文章编号：1000-8152(2004)06-0986-03

# 矩阵分解的多变量模型参考自适应控制

张正强[1]，解学军[1]，张嗣瀛[2]

（1.曲阜师范大学 自动化研究所，山东 曲阜 273165；2.东北大学 信息科学与工程学院，辽宁 沈阳 110004）

**摘要**：研究了基于高频增益矩阵分解的多变量模型参考自适应控制.为此首先基于矩阵分解构造出新的参数化方程，选取必然等价自适应控制律.然后，引入规范化信号和类Lyapunov函数，获得了规范化自适应律.并进一步给出了虚拟规范化信号的有用性质.最后，严格地给出了闭环系统的稳定性和收敛性分析.

**关键词**：模型参考自适应控制；多变量系统；高频增益矩阵

**中图分类号**：TP273　　　**文献标识码**：A

# Multivariable model reference adaptive control using matrix factorization

ZHANG Zheng-qiang[1], XIE Xue-jun[1], ZHANG Si-ying[2]

(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China;

2. Department of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

**Abstract**: Multivariable model reference adaptive control using high frequency gain matrix factorization is studied. First, a new type of parameterization equation is constructed based on matrix factorization and the certainty-equivalence adaptive control law is chosen. Then, by introducing the normalizing signal and Lyapnov-like function, the adaptive laws with normalization are derived. Third, some useful properties of fictitious normalizing signal are proposed. Finally, the stability and convergence analysis of the closed-loop system is provided.

**Key words**: model reference adaptive control(MRAC); multivariable systems; high-frequency gain matrix

## 1 引言(Introduction)

近来，文献[1]提出了相对阶大于1的多变量模型参考自适应控制方案.与以往的工作[2,3]相比，它充分利用了高频增益矩阵$K_P$的三种分解，去掉了文献[2,3]中关于$K_P$的局限性假设，即存在已知矩阵$S_P$，使得$K_PS_P=(K_PS_P)^T>0$.对于$K_P=LDU$的多变量MRAC方案，作者给出了闭环系统的性能分析.

在文献[1]中，对于另外两种$K_P=S_1D_1U_1$和$K_P=L_2D_2S_2$分解的多变量MRAC方案，作者未给出理论分析.由于这三种分解分别导致适应系统不同，因此分析起来有较大不同.本文针对$K_P=S_1D_1U_1$分解的多变量MRAC方案，利用鲁棒自适应控制的分析方法[3]，严格地给出了该适应系统的稳定性和收敛性分析.

## 2 基于$K_P=S_1D_1U_1$的MRAC设计(Design of MRAC based on $K_P=S_1D_1U_1$)

考虑下面的多输入多输出系统

$$y=G(s)u. \tag{2.1}$$

其中$G(s)\in\mathbb{R}^{m\times m}$是传递函数矩阵.对该系统作如下假设：

A1) $G(s)$的所有传输零点均具有负实部，且$G^{-1}(s)$在$\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$解析，$\delta>0$是某一常数.

A2) $G(s)$是严格正则的、满秩的，且它的修正的左作用器矩阵(定义见文献[3, pp 740])$\xi_m(s)$是对角的和已知的.

A3) $G(s)$的可观性指数$\upsilon$是已知的.

A4) 高频增益矩阵$K_P=\lim\limits_{s\to\infty}\xi_m(s)G(s)$的顺序主子式的符号是已知的.

控制目标是设计控制律使得闭环系统的所有信

收稿日期：2002-12-04；收修改稿日期：2003-11-06.

基金项目：国家自然科学基金项目(60304003)；山东省自然科学基金项目(Q2002G02)；山东省中青年科学家科研奖励基金项目(03BS092).

号均有界,且跟踪误差

$$e(t)=y(t)-y_M(t),\ y_M(t)=W_M(s)r \quad (2.2)$$

尽可能地趋于零,其中 $r\in\Re^m$ 是分段连续的一致有界的信号,且 $\dot r\in L_\infty$.

对式(2.2)中参考模型需作如下假设:

M1) $W_M(s)$ 的所有零、极点都是稳定的,且在 $\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$ 解析.

M2) $\lim\limits_{s\to\infty}\xi_m(s)W_M(s)$ 是有限的和非奇异的.不失一般性,假设 $W_M(s)=\xi_m^{-1}(s)$.

下面给出基于 $K_P=S_1D_1U_1$ 分解的多变量MRAC的设计.由文献[1]知输出误差方程为

$$\xi_m e=K_P[u-\theta^{*T}\omega]. \quad (2.3)$$

其中

$$\theta^{*T}=[\theta_1^{*T}\quad\theta_2^{*T}\quad\theta_3^{*}\quad\theta_4^{*}],$$

$$\theta_1^*,\theta_2^*\in\Re^{m(\nu-1)\times m},\ \theta_3^*\in\Re^{m\times m},\ \theta_4^*=K_P^{-1},$$

$$\omega^T=[\omega_1^T\quad\omega_2^T\quad y^T\quad r^T],$$

$$\omega_1=\frac{\gamma(s)}{p(s)}u,\ \omega_2=\frac{\gamma(s)}{p(s)}y,$$

$$\omega_1,\omega_2\in\Re^{m\times(\nu-1)},$$

$$\gamma(s)=[I\quad Is\quad\cdots\quad Is^{\gamma-2}]^T,$$

$$p(s)=\lambda_0+\lambda_1 s+\cdots+s^{\nu-1},$$

$p(s)$ 是Hruwitz的,且 $1/p(s)$ 在 $\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$ 内解析. $K_P$ 的分解为

$$K_P=S_1D_1U_1. \quad (2.4)$$

其中 $S_1>0$, $U_1$ 是单位上三角形矩阵, $D_1=\mathrm{diag}\{d_i\}$.利用式(2.4)及分解 $U_1u=u-(I-U_1)u$,式(2.3)变为

$$\xi_m e=\Psi^*[u-Q^{*T}\bar\omega]. \quad (2.5)$$

其中

$$\Psi^*=S_1D_1,\ \bar\omega^T=[\omega_1^T\quad\omega_2^T\quad y^T\quad r^T\quad u^T],$$

$$Q^{*T}=[Q_1^{*T}\quad Q_2^{*T}\quad Q_3^{*T}\quad Q_4^{*T}\quad Q_5^{*T}].$$

$Q^*$ 是被重新定义的.利用恒等式 $Q^{*T}\bar\omega=[\bar\Theta_1^{*T}\bar\Omega_1\quad\bar\Theta_1^{*T}\bar\Omega_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^{*T}\bar\Omega_m]^T$,其中 $\bar\Theta_1,\bar\Theta_2,\cdots,\bar\Theta_m$ 是新的参数,

$$\begin{cases}\bar\Omega_1^T=[\bar\Omega_m^T\quad u_2\quad u_3\quad\cdots\quad u_{m-1}\quad u_m],\\ \bar\Omega_2^T=[\bar\Omega_m^T\quad u_3\quad\cdots\quad u_{m-1}\quad u_m],\\ \quad\vdots\\ \bar\Omega_m^T=[\omega_1^T\quad\omega_2^T\quad y^T\quad r^T],\end{cases} \quad (2.6)$$

得

$$\xi_m e=\Psi^*(u-[\bar\Theta_1^{*T}\bar\Omega_1\quad\bar\Theta_2^{*T}\bar\Omega_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^{*T}\bar\Omega_m]^T). \quad (2.7)$$

对于这种新的参数化模型,选取必然等价自适应控制律为

$$u=[\bar\Theta_1^T\bar\Omega_1\quad\bar\Theta_2^T\bar\Omega_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^T\bar\Omega_m]^T. \quad (2.8)$$

其中 $\bar\Theta_i$ 是 $\bar\Theta_i^*$ 的估计.定义 $W(s)=1/f(s)$,这里 $f(s)$ 是Hurwitz的,其次数等于 $\xi_m(s)$ 的对角元的最大次数,并且 $1/f(s)$ 在 $\mathrm{Re}[s]\geqslant-\delta/2$ 内解析.将 $W(s)$ 作用式(2.5)的两边得

$$z=\Psi^*([\bar\Theta_1^{*T}\Phi_1\quad\bar\Theta_2^{*T}\Phi_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^{*T}\Phi_m]^T+z_0). \quad (2.9)$$

其中 $z=-W(s)\xi_m e, z_0=-W(s)u, \Phi_i=W(s)\bar\Omega_i$.选取 $z$ 的估计 $\hat z$ 为

$$\hat z=\Psi([\bar\Theta_1^T\bar\Omega_1\quad\bar\Theta_2^T\bar\Omega_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^T\Omega_m]^T+z_0). \quad (2.10)$$

其中 $\Psi$ 是 $\Psi^*$ 的估计.由式(2.9),(2.10)知规范化的估计误差为

$$\varepsilon=\frac{z-\hat z}{\eta_s^2}=$$

$$-\frac{1}{\eta_s^2}(\tilde\Psi\xi+\Psi^*[\tilde{\bar\Theta}_1^T\Phi_1\quad\tilde{\bar\Theta}_2^T\Phi_2\quad\cdots\quad\tilde{\bar\Theta}_m^T\Phi_m]^T). \quad (2.11)$$

其中

$$\begin{cases}\tilde\Psi=\Psi-\Psi^*,\ \tilde{\bar\Theta}_I=\bar\Theta_i-\bar\Theta_i^*,\\ \xi=[\bar\Theta_1^T\Phi_1\quad\bar\Theta_2^T\Phi_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^T\Phi_m]+z_0.\end{cases} \quad (2.12)$$

选取 $\eta_s^2=1+\xi^T\xi+\sum\limits_{i=1}^m\Phi_i^T\Phi_i$.由 $\Psi^*=S_1D_1$,重写式(2.11)为

$$S_1^{-1}\varepsilon=$$

$$-\frac{1}{\eta_s^2}(S_1^{-1}\tilde\Psi\xi+D_1[\tilde{\bar\Theta}_1^T\Phi_1\quad\tilde{\bar\Theta}_2^T\Phi_2\quad\cdots\quad\tilde{\bar\Theta}_m^T\Phi_m]^T). \quad (2.13)$$

选择

$$V=\frac12\Big\{\sum_{i=1}^m\tilde{\bar\Theta}_i^T\tilde{\bar\Theta}_i+\frac{1}{r_\Psi}\mathrm{tr}[\tilde\Psi^TS_1^{-1}\tilde\Psi]\Big\}, \quad (2.14)$$

选取自适应律为

$$\dot{\bar\Theta}_i=\gamma_i\mathrm{sgn}(d_i)\varepsilon_i\Phi_i,\ \dot\Psi=\gamma_\Psi\varepsilon\xi^T, \quad (2.15)$$

它使得

$$\dot V=-\eta_s^2\varepsilon^TS_1^{-1}\varepsilon\leqslant0. \quad (2.16)$$

## 3　主要结果(Main results)

为简单起见,在下面如无特别说明,用 $c$ 表示任意的正的常数,用 $\|x\|$ 表示 $\|x_t\|_{2\delta}$,时间函数 $x(t)$ 表示为 $x$.由式(2.8)知

$$\bar u\triangleq u-[\bar\Theta_1^{*T}\bar\Omega_1\quad\bar\Theta_2^{*T}\bar\Omega_2\quad\cdots\quad\bar\Theta_m^{*T}\bar\Omega_m]=$$

$$[\tilde{\bar\Theta}_1^T\bar\Omega_1\quad\tilde{\bar\Theta}_2^T\bar\Omega_2\quad\cdots\quad\tilde{\bar\Theta}_m^T\bar\Omega_m]. \quad (3.1)$$

其中 $\tilde{\bar{\Theta}}_i = \bar{\Theta}_i - \bar{\Theta}_i^*$. 由式(2.7)及 $W_M(s) = \xi_m^{-1}(s)$ 得

$$e = W_M(s)\Psi^* \tilde{u}. \tag{3.2}$$

从而由式(2.2)及 $e$ 的定义知

$$y = W_M(s)(r + \Psi^* \tilde{u}). \tag{3.3}$$

注意到式(2.1)及假设 A1)

$$u = G^{-1}(s)W_M(s)(r + \Psi^* \tilde{u}), \tag{3.4}$$

定义虚拟的规范化信号 $\eta_f$ 为

$$\eta_f^2(t) = 1 + \| u_t \|_{2\delta}^2 + \| y_t \|_{2\delta}^2. \tag{3.5}$$

其中 $\| x_t \|_{2\delta}^2 \triangleq \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} |x(\tau)|^2 d\tau, \forall t \geq 0$. 由式(3.2) ~ (3.5), 系统和参考模型的假设, $\| r_t \|_{2\delta}^2 < \infty$ 和 $\Psi^*$ 为定常得

$$\begin{aligned}\eta_f^2(t) &\leqslant 1 + c\| r_t \|_{2\delta}^2 + c\| (\Psi^* \tilde{u})_t \|_{2\delta}^2 \leqslant \\ & c + c\| \tilde{u}_t \|_{2\delta}^2 = \\ & c + c\| [\tilde{\bar{\Theta}}_1^T\bar{\Omega}_1 \quad \tilde{\bar{\Theta}}_2^T\bar{\Omega}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\bar{\Theta}}_m^T\bar{\Omega}_m]_t^T \|_{2\delta}^2.\end{aligned} \tag{3.6}$$

**引理 1** 信号 $\eta_f$ 有以下性质:

1) $\dfrac{\| \omega_i \|}{\eta_f}, \dfrac{| \omega_i |}{\eta_f} \in L_\infty, i = 1,2; \dfrac{\| \bar{\Omega}_i \|}{\eta_f} \in L_\infty, i = 1,2,\cdots,m$;

2) 若 $|\bar{\Theta}_i| \in L_\infty, i = 1,2,\cdots,m$, 则 $\dfrac{y}{\eta_f}, \dfrac{u}{\eta_f}, \dfrac{\bar{\Omega}_i}{\eta_f}, \dfrac{\omega}{\eta_f}, \dfrac{W_1(s)\bar{\Omega}_i}{\eta_f}, \dfrac{n_s}{\eta_f}, \dfrac{\eta_s}{\eta_f}, \dfrac{\| \dot{y} \|}{\eta_f} \in L_\infty$. 这里 $W_1(s)$ 为正则、稳定的传递函数, 且在 $\mathrm{Re}[s] \geqslant -\delta/2$ 内解析, $n_s^2 = \eta_s^2 - 1$.

3) 若 $\bar{\Theta}_i, \dot{\bar{\Theta}}_i (i = 1,2,\cdots,m), \dot{r} \in L_\infty$, 则结论1和2仍成立, 且 $\dfrac{\| \dot{\omega} \|}{\eta_f}, \dfrac{\| \dot{\bar{\Omega}} \|}{\eta_f} \in L_\infty, i = 1,2,\cdots,m$.

证明略.

**定理 1** 若系统(2.1), 参考模型(2.2)分别满足假设 A1) ~ A4)和 M1), M2), 则由控制律(2.8), 自适应律(2.15)组成的基于 $K_p = S_1D_1U_1$ 分解的 MRAC 方案满足

1) $\Psi, \bar{\Theta}_i \in L_\infty; \dot{\Psi}, \dot{\bar{\Theta}}_i, \varepsilon\eta_s, \varepsilon \in L_2 \cap L_\infty$;

2) 闭环系统的所有信号都是有界的;

3) 信号 $z$ 及跟踪误差 $e$ 随时间收敛于零.

**证** 1) 由式(2.14)和(2.16)容易证明结论1.

2) 定义 $\xi = [\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_m]^T, z_0 = [z_{0,1}\ z_{0,2} \cdots z_{0,m}]^T$, 利用引理1和文献[3]附录引理 A.1, A.2, 由式(2.8), (2.12), (2.13), $\Phi_i = W(s)\bar{\Omega}_i, \Psi^* = S_1D_1, \tilde{\Psi} = \Psi - \Psi^*$ 及文献[3]中的常规方法得

$$\| [\tilde{\bar{\Theta}}_1^T\bar{\Omega}_1 \quad \tilde{\bar{\Theta}}_2^T\bar{\Omega}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\bar{\Theta}}_m^T\bar{\Omega}_m]^T \|^2 \leqslant \frac{c}{\alpha_0^2}\eta_f^2 + c\alpha_0^{2n^*} \sum_{i=1}^m \| \tilde{g}_i\eta_f \|^2. \tag{3.7}$$

其中 $\tilde{g}_i^2 = \varepsilon_i^2 + \varepsilon_i^2 n_s^2 + |\dot{\bar{\Theta}}_i|^2$. 由定理的结论1知 $\varepsilon_i, \varepsilon_i n_s, \dot{\bar{\Theta}}_i \in L_2$, 故 $\tilde{g}_i \in L_2$. 把式(3.7)代入式(3.6)得

$$\eta_f^2 \leqslant c + \frac{c}{\alpha_0^2}\eta_f^2 + c\alpha_0^{2n^*} \| \tilde{g}\eta_f \|^2.$$

其中 $\tilde{g}^T = [\tilde{g}_1^T \quad \tilde{g}_2^T \quad \cdots \quad \tilde{g}_m^T]$. 利用 B-G 引理得 $\eta_f \in L_\infty$, 从而由引理1知结论2成立.

3) 利用文献[1]和文献[3]的方法可以证明跟踪误差收敛于零. 证毕.

## 参考文献(References):


[1] IMAI A K, COSTA R R, HSU L, et al. Multivariable MRAC using high frequency gain matrix factorization [C] // *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA: IEEE Press, 2001: 1193 - 1198.

[2] TAO G, IOANNOU P A. Robust model reference adaptive control for multivariable plants [J]. *Int J of Adaptive Control and Signal Processing*, 1988, 2(3): 217 - 248.

[3] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control* [M]. New Jersey: Prentice Hall, 1996.



作者简介:

**张正强** (1978 —), 男, 现在曲阜师范大学电气信息与自动化学院工作, 研究方向为自适应控制, E-mail: qufuzzq@126.com;

**解学军** (1968 —), 男, 曲阜师范大学自动化研究所教授, 1999年在中国科学院系统科学研究所获得博士学位, 研究方向为复杂系统的自适应控制, E-mail: xiexuejun@eyou.com;

**张嗣瀛** (1925 —), 男, 中国科学院院士, 主要从事微分对策、复杂系统的结构和控制等方向的研究.