_2$ via coupling strength ε

此时再来考察相应的状态变量,图 2 给出了当 ε 为 0.030 时系统的相图.从图 2 中可以清楚地看出此时系统仍然是混沌的.

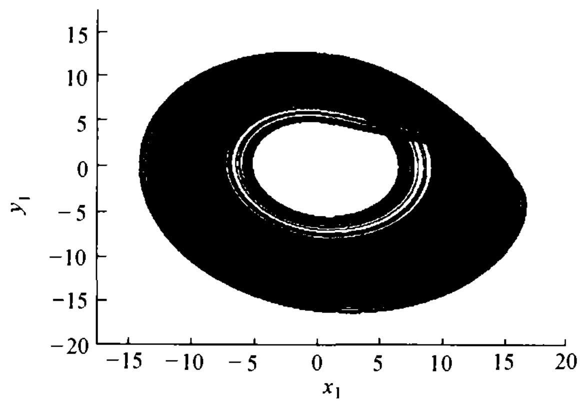

图 2　x_1-y_1 的相图

Fig. 2　Phase trajectory of x_1-y_1

在图 3 中给出了此时两耦合混沌系统状态变量之间的关系.从图 3 中可以看出,此时两耦合混沌系统状态变量之间是不相关的.

为进一步说明系统的相位混沌同步现象,图 4 分别给出了 ε 为 0.010,0.020,0.025,0.028,0.030, 0.032,0.038 时(曲线从下往上)的 $\Delta\omega$ 随时间变化的情况.为方便表示起见,此时已经省去了 $T =$

200000之前的数值，也即图 4 中 $T=0$ 表示 $T=200000$，从此开始计值.

从图 4 中不难看出，随着时间 T 的增加，$\Delta\omega=\bar{\omega}_1-2\bar{\omega}_2$ 值逐渐趋于稳定，当 ε 在一定的范围内，$\Delta\omega$ 固定为 0，即两耦合混沌系统处于相位混沌同步状态.

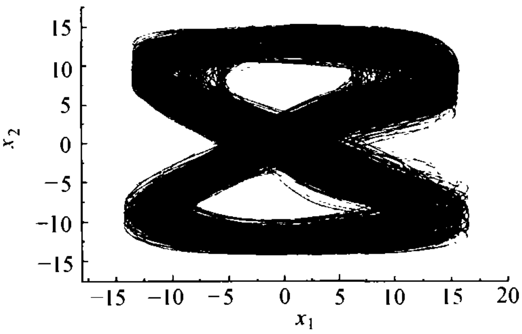

图 3 x_1-x_2 的相图

Fig. 3 Phase trajectory of x_1-x_2

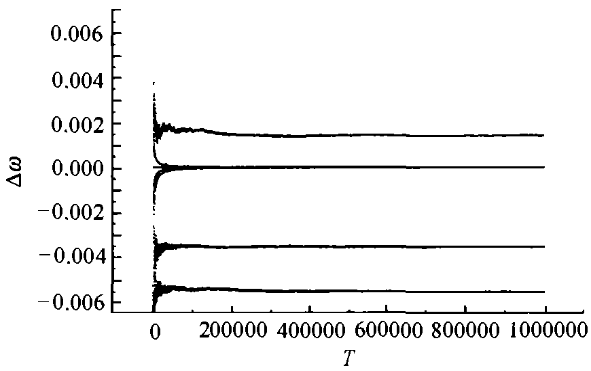

图 4 混沌运动的频率差值 $\Delta\omega=\bar{\omega}_1-2\bar{\omega}_2$ 与 T 的关系

Fig. 4 Frequency difference $\Delta\omega=\bar{\omega}_1-2\bar{\omega}_2$ via time T

为揭示其相位混沌同步的本质，在图 5 中给出了系统前 4 个大的 Lyaponov 指数随耦合程度 ε 的变化情况（其余两个分别在 −14.05 和 −28.31 左右，图略）.

从图 5 中可以发现，在 ε 比较小时，耦合系统有两个 Lyaponov 指数为 0，两个 Lyaponov 指数大于 0，当 ε 增加到 0.02453 时，其中一个先变为负值，此时出现相位混沌同步现象，当 ε 增加到 0.02679 时，其中一个正的 Lyaponov 指数变为负值，但不影响系统的相位混沌同步效应，但当 ε 增加到 0.03496 时，此已变为负值的 Lyaponov 指数又变为 0 值，此时，相位混沌同步现象消失. 从图 5 中可以看出，相位混沌同步现象与 Lyaponov 指数之间存在着密切的关系. 但其内在联系机理目前尚不清楚，有待于进一步研究.

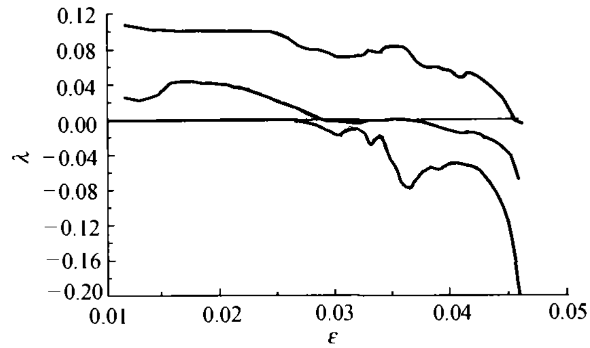

图 5 前 4 个大的 Lyaponov 指数（其中一个恒为 0）

Fig. 5 Four largest Lyapunov exponents (one of which is always zero)

4 结论与讨论（Conclusion and discussions）

混沌系统 2∶1 内共振时，在一定的参数条件下，系统存在着相位混沌同步现象，但与文献[8,9,13]（$\omega_1\approx\omega_2$）的情况不同，当 $\omega_1\approx 2\omega_2$ 时，系统的相位混沌同步现象只在一定的耦合区间内存在，其 Lyaponov 指数的变化情况也不相同，虽然相位混沌同步开始时都对应着一个 0 值 Lyaponov 指数变为负值. 对两个 3 维子系统的耦合系统，子系统分别一正、一负和一个为 0 值 Lyaponov 指数，其中一个 0 值 Lyaponov 指数变为负值是系统相位混沌同步的门槛值，这也可以从文献[13]中的图 1 看出，而耦合系统又具有两个 0 值 Lyaponov 指数，为相位混沌同步现象的另一个门槛值.

需要指出的是，目前考虑的混沌系统还是比较简单的，复杂系统中的相位混沌同步以及外激励对相位混沌同步存在什么样的影响尚需进一步探讨.

还需指出的一点是，虽然在实际生活中，能表示成确定性方程的系统不是很多，也很难将其与噪声和外界的不确定性分开，但系统的固有频率之间总会存在一定的关系，而相位混沌同步也就可能存在，比如 Schafer 等人[14]就在心血管系统中的相位混沌同步应用方面取得了一定的结果.

致谢（Acknowledgement）：

感谢 Juergen Kurths 教授给予的帮助.

参考文献（References）：

[1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(6), 821 – 824.

[2] LANDA P S, ROSENBLUM M G. Synchronization of random self-oscillating [J]. *Soviet Physic Doklady*, 1992, 37(5), 237 – 239.

（下转第 940 页）

参考文献(References):

[1] PECORA L M, CARROLL T L. Sychronization in chaotic systems [J]. *Physical Review Letters*, 1990 64(4): 821 - 825.

[2] WANG C, GE S S. Adaptive synchronization of uncertain chaotic systems via backstepping design [J]. *Chaos, Solitions and Fractals*, 2001, 12(6): 1199 - 1206.

[3] AGIZA H N, YASSEN M T. Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control [J]. *Physics Letters A*, 2001, 278(1): 191 - 197.

[4] BLAKELY J N, GAUTHIER D, JOHNSON G, et al. Experimental investigation of high-quality synchronization of coupled oscillators [J]. *Chaos*, 2000, 10(3): 738 - 744.

[5] CORRON N J. Loss of sychronization in coupled oscillators with ubiquitous local stability [J]. *Physical Review E*, 2001, 63(4): 5203 - 4.

[6] YANCHUK S, MAISTRENKO Y, MOSEKILDE E. Loss of synchronization in coupled Rossler systems [J]. *Physics D*, 2001, 154(1): 26 - 42.

[7] LIU Yongqing, LIU Jinxian. The stability of linear timedependent continuous large-scale systems [J]. *Advances in Modeling and Simulation*, 1987, 9(2): 29 - 37.

[8] 刘永清,宋中昆.大型动力系统的理论与应用——分解、稳定与结构[M].广州:华南理工大学出版社,1988.
(LIU Yongqing, SONG Zhongkun. *Theory and application of large-scale dynamic systems: Decomposition Stability and Structure* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1988.)

作者简介:

闵富红 (1970 —),女,南京师范大学教师电气与电子工程学院讲师,现在南京理工大学自动化系攻读博士学位,目前研究方向为混沌控制、非线性控制等,E-mail: minfuhong@njnu.edu.cn;

王执铨 (1939 —),男,南京理工大学自动化系,教授,博士生导师,主要从事动态大系统的建模以及混沌控制等方面的研究,E-mail: whzwzq@mail.njust.edu.cn.

(上接第934页)

[3] LANDA P S, PERMINOV S M. Interaction of periodic and stochastic self-oscillating system [J]. *Electron*, 1985, 28(4), 285 - 287.

[4] ANISCHENKO V S, VADIVASOVA T E, POSTNOV D E, et al. Synchronization of chaos [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 1992, 2(3): 633 - 644.

[5] BLEKHMAN I I, LANDA P S, ROSENBLUM M G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems [J]. *Applied Mechanics Review*, 1995, 48(11): 733 - 752.

[6] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. Phase synchronization in driven and coupled chaotic oscillators [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems - 1*, 1997, 44(10): 874 - 881.

[7] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. Phase synchronization in chaotic oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(11): 1804 - 1807.

[8] ZAKS M, PARK E, KURTHS J. On phase synchronization by periodic force in chaotic oscillators with saddle equalibria [J]. *Int J of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(11): 2649 - 2667.

[9] ZAKS M, PARK E, ROSENBLUM M G, et al. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization [J]. *Physical Review Letters*, 1999, 82(43): 4228 - 4231.

[10] BI Qinsheng, DAI Huihui. Analysis of nonlinear dynamics and bifurcations of a show arch subjected to periodic excitation with internal resonance [J]. *J of Sound and Vibration*, 2000, 233(4): 557 - 571.

[11] BI Qinsheng, YU Pei. Double Hopf bifurcations and chaos of a nonlinear vibration system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 19(4): 294 - 317.

[12] BI Qinsheng. Dynamics of dynamical analysis of two coupled parametrically excited van der Pol oscillators [J]. *Int J of Nonlinear Mechanics*, 2004, 39(1): 33 - 54.

[13] ROSENBLUM M G, PIKOVSKY A S, KURTHS J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78(22): 4193 - 4196.

[14] SCHAFER C S, ROSENBLUM M G, KURTHS J, et al. Heartbeat synchronized with ventilation [J]. *Nature*, 1998, 392(19): 239 - 240.

作者简介:

毕勤胜 (1968 —),男,博士,教授,博士生导师,先后在加拿大、美国、香港、德国等从事合作研究,在非线性动力学、控制理论及其应用等方面发表论文近40余篇,其中在国际刊物上发表论文近20篇,目前作为项目负责人承担国家自然科学基金两项,省部级基金两项,E-mail: qbi@ujs.edu.cn;

邹勇 (1978 —),男,2004年3月江苏大学理学院硕士毕业,目前在德国Potsdam大学攻读博士学位,导师是Juergen Kurths教授;

刘曾荣 (1946 —),男,教授,博士生导师,在国内外发表论文100多篇,在非线性动力系统理论及其应用等领域做了大量的开拓性工作,曾获江苏科技进步一等奖,上海市科技科技进步二等奖;

陈关荣 (1948 —),男,博士,IEEE Fellow,香港城市大学电子工程学系讲座教授,香港城市大学混沌控制和同步学术研究中心主任,已发表期刊论文250篇,出版著作14部,目前主要从事混沌控制和同步研究工作.