

文章编号: 1000-8152(2005)01-0012-05

基于模糊观测器的非线性 MIMO 系统 H_2/H_∞ 模糊状态反馈控制

刘国荣^{1,2}, 罗毅平², 万百五¹

(1. 西安交通大学 系统工程研究所, 陕西 西安 710049; 2. 湖南工程学院, 湖南 湘潭 411101)

摘要: 研究了非线性系统 H_2/H_∞ 模糊状态反馈控制问题. 采用局部线性化方法, 用 T-S 模糊线性模型逼近非线性系统, 用模糊观测器重构系统状态. 在希望的 H_∞ 干扰抑制约束下, 通过最小化 H_2 控制性能指标, 实现了模糊状态反馈次优控制. 通过将优化问题转化成 2 个特征值问题(EVP), 应用线性矩阵不等式(LMI)优化方法求解, 使问题的求解大大简化. 所设计的闭环系统在平衡点是局部二次型稳定的, 系统抗扰性能和动态性能均较好.

关键词: 非线性系统; H_2/H_∞ 控制; 模糊控制; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H-two/H-infinity fuzzy state feedback control based on fuzzy observer for nonlinear MIMO systems

LIU Guo-rong^{1,2}, LUO Yi-ping², WAN Bai-wu¹

(1. System Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China;

2. Hunan Institute of Engineering, Xiangtan Hunan 411101, China)

Abstract: The problem of mixed H-two/H-infinity fuzzy state feedback control for nonlinear systems is studied. A nonlinear plant is approximated by a Takagi-Sugeno fuzzy linear model using local linearization method. The system states are estimated by a fuzzy linear observer. The fuzzy state feedback suboptimal controller is achieved by minimizing the H-two control performance with a desired H-infinity disturbance rejection constraint. The optimization problem is transformed into two eigenvalue problems(EVP'S) - One for observer and the other for controller. The EVP'S can be solved very efficiently using the linear matrix inequality(LMI) optimization techniques; so it can simplify the design. The closed-loop system designed by the proposed method is locally quadratically stable at equilibrium and its disturbance rejection and dynamic performance are satisfying as well.

Key words: nonlinear system; H-two/H-infinity control; fuzzy control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

对于非线性系统, 采用模糊控制方法进行控制, 这是近 10 年来人们研究得较多的一个课题^[1~6]. 一些作者用 T-S 模糊线性模型来逼近非线性系统, 然后实行基于模型的模糊最优控制^[1], 使系统获得 H_2 最优性能指标; 另一些作者则实行 H_∞ 控制, 使系统获得 H_∞ 最优性能指标^[2~4]. 但对于一个实际系统来说, 它的动态性能和鲁棒性是同等重要的. 人们希望闭环控制系统既具有好的动态性能, 又具有较强的鲁棒性. 所以近几年人们开始研究非线性系统的 H_2/H_∞ 模糊控制问题. 文献[5, 6]研究了仿射非线性系统的 H_2/H_∞ 模糊控制问题, 提出了一种 H_2/H_∞ 混合模糊控制方法. 然而, 所提方法要么涉及求解一个交叉耦合的 Hamilton-Jacobi-Issacs 偏微分方程(直到

现在, 求解这一偏微分方程无论是采用数值方法还是解析方法, 都是非常困难的), 要么涉及多个边界条件, 求解非常复杂. 本文研究较一般情况, 研究存在外扰的非线性 MIMO 系统的 H_2/H_∞ 混合模糊控制问题. 用 T-S 模糊线性模型逼近非线性系统, 对系统进行模糊状态反馈控制. 考虑到大多数非线性系统状态不可测量, 用模糊观测器重构系统状态.

本文的主要贡献是, 对于存在外部扰动的非线性系统, 提出了一种系统的基于模糊观测器的 H_2/H_∞ 模糊状态反馈控制设计方法. 该方法使闭环系统的稳定性、鲁棒性和动态性能同时得以保证, 将一个复杂的约束优化问题转化成了 2 个特征值问题(EVP), 利用 LMI 方法求解, 方法简单, 便于应用. 与已经提出的一些方法比较, 本文提出的方法只有一

个边界条件,求解简单,且考虑了模糊逼近误差对系统性能的影响.

2 问题的描述(Problem description)

考虑如下形式的非线性多输入/多输出系统:

$$\dot{x}(t) = f(x, u) + \omega_d, \quad (1)$$

$$y = Cx(t), \quad (2)$$

式中, $x = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ 为控制向量, $y = [y_1, y_2, y_3, \dots, y_p]^T \in \mathbb{R}^p$ 为输出向量, $f(x, u)$ 是光滑函数,且 $f(0, 0) = 0$. $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 为输出矩阵, $\omega_d \in \mathbb{R}^n$ 表示未知而有界的外部干扰.

非线性系统(1)的局部线性输入/输出关系可采用 T-S^[7]模糊线性动力学模型近似表示如下:

S^i : if $z_1(t)$ is $F_1^i \dots$ and $z_g(t)$ is F_g^i

then

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + \omega_i(t), \\ y = C_i \hat{x}(t), \\ \omega(t) = \omega_i(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

(3)

式中, F_j^i 是模糊子集, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, L 是 if-then 规则数, $z_1(t), \dots, z_g(t)$ 是前件变量, $\omega_i(t) = f(x, u) - A_i \hat{x}(t) - B_i u(t) + \omega_d(t)$ 为逼近误差与外部干扰之和.

通过模糊推理,可得模糊系统(3)的最后输出为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + \omega(t), \\ y(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) C_i \hat{x}(t), \\ \omega(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) \omega_i(t) = \\ f(x, u) - \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + \omega_d. \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$\mu_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g F_j^i(z_j(t)) / \sum_{i=1}^L \prod_{j=1}^g F_j^i(z_j(t)), \quad (5)$$

$F_j^i(z_i(t))$ 表示 $z_i(t)$ 属于 F_j^i 的隶属度, $F_j^i(z_i(t)) \geq 0, j = 1, 2, \dots, g$. 假定 $\forall t, \sum_{i=1}^L \prod_{j=1}^g F_j^i(z_i(t)) > 0$, 则有 $\mu_i(z(t)) \geq 0 (i = 1, 2, \dots, L), \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) = 1$.

采用模糊观测器来重构系统的状态,采用模糊状

态反馈控制器来控制上述系统,可求得模糊观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) [A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + \\ &\quad G_i(y(t) - \hat{y}(t))], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) C_i \hat{x}(t), \quad (7)$$

模糊控制器:

$$u(t) = \sum_{i=1}^L -\mu_j(z(t)) K_i \hat{x}(t), \quad (8)$$

式中, $G_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n} (i = 1, 2, \dots, L)$ 分别为输出误差反馈矩阵和状态反馈矩阵.

由式(4),(6)和(8)可得

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \cdot \\ &\quad \mu_j(z(t)) [(A_i - B_i K_j) \hat{x}(t) + G_i C_j e(t)], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \\ &\quad \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) A_i e(t) - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L G_i C_j e(t) + \omega, \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 为重构误差. 令

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ e \end{bmatrix}, A_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & G_i C_j \\ 0 & A_i - G_i C_j \end{bmatrix}, \tilde{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \end{bmatrix},$$

则有

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \cdot A_{ij} \cdot \tilde{x}(t) + \tilde{\omega}. \quad (11)$$

$\tilde{\omega}$ 由模糊逼近误差和外部干扰组成,它将使控制系统的性能变差,甚至导致非线性控制系统不稳定.怎样抑制 $\tilde{\omega}$ 对系统性能的影响,使闭环系统具有较强的鲁棒性是要考虑的第一个问题.怎样设计反馈矩阵 $K_i (i = 1, 2, \dots, L)$,使闭环系统具有较好的动态性能是要考虑的第二个问题.我们用 H_∞ 范数来衡量系统的鲁棒性,用 H_2 范数来衡量系统的动态性能,对系统实行 H_2/H_∞ 混合控制.

考虑如下 H_∞ 控制性能指标和二次型性能指标:

$$\int_0^{t_f} \tilde{x}^T \tilde{Q}_1 \tilde{x} dt \leq \tilde{x}^T(0) P_1 \tilde{x}_1(0) + \rho^2 \int_0^{t_f} \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} dt, \quad (12)$$

式中, t_f 表示控制时间终端, ρ 为衰减水平常数, $\tilde{Q}_1$ 为适当维数的加权对称正定矩阵, P_1 为加权正定矩阵.

$$J_2(u) = \int_0^{t_f} \{ \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_2 \tilde{x}(t) + u^T(t) \tilde{R}_2 u(t) \} dt, \quad (13)$$

式中, $\tilde{Q}_2, \tilde{R}_2$ 为适当维数的加权对称正定阵.

设计目标是, 对于增广系统(11), 寻找一个模糊控制器(8), 使得系统在满足 H_∞ 干扰抑制约束(12)的条件下, 二次型性能指标(13)获得次优解. 在无外扰的条件下, 闭环系统

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \Delta \tilde{\omega} \quad (14)$$

在平衡点 ($\tilde{x}(t) = 0$) 是局部二次型稳定的. 式中

$$\Delta \tilde{\omega} = [0, f(x, \mu) - \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))]^T \quad (15)$$

为增广逼近误差.

假定 1 对于系统(1), 存在边界参数 ΔA , 使得

$$\|\Delta \omega(t)\| \leq \|\Delta A x(t)\|, \forall x(t), \quad (16)$$

式中, $\Delta \omega = f(x, u) - \sum_{i=1}^L \mu_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))$ 为逼近误差.

3 H_2/H_∞ 模糊状态反馈控制 (H-two/H-infinity fuzzy state feedback control)

考虑 H_∞ 控制, 对于系统(14), 选择 Lyapunov 函数 $V(t) = \tilde{x}^T(t) P_1 \tilde{x}(t)$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T(t) P_1 \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P_1 \dot{\tilde{x}}(t) = \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (\tilde{A}_{ij}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{ij}) \tilde{x}(t) - \\ & (\frac{1}{\rho} P_1 \tilde{x}(t) - \rho \omega(t))^T (\frac{1}{\rho} P_1 \tilde{x}(t) - \rho \tilde{\omega}(t)) + \\ & \rho^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) + \frac{1}{\rho^2} \tilde{x}^T(t) P_1 P_1 \tilde{x}(t) \leq \\ & \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (\tilde{A}_{ij}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{ij} + \\ & \frac{1}{\rho^2} P_1 P_1) \tilde{x}(t) + \rho^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t). \end{aligned} \quad (17)$$

定理 1 对于增广系统(11), 如果 $P_1 = P_1^T > 0$ 是下列矩阵不等式的公共解:

$$\tilde{A}_{ij}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{\rho^2} P_1 P_1 + \tilde{Q}_1 < 0, i = 1, 2, \dots, L, \quad (18)$$

那么, 对于给定的衰减水平常数 ρ , 可获得 H_∞ 控制性能指标(12).

证 由式(18)有

$$\tilde{A}_{ij}^T P_1 + P_1 \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{\rho^2} P_1 P_1 < -\tilde{Q}_1, \quad (19)$$

将上式代入式(17)可得

$$\dot{V}(t) \leq$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_1 \tilde{x}(t) + \\ & \rho^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) = \\ & - \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_1 \tilde{x}(t) + \rho^2 \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t), \end{aligned} \quad (20)$$

积分上式两边得

$$\begin{aligned} V(t_f) - V(0) &\leq \\ & - \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_1 \tilde{x}(t) dt + \rho^2 \int_0^{t_f} \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) dt, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_1 \tilde{x}(t) dt &\leq \tilde{x}^T(0) P_1 \tilde{x}(0) + \\ & \rho^2 \int_0^{t_f} \tilde{\omega}^T(t) \tilde{\omega}(t) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

证毕.

通过实行 H_∞ 控制, 使外部干扰和逼近误差的影响得到了有效衰减. 下面讨论求解系统的二次型性能指标最优控制问题. 因为存在逼近误差 $\Delta \tilde{\omega}$, 求解系统的二次型性能指标最优解困难, 我们放弃求最优解, 通过最小化 H_2 性能指标(13)来求问题的次优解. 由式(13)有

$$\begin{aligned} J_2(u) &= \int_0^{t_f} \{ \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_2 \tilde{x}(t) + u^T(t) \tilde{R}_2 u(t) \} dt = \\ & \tilde{x}^T(0) P_2 \tilde{x}(0) - \tilde{x}^T(t_f) P_2 \tilde{x}(t_f) + \\ & \int_0^{t_f} \{ \tilde{x}^T(t) \tilde{Q}_2 \tilde{x}(t) + u^T(t) \tilde{R}_2 u(t) + \\ & \frac{d}{dt} (\tilde{x}^T(t) P_2 \tilde{x}(t)) \} dt \leq \\ & (\tilde{x}^T(0) P_2 \tilde{x}(0) + \int_0^{t_f} \{ \tilde{x}^T(t) (\tilde{Q}_2 + \\ & \sum_{j=1}^L \mu_j(z(t)) \tilde{K}_j^T \tilde{R}_2 \sum_{j=1}^L \mu_j(z(t)) \tilde{K}_j \} \tilde{x}(t) + \\ & (\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \Delta \tilde{\omega})^T P_2 \tilde{x}(t) + \\ & \tilde{x}^T(t) P_2 (\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{A}_{ij} \tilde{x}(t) + \Delta \tilde{\omega}) \} dt \leq \\ & \tilde{x}^T(0) P_2 \tilde{x}(0) + \\ & \int_0^{t_f} \{ \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (\tilde{Q}_2 + \\ & \tilde{K}_j^T \tilde{R}_2 \tilde{K}_j + \tilde{A}_{ij}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{ij} + P_2 P_2) \tilde{x}(t) + \\ & \Delta \tilde{\omega}^T(t) \Delta \tilde{\omega}(t) \} dt, \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\tilde{K}_i = [K_i, 0]$. 由假定 1 有 $\|\Delta \tilde{\omega}(t)\| \leq \|\Delta A(x)\|$, 于是

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\omega}^T(t) \Delta \tilde{\omega}(t) &\leq \\ (\Delta A x(t))^T (\Delta A x(t)) &= \tilde{x}^T(t) \phi^T \phi \tilde{x}(t), \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\phi = [\Delta A \quad \Delta A]$. 将式(23)代入(22)得

$$J_2(u) \leq \tilde{x}^T(0) P_2 \tilde{x}(0) + \int_0^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (\tilde{Q}_2 + K_j^T \tilde{R}_2 \tilde{K}_j + \tilde{A}_{ij}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{ij} + P_2 P_2 + \phi^T \phi) \tilde{x}(t) \right\} dt. \quad (24)$$

如果 $\tilde{A}_{ij}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{ij} + \tilde{K}_j^T \tilde{R}_2 \tilde{K}_j + P_2 P_2 + \phi^T \phi + \tilde{Q}_2 < 0$, 那么 $J_2(u) \leq \tilde{x}^T(0) P_2 \tilde{x}(0)$. 显然, 二次型性能指标次优控制问题可转化为下述优化问题:

$$\min_{P_2} x^T(0) P_2 \tilde{x}(0), \quad (25)$$

$$A_{ij}^T P_2 + P_2 \tilde{A}_{ij} + \tilde{K}_j^T \tilde{R}_2 \tilde{K}_j + P_2 P_2 + \phi^T \phi + \tilde{Q}_2 < 0, \quad (26)$$

$$P_2 > 0. \quad (27)$$

通过最小化 $J_2(u)$ 的上界, 获得二次型性能指标(13)的次优解, 实现 H_2 次优控制.

上述分别讨论了 H_∞ 模糊控制和 H_2 模糊控制问题. 如果能找到一个共同的 P , 使它同时满足式(18)和(26), 那么就达到了我们的控制目标, 即系统在满足 H_∞ 干扰抑制约束(12)的条件下, 实现了 H_2 次优模糊控制. 也就是说, 系统实现了 H_2/H_∞ 混合模糊控制.

$$\begin{bmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P_{11} + P_{11} (A_i - B_i K_j) + \frac{1}{\rho^2} P_{11}^2 + Q_{11} & P_{11} G_i C_j \\ (G_i C_j)^T P_{11} & (A_i - G_i C_j)^T P_{22} + P_{22} (A_i - G_i C_j) + \frac{1}{\rho^2} P_{22}^2 + Q_{12} \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\begin{bmatrix} (A_i - B_i K_j)^T P_{11} + P_{11} (A_i - B_i K_j) + K_j^T R_2 K_j + \Delta A^T \Delta A + P_{11}^2 + Q_{211} & P_{11} G_i C_j + \Delta A^T \Delta A \\ (G_i C_j)^T P_{11} + \Delta A^T \Delta A & (A_i - G_i C_j)^T P_{22} + P_{22} (A_i - G_i C_j) + \Delta A^T \Delta A + P_{22}^2 + Q_{222} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

令 $W = \text{diag}\{W_{11}, 1\} = \text{diag}\{P_{11}^{-1}, 1\}$ 将式(33), (34)乘以 W , 并利用 Schur Complement 得

$$\begin{bmatrix} M_{11} & W_{11} & M_i & O \\ W_{11} & -Q_{11}^{-1} & O & O \\ M_i^T & O & M_{22} & P_{22} \\ O & O & P_{22} & -\rho^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & W_{11} & H_j^T & N_i & O \\ W_{11} & N_{22} & O & O & O \\ H_j & O & N_{33} & O & O \\ N_i^T & O & O & N_{44} & P_{22} \\ O & O & O & P_{22} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (36)$$

其中

$$H_j = K_j W_{11},$$

$$M_{11} = W_{11} A_i^T + A_i W_{11} - B_i H_j - (B_i H_j)^T + 1/\rho^2 I,$$

上述问题能描述如下:

$$\min_P x^T(0) P \tilde{x}(0), \quad (28)$$

$$P = P^T = P_1 = P_2 > 0, \quad (29)$$

$$\tilde{A}_{ij}^T P + P \tilde{A}_{ij} + \frac{1}{\rho^2} P P + \tilde{Q}_1 < 0, \quad (30)$$

$$A_{ij}^T P + P \tilde{A}_{ij} + \tilde{K}_j^T \tilde{R}_2 \tilde{K}_j + P P + \phi^T \phi + \tilde{Q}_2 < 0, \quad i = j = 1, 2, \dots, L. \quad (31)$$

从上面的分析可知, 基于模糊观测器的 H_2/H_∞ 混合模糊控制器设计的关键是通过求解式(28)~(31)的优化问题求解公共矩阵 P . 因为式(28)~(31)不是一个凸函数优化问题, 难以求出公共矩阵 P . 为此, 将它转化为线性矩阵不等式(LMI)问题. LMI 又称为特征值(EVP)问题, 可以通过凸最优化方法来求解.

为了简化设计, 选择

$$\begin{cases} P = \text{diag}\{P_{11}, P_{22}\}, \\ \tilde{Q}_1 = \text{diag}\{\tilde{Q}_{111}, \tilde{Q}_{122}\}, \\ \tilde{Q}_2 = \text{diag}\{\tilde{Q}_{211}, \tilde{Q}_{222}\}. \end{cases} \quad (32)$$

这样选择 $P, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$, 可以将模糊控制器和模糊观测器的设计分离开来. 将式(32)代入(30), (31)得

$$M_i = G_i C_j,$$

$$M_{22} = A_i^T P_{22} + P_{22} A_i - Z_i C_j - (Z_i C_j)^T + Q_{122},$$

$$Z_i = P_{22} G_i,$$

$$N_{11} = W_{11} A_i^T + A_i W_{11} - (B_i H_j)^T - B_i H_j + I,$$

$$N_{22} = -(\Delta A^T \Delta A + Q_{211})^T,$$

$$N_{33} = -R_2^{-1},$$

$$N_i = G_i C_j + W_{11} \Delta A^T \Delta A,$$

$$N_{44} = A_i^T P_{22} + P_{22} A_i - Z_i C_j - (Z_i C_j)^T + \Delta A^T \Delta A + Q_{222}.$$

要确定的参数有 P_{11}, P_{22}, K_j 和 G_j 4个, 显然, 式(35)和(36)不是一个凸函数, 难以直接求解. 为此, 把这个问题分解成两步来求解, 首先求解观测器参数, 然后求解控制器参数.

由式(35), (36)可以推出

$$A_i^T P_{22} + P_{22} A_i - Z_i C_j - (Z_i C_j)^T + Q_{122} < 0, \quad (37)$$

$$A_i^T P_{22} + P_{22} A_i - Z_i C_j - (Z_i C_j)^T + \Delta A^T \Delta A + Q_{222} < 0. \quad (38)$$

式(37)和(38)是两个线性矩阵不等式. 所以, 优化问题式(28)~(31)可转化为以下两个 EVP 问题求解:

$$1) \min e^T(0) P_{22} e(0) \quad (39)$$

s. t. $P_{22} = P_{22}^T > 0$, 式(37), (38).

其中 $G_i = P_{22}^{-1} Z_i$.

$$2) \min \hat{x}^T(0) W_{11}^{-1} \hat{x}(0) \quad (40)$$

s. t. $W_{11} = W_{11}^T > 0$, 式(35), (36).

先求解第一个 EVP, 获得 P_{22} , G_i , 再将它们代入式(35)和(36), 式(35), (36) 就变成了两个线性矩阵不等式(LMI), 然后再求第二个 EVP 获得 P_{11} 与 K_j ($K_j = H_j W_{11}^{-1}$).

综合上述设计过程, 可得两步设计法的设计程序如下:

- 1) 选择隶属函数和模糊系统规则;
- 2) 选择权矩阵 $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2$ 和 $\tilde{R}_2$, 给定衰减水平常数 ρ 和边界参数 ΔA ;
- 3) 解第一个 EVP 问题(39), 求得 P_{22} 和 G_i ($G_i = P_{22}^{-1} Z_i$);
- 4) 将 P_{22}, Z_i 和 G_i 代入式(35), (36), 解第二个 EVP 问题(40), 求得 P_{11} 和 K_j ($P_{11} = W_{11}^{-1}, K_j = H_j W_{11}^{-1}$);
- 5) 检查假定 1 是否满足, 如果不满足, 调节边界参数 ΔA , 重复 3)~5);
- 6) 构造模糊观测器(6);
- 7) 构造模糊控制器(8).

4 系统稳定性分析(Analysis of system stability)

定理 2 在非线性系统(4)中, 若对于 H_2/H_∞ 次优控制问题(28)~(31), 存在公共解 $P = P^T > 0$, 则闭环系统(14)在平衡点 $\tilde{x} = 0$ 是局部二次稳定的.

证 构造 Lyapunov 函数

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t),$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t)) &= \dot{\tilde{x}}^T(t) P \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P \dot{\tilde{x}}(t) = \\ &\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (A_{ij}^T P + \\ &P A_{ij}) \tilde{x}(t) + \Delta \tilde{\omega}^T P \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P \Delta \tilde{\omega} = \\ &\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (A_{ij}^T P + \\ &P A_{ij}) \tilde{x}(t) - (\Delta \tilde{\omega}(t) - P \tilde{x}(t))^T (\Delta \tilde{\omega} - \\ &P \tilde{x}(t)) + \Delta \tilde{\omega}^T(t) \Delta \tilde{\omega}(t) + \tilde{x}^T(t) P P \tilde{x}(t) \leq \\ &\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \tilde{x}^T(t) (A_{ij}^T P + \\ &P A_{ij} + P P + \phi^T \phi) \tilde{x}(t) \leq \\ &\sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (-\tilde{K}_j^T \tilde{R} \tilde{K}_j - \tilde{Q}_2) < 0. \end{aligned}$$

故定理得证.

由定理 2 可知, 按照第 3 节提出的方法设计的闭环系统, 在平衡点 $\tilde{x} = 0$ 是局部二次稳定的.

5 结论(Conclusion)

本文研究了非线性多输入/多输出系统的 H_2/H_∞ 混合模糊控制问题, 提出了一种基于模糊观测器的模糊状态反馈控制设计方法. 与已经提出的一些 H_2/H_∞ 混合控制方法相比, 该方法具有以下特点:

- 1) 考虑了模糊逼近误差和外部干扰对系统性能的影响. 既能有效地抑制外部干扰和模糊逼近误差对系统性能的影响, 又能使系统获得较好的动态性能;
- 2) 采用两步设计法, 将一个复杂的约束优化问题转化成了两个特征值问题(EVP). 然后采用 LMI 方法来求解 EVP, 大大简化了控制系统的设计, 便于应用;
- 3) 需要调整的边界参数只有一个, 由于需要调整的边界参数少, 所以大大缩短了设计时间, 简化了设计过程.

参考文献(References):

- [1] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250 - 265.
- [2] CAO S G, REES N W, FENG G. H-infinity control of nonlinear continuous time systems based on dynamical fuzzy models [J]. *Int J of Systems Science*, 1996, 27(9): 821 - 830.
- [3] TANAKA K, SANO M. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1994, 2(2): 119 - 134.
- [4] CHEN B S, TSENG C S, UANG H J. Robustness design of nonlinear dynamic systems via fuzzy linear control [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 1999, 7(5): 571 - 585.
- [5] CHEN B S, CHANG Y C. Nonlinear mixed H_2/H_∞ control for robust tracking design of robotics systems [J]. *Int J of Control*, 1997, 67(6): 837 - 857.
- [6] CHEN B S, TSENG C S, UANG H J. Mixed H_2/H_∞ fuzzy output feedback control design for nonlinear dynamic systems: An LMI approach [J]. *IEEE Trans on Fuzzy System*, 2000, 8(3): 249 - 265.
- [7] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 - 132.

作者简介:

刘国荣 (1957—), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为模糊控制, 神经网络控制和非线性系统控制等, E-mail: lgr@mail1.hnie.edu.cn;

罗毅平 (1965—), 男, 副教授, 主要研究方向为动力系统的稳定性理论等;

万百五 (1928—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为大系统的智能控制与优化等.