文章编号：1000－8152(2005)01－0029－06

# 基于自适应AGBFN的不确定非线性系统的跟踪控制

刘 亚，侯 霞，胡寿松
(南京航空航天大学 自动化学院，江苏 南京，210016)

**摘要**：针对一类具有未知不确定性的非线性系统，提出了一种基于观测器的自适应不对称高斯基函数网络(AGBFN)跟踪控制方案.当系统只有输出可以测量时，通过设计观测器对其进行在线状态估计，进而构造反馈控制律和自适应控制律.所提出的完全自适应AGBFN，可以在线更新网络所有参数，克服了传统RBF网络对称性约束，提高了网络的适应性和学习能力，可以有效地对消系统未知不确定项的影响.证明了闭环系统所有误差信号最终一致有界，且系统输出较好地跟踪参考模型输出.仿真结果表明了所提出方法的有效性.

**关键词**：不对称高斯基函数；自适应神经网络；跟踪控制；不确定非线性系统
**中图分类号**：TP273 **文献标识码**：A

# Tracking control for uncertain nonlinear system based on adaptive asymmetric Gaussian basis function network

LIU Ya, HOU Xia, HU Shou-song
(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

**Abstract**: An observer-based adaptive asymmetric Gaussian basis function network (AGBFN) tracking control scheme is designed for a class of nonlinear system with unknown uncertain nonlinearities. When only the output of the system is measurable, the observer is designed for state estimation, and then feedback control law and adaptive control law are developed. The proposed full adaptive AGBFN, which eliminates the symmetry restriction of traditional RBFN and provides the neurons with higher flexibility, can get rid of the effect of the unknown uncertainties by updating all parameters of the AGBFN online. All the errors in closed-loop nonlinear system are uniformly ultimately bounded and the output of the system is proven to converge to a small neighborhood of the desired trajectory. Simulation shows that the proposed method is effective.

**Key words**: asymmetric Gaussian basis function(AGBF); adaptive neural network; tracking control; uncertain nonlinear system

## 1 引言(Introduction)

系统建模的不确定性和实际运行环境的变化，是实际工程控制系统中普遍存在的一个问题，如何实现不确定系统的鲁棒控制，已经受到了广泛重视.近年来，由于神经网络技术的研究和发展，使得神经网络在非线性系统的辨识和控制等方面取得了一定的成果[1~4].文献[2,4]表明，在各种神经网络结构中，基于高斯函数的径向基网络(RBFN)更为适合非线性系统控制.但是在自适应RBFN控制方案[1,2,5]应用中，RBFN的函数近似能力往往受到高斯函数对称性的约束，导致较大的近似误差，而近似误差的减小则必须以网络规模的增大为代价.

本文采用具有不对称宽度的伪高斯函数作为基函数构造神经网络控制，避免了传统高斯基函数的对称性限制，具有更大的可变性和延展性，使得隐层神经元在函数近似上具有更高的适应性，提高了网络的近似能力，同时通过在线调整AGBFN的全部参数，进一步提高了网络的在线学习能力.同时，考虑到实际系统在很多情况下，只有系统输出可以测量，文中设计了观测器对系统状态进行估计，提出了观测器和控制器相结合的控制方案，使得系统输出可以较好地跟踪参考模型的输出，最后通过仿真实例说明了所提出方法的有效性.

## 2 系统描述(System description)

考虑一类如下不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,\dot{x}) + g(x,\dot{x})u + \tilde{f}(x,\dot{x},u), \\ y = x. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态向量，$u \in \mathbb{R}^n$ 是系统输入，

收稿日期：2003－07－01；收修改稿日期：2004－01－14.
基金项目：国家自然科学基金重点资助项目(60234010).

$y$ 为系统输出，$f(x,\dot{x})$ 为已知非线性向量函数；$\tilde{f}(x,\dot{x},u)$ 是未知不确定性项和模型误差. 令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$，系统改写为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = f(x_1,x_2) + g(x_1,x_2)u + \tilde{f}(x_1,x_2,u),\\ y = x_1.\end{cases} \tag{2}$$

给定渐近稳定的参考模型

$$\begin{cases}\dot{x}_{m1} = x_{m2},\\ \dot{x}_{m2} = -K_{m1}x_{m1} - K_{m2}x_{m2} + K_{m1}x_r,\\ y_m = x_{m1}.\end{cases} \tag{3}$$

其中 $x_{m1}, x_{m2} \in \mathbb{R}^n, x_r \in \mathbb{R}^n$ 为参考模型输入，$y_m$ 为参考模型输出，$K_{m1}, K_{m2}$ 是适维矩阵. 系统的控制目标是设计控制器使得系统输出跟踪参考模型的输出.

## 3 系统控制方案(System control scheme)

### 3.1 状态观测器的设计(State observer design)

定义系统状态估计值为 $\hat{x} = [\hat{x}_1^{\mathrm{T}} \quad \hat{x}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，观测误差为 $\tilde{x}_i = x_i - \hat{x}_i, i = 1,2$. 观测器方程为

$$\begin{cases}\dot{\hat{z}}_1 = z_2 + L_1(y - \hat{x}_1),\\ \dot{\hat{z}}_2 = \dot{x}_{m2} + L_2(y - \hat{x}_1).\end{cases} \tag{4}$$

其中 $L_1, L_2$ 为观测器增益矩阵，且 $L_1 = l_oI + \Lambda_2$，$L_2 = l_o\Lambda_2, \Lambda_2 > 0$ 是待定的维数适当的对角矩阵，$l_o$ 是待定系数. 系统的估计状态为

$$\begin{cases}\hat{x}_1 = z_1,\\ \hat{x}_2 = z_2 + L_1\tilde{x}_1.\end{cases} \tag{5}$$

### 3.2 基于观测器的跟踪控制律设计(Tracking control law design based on state observer)

定义系统状态估计值为 $\hat{x} = [\hat{x}_1^{\mathrm{T}} \quad \hat{x}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，定义系统的跟踪误差为 $e_i = x_i - x_{mi}, i = 1,2$. 令 $\bar{e}_1 = e_2 + \Lambda_1 e_1, \bar{e}_2 = \tilde{x}_2 + \Lambda_2\tilde{x}_1$，其中 $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0$ 是维数适当的对角矩阵. 则

$$\dot{\bar{e}}_1 - \dot{\bar{e}}_2 = \hat{x}_2 - x_{m2} + \Lambda_1 e_1 - \Lambda_2\tilde{x}_1. \tag{6}$$

定义跟踪控制律为

$$\begin{aligned}u(t) =\ & g(x_1,x_2)^{-1}(-f(x_1,x_2,u) - K_d(\hat{x}_2 - x_{m2} + \Lambda_1 e_1 - \Lambda_2\tilde{x}_1) -\\ & K_{m1}x_{m1} - K_{m2}x_{m2} + K_{m1}x_r - u_{\mathrm{ad}}) =\\ & g(x_1,x_2)^{-1}(-f(x_1,x_2,u) - K_d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) -\\ & K_{m1}x_{m1} - K_{m2}x_{m2} + K_{m1}x_r - u_{\mathrm{ad}}).\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $K_d > 0$ 是维数适当的对角矩阵. $u_{\mathrm{ad}}$ 为自适应 AGBFN 的输出. 系统的控制结构图如图 1 所示.

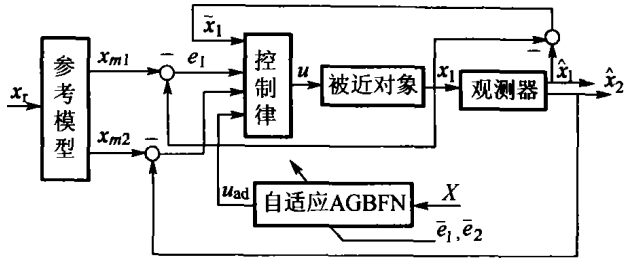



图 1 系统控制结构图

Fig. 1 Control structure of the system

理想的情况下，设计 $u_{\mathrm{ad}} = \tilde{f}(x_1,x_2,u)$. 令 $e = [e_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{e}_1^{\mathrm{T}} \quad \tilde{x}_1^{\mathrm{T}} \quad \bar{e}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，进一步可以得到闭环系统的误差方程为

$$\begin{cases}\dot{e}_1 = \bar{e}_1 - \Lambda_1 e_1,\\ \dot{\bar{e}}_1 = -K_d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) + \Lambda_1\bar{e}_1 - \Lambda_1^2 e_1,\\ \dot{\tilde{x}} = \bar{e}_2 - \Lambda_2\tilde{x}_1,\\ \dot{\bar{e}}_2 = -K_d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) - l_o\bar{e}_2.\end{cases} \tag{8}$$

**定理 1** 考虑被控系统(2)，状态观测器(4)，如果设计系统观测器增益 $L_1, L_2$ 和控制律参数 $K_d$ 满足以下条件

$$L_1 = l_0I + \Lambda_2,\ L_2 = l_0\Lambda_2, \tag{9}$$

$$\Lambda_1 < K_d,\ K_d + I < l_oI, \tag{10}$$

则在控制律(7)作用下，闭环误差系统(8)渐近稳定.

**证** 定义如下李雅普诺夫函数：

$$V = \frac{1}{2}e_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1^2 e_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_1^{\mathrm{T}}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2\tilde{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2^{\mathrm{T}}\bar{e}_2. \tag{11}$$

对上式求导，并将式(8)代入可得

$$\begin{aligned}\dot{V} =\ & -e_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1^3 e_1 + \bar{e}_1^{\mathrm{T}}(\Lambda_1 - K_d)\bar{e}_1 + \bar{e}_1^{\mathrm{T}}K_d\bar{e}_2 + \tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2\bar{e}_2 -\\ & \tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2^2\tilde{x}_1 - \bar{e}_1^{\mathrm{T}}(l_oI - K_d)\bar{e}_2 - \bar{e}_2^{\mathrm{T}}K_d\bar{e}_1.\end{aligned}$$

因为 $\tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2\bar{e}_2 \leqslant \tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2^2\tilde{x}_1 + \bar{e}_2^{\mathrm{T}}\bar{e}_2$，故

$$\dot{V} \leqslant -e_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1^3 E_1 + \bar{e}_1^{\mathrm{T}}(\Lambda_1 - K_d)\bar{e}_1 + \bar{e}_2^{\mathrm{T}}(I - l_oI + K_d)\bar{e}_2.$$

故可知，若式(10)成立，则 $\dot{V} < 0$. 误差闭环系统(8)渐近稳定. 证毕.

**注 1** 在定理 1 中，式(7)所描述控制律存在的前提是 $g(x_1,x_2)^{-1}$ 存在，若 $g(x_1,x_2)^{-1}$ 不存在时，可以修改控制律为

$$\begin{aligned}u(t) = \tilde{g}(x_1,x_2)^{-1}(&-f(x) - K_d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) -\\ & K_{m1}x_{m1} - K_{m2}x_{m2} + K_{m1}x_r - u_{\mathrm{ad}}).\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\tilde{g}(x_1,x_2)$ 为 $g(x_1,x_2)$ 的近似值，$\tilde{g}(x_1,x_2)$ 可逆. 此时如果设计自适应 AGBFN 输出为

$$u_{\mathrm{ad}} = \tilde{f}(x_1,x_2,u) + (g(x_1,x_2) - \tilde{g}(x_1,x_2))u,$$

则可以得到式(8)所对应的闭环误差系统.

## 4 自适应 AGBFN 的设计(Adaptive AGBFN design)

令 $X = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^N$ 为神经网络输入，定

义如下不对称伪高斯基函数[6]

$$g_l(X) = \prod_{i=1}^{N} \phi_{i,l}(X_i),$$

$$\phi_{i,l} = \exp\left(-\frac{(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il,-}^2}\right) U(X_i; -\infty, \xi_{il}) + \exp\left(-\frac{(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il,+}^2}\right) U(X_i; \xi_{il}, \infty). \quad (13)$$

其中 $U = (X_i; a, b) = \begin{cases} 1, & a \leqslant X_i < b, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$，$\xi_{il}$ 为伪高斯函数的中心，$\eta_{il,-}$，$\eta_{il,+}$ 为分布参数. 对应 AGBFN的输出为

$$u_{ad} = \sum_{l=1}^{L} w_l g_l(X, \xi_l, \eta_{l-}, \eta_{l+}) = W^{\mathrm{T}}(G, X, \xi, \eta_-, \eta_+). \quad (14)$$

其中 $W = [w_l]_{L\times n}$为权重矩阵，$L > 1$为隐层神经元个数，$G = (g_l)_{L\times 1}$为伪高斯基函数，且记 $\xi_l = [\xi_{1l}, \cdots, \xi_{Nl}]^{\mathrm{T}}$，$\eta_{l-} = [\eta_{1l-}, \cdots, \eta_{Nl-}]^{\mathrm{T}}$，$\eta_{l+} = [\eta_{1l+}, \cdots, \eta_{Nl+}]^{\mathrm{T}}$是与 $X$ 同维的向量. $\xi = [\xi_1, \cdots, \xi_L]^{\mathrm{T}}$，$\eta_- = [\eta_{1-}, \cdots, \eta_{L-}]^{\mathrm{T}}$，$\eta_+ = [\eta_{1+}, \cdots, \eta_{L+1}]^{\mathrm{T}}$.

为了设计自适应 AGBFN 控制器，首先考察 AGBFN的函数近似能力.

**定理 2**　若 $f(x)$ 是$(-\infty, \infty)$上的连续函数且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)$ 存在，神经网络隐层激活函数 $g(x)$ 满足条件 $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0$ 且$\max\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) \neq 0$，那么对任意的正实数 $\varepsilon > 0$和 $\forall x \in \mathbb{R}$，存在着常数 $N, w_i, c_{1i}, c_{2i}$ 使得 $| f(x) - \sum\limits_{i=1}^{N} w_i g(c_{1i}x + c_{2i}) | < \varepsilon$.

证明从略.

**引理 1**[7]　设函数 $g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足所有的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{N} w_i g(c_{1i}x + c_{2i})$ 在 $C(\overline{\mathbb{R}})$ 中稠密($C(\overline{\mathbb{R}}) = \{g(x) \in C(\mathbb{R}): \lim\limits_{|x|\to\infty} g(x)$存在$\}$)，那么所有的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{N} w_i g(c_{1i}x + c_{2i})$ 在 $C_0(S)$ 中是稠密的(其中 $S$ 是紧集合，$C_0(S) = \{g(x) \in C(S): \lim\limits_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}$).

由定理 2 和引理 1 可得如下推论:

**推论 1**　若神经网络隐层激活函数 $g(x)$ 满足定理 1 的条件，则所有的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{N} w_i g(c_{1i}x + c_{2i})$ 在 $C_0(S)$ 中稠密.

由于线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i g(c_{1i}x + c_{2i})$ 的稠密性，所以紧集 $S$ 中的任意函数均可由线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{N} w_i g(c_{1i}x + c_{2i})$ 任意逼近，从而隐层激活函数为不对称高斯函数时，AGBF 神经网络可逼近紧集 $S$ 上的任意非线性函数. 同理，可以证明当 $f(x)$ 为 $n$ 维向量函数时，可以用相同维数的 AGBFN 任意逼近.

故当 $X \in S$，$S$ 为一紧集合，可以采用式(14)所定义的 AGBFN 来近似非线性向量函数 $\tilde{f}(X)$，定义其近似误差为

$$\varepsilon_f(X) = \tilde{f}(X) - W^{*\mathrm{T}} G^*(X, \xi^*, \eta_-^*, \eta_+^*). \quad (15)$$

其中 $W^*, \xi^*, \eta_-^*, \eta_+^*$ 为理想的常数权重、中心和分布参数矩阵. 不妨假设 $\| \varepsilon_f(X) \| < \varepsilon^*$，$\varepsilon^*$ 为一常数，$\varepsilon^* > 0$，且存在常数 $\overline{W}$，满足 $\| W^* \|_F \leqslant \overline{W}$. 定义 $\hat{W}, \hat{\xi}, \hat{\eta}_-, \hat{\eta}_+$ 为相应的理想矩阵的估计值，对应的估计误差为 $\tilde{W} = W^* - \hat{W}$，$\tilde{\xi} = \xi^* - \hat{\xi}$，$\tilde{\eta}_- = \eta_-^* - \hat{\eta}_-$，$\tilde{\eta}_+ = \eta_+^* - \hat{\eta}_+$，则实际的 AGBFN 输出为

$$u_{ad} = \hat{W}^{\mathrm{T}} \hat{G}(X, \hat{\xi}, \hat{\eta}_-, \hat{\eta}_+), \quad (16)$$

则可以得到如下结论

$$\tilde{f}(X) - u_{ad} = \tilde{W}^{\mathrm{T}} G^* + \hat{W}^{\mathrm{T}} \tilde{G} + \varepsilon_f(X). \quad (17)$$

对 $G^*(X, \xi^*, \eta_-^*, \eta_+^*)$ 在 $\xi^* = \hat{\xi}, \eta_-^* = \hat{\eta}_-, \eta_+^* = \hat{\eta}_+$ 处进行 Taylor 级数展开，略去高阶项后可得

$$G^*(X, \xi^*, \eta_-^*, \eta_+^*) \cong \hat{G}(X, \hat{\xi}, \hat{\eta}_-, \hat{\eta}_+) + G'_{\xi}(\xi^* - \hat{\xi}) + G'_{\eta_-}(\eta_-^* - \hat{\eta}_-) + G'_{\eta_+}(\eta_+^* - \hat{\eta}_+). \quad (18)$$

其中

$$G'_{\xi} = \text{block-diag}(g_{\xi l})_L, \quad G'_{\eta_-} = \text{block-diag}(g_{\eta l-})_L,$$

$$G'_{\eta_+} = \text{block-diag}(g_{\eta l+})_L, \quad g_{\xi l} = [g_{\xi l_1}, \cdots, g_{\xi l_N}],$$

$$g_{\eta l-} = [g_{\eta l-_1}, \cdots, g_{\eta l-_N}], \quad g_{\eta l+} = [g_{\eta l+_1}, \cdots, g_{\eta l+_N}],$$

$$g_{\xi l_i} = \left\{\frac{2(X_i - \xi_{il})}{\eta_{il-}^2} \exp\left[-\frac{(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il-}^2}\right] U(X_i; -\infty, \xi_{il}) + \frac{2(X_i - \xi_{il})}{\eta_{il+}^2} \exp\left[-\frac{(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il+}^2}\right] U(X_i; \xi_{il}, \infty)\right\} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \phi_{kl}(X_k),$$

$$g_{\eta l-_i} = \frac{2(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il-}^3} \exp\left[-\frac{(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il-}^2}\right] U(X_i; -\infty, \xi_{il}) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \phi_{kl}(X_k),$$

$$g_{\eta l+_i} = \frac{2(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il+}^3} \exp\left[-\frac{(X_i - \xi_{il})^2}{\eta_{il+}^2}\right] U(X_i; \xi_{il}, \infty) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} \phi_{kl}(X_k).$$

故进一步可以将式(17)改写为

$$\tilde{f}(X) - u_{\mathrm{ad}} = \tilde{W}^{\mathrm{T}}\hat{G} + \hat{W}^{\mathrm{T}}(G'_{\xi}\tilde{\xi} + G'_{\eta_-}\tilde{\eta}_- + G'_{\eta_+}\tilde{\eta}_+) + d_f. \quad (19)$$

其中

$$d_f = \tilde{W}^{\mathrm{T}}(G'_{\xi}\tilde{\xi} + G'_{\eta_-}\tilde{\eta}_- + G'_{\eta_+}\tilde{\eta}_+) + \varepsilon_f(X) = \tilde{W}^{\mathrm{T}}\tilde{G} + \varepsilon_f(X),$$

根据高斯函数的性质可知 $\|\tilde{G}\|$ 有界，不妨令 $\|\tilde{G}\| < c$，则可知 $\|d_f\|$ 有界，且满足

$$\|d_f\| \leqslant \|\tilde{W}\|_F \|\tilde{G}\| + \|\varepsilon_f(X)\| < c\|\tilde{W}\|_F + \varepsilon_0. \quad (20)$$

于是可以得到引入自适应 AGBFN 后的闭环误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \bar{e}_1 - \Lambda_1 e_1, \\ \dot{\bar{e}}_1 = -K_d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) + \Lambda_1\bar{e}_1 - \Lambda_1^2 e_1 + \tilde{W}^{\mathrm{T}}\hat{G} + \hat{W}^{\mathrm{T}}(G'_{\xi}\tilde{\xi} + G'_{\eta_-}\tilde{\eta}_- + G'_{\eta_+}\tilde{\eta}_+) + d_f, \\ \dot{\tilde{x}} = \bar{e}_2 - \Lambda_2\tilde{x}_1, \\ \dot{\bar{e}} = -K_d(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) - l_o\bar{e}_2 + \tilde{W}^{\mathrm{T}}\hat{G} + \hat{W}^{\mathrm{T}}(G'_{\xi}\tilde{\xi} + G'_{\eta_-}\tilde{\eta}_- + G'_{\eta_+}\tilde{\eta}_+) + d_f. \end{cases} \quad (21)$$

**定理 3** 考虑被控系统(2)、状态观测器(4)，设存在一充分大的紧集合 $A_d \in \mathbb{R}^N$ 使得 $X = [x_1^{\mathrm{T}}, x_2^{\mathrm{T}}, u^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in A_d$，则由式(7)和式(16)组成的控制律使得非线性系统(1)最终一致有界稳定，且跟踪给定参考模型输出，误差闭环系统所有误差信号最终一致有界．其中观测器增益按照定理 1 的方法设计，自适应 AGBFN 的参数调整规律如式(22) ~ (25)所示．

$$\dot{\hat{W}} = \Gamma_1\hat{G}(\bar{e}_1+\bar{e}_2)^{\mathrm{T}} - \lambda_w\|\bar{e}_1+\bar{e}_2\|\Gamma_1\hat{W}, \quad (22)$$

$$\dot{\hat{\xi}} = \Gamma_2 G_{\xi}^{\mathrm{T}}\hat{W}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \quad (23)$$

$$\dot{\hat{\eta}}_- = \Gamma_3 G_{\eta-}^{\mathrm{T}}\hat{W}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\eta}}_+ = \Gamma_4 G_{\eta+}^{\mathrm{T}}\hat{W}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2), \quad (25)$$

其中 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ 是维数适当的正定矩阵，$\lambda_w > 0$ 为调节因子．

**证** 考虑如下李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2}e_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1^2 e_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_1^{\mathrm{T}}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2\tilde{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{e}_2^{\mathrm{T}}\bar{e}_2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\tilde{W}^{\mathrm{T}}\Gamma_1^{-1}\tilde{W}) + \frac{1}{2}\tilde{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma_2^{-1}\tilde{\xi} + \frac{1}{2}\tilde{\eta}_-^{\mathrm{T}}\Gamma_3^{-1}\tilde{\eta}_- + \frac{1}{2}\tilde{\eta}_+^{\mathrm{T}}\Gamma_4^{-1}\tilde{\eta}_+,$$

对上式求导后可得

$$\dot{V} = -e_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1^3 e_1 + \bar{e}_1^{\mathrm{T}}(\Lambda_1 - K_d)\bar{e}_1 + \bar{e}_1^{\mathrm{T}}K_d\bar{e}_2 + \tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2\bar{e}_2 - \tilde{x}_1^{\mathrm{T}}\Lambda_2^2\tilde{x}_1 - \bar{e}_2^{\mathrm{T}}(l_0 I - K_d)\bar{e}_2 - \bar{e}_2^{\mathrm{T}}K_d\bar{e}_1 + (\bar{e}_1 + \bar{e}_2)^{\mathrm{T}}(\tilde{W}^{\mathrm{T}}\hat{G} + \hat{W}^{\mathrm{T}}(G'_{\xi}\tilde{\xi} + G'_{\eta-}\tilde{\eta}_- + G'_{\eta+}\tilde{\eta}_+) + d_f) + \mathrm{tr}(\tilde{W}^{\mathrm{T}}\Gamma_1^{-1}\dot{\tilde{W}}) + \tilde{\xi}^{\mathrm{T}}\Gamma_2^{-1}\dot{\tilde{\xi}} + \tilde{\eta}_-^{\mathrm{T}}\Gamma_3^{-1}\dot{\tilde{\eta}}_- + \tilde{\eta}_+^{\mathrm{T}}\Gamma_4^{-1}\dot{\tilde{\eta}}_+. \quad (26)$$

将式(22) ~ (25)代入，由定理 1 证明可知

$$\dot{V} \leqslant -e_1^{\mathrm{T}}\Lambda_1^3 e_1 + \bar{e}_1^{\mathrm{T}}(\Lambda_1 - K_d)\bar{e}_1 + \bar{e}_2^{\mathrm{T}}(I - l_o I + K_d)\bar{e}_2 + (\bar{e}_1+\bar{e}_2)^{\mathrm{T}}d_f + \lambda_w\|\bar{e}_1+\bar{e}_2\|\mathrm{tr}(\tilde{W}^{\mathrm{T}}\hat{W}).$$

令 $\lambda_1 = \lambda_{\max}(\Lambda^3)$，$\lambda_2 = \lambda_{\max}(K_d - \Lambda_1)$，$\lambda_3 = -\lambda_{\min}(I - l_o I + K_d)$，进一步可以得到

$$\dot{V} \leqslant -\lambda_1 e_1^{\mathrm{T}}e_1 - \lambda_2\bar{e}_1^{\mathrm{T}}\bar{e}_1 - \lambda_3\bar{e}_2^{\mathrm{T}}\bar{e}_2 + \|\bar{e}_1+\bar{e}_2\|\|d_f\| + \lambda_w\|\bar{e}_1 + \bar{e}_2\|(\|\tilde{W}\|_F\bar{W} - \|\tilde{W}\|_F^2). \quad (27)$$

又因为

$$\|\bar{e}_1+\bar{e}_2\|\|d_f\| + \lambda_w\|\bar{e}_1+\bar{e}_2\|(\|\tilde{W}\|_F\bar{W} - \|\tilde{W}\|_F^2) \leqslant -\lambda_w\|\bar{e}_1 + \bar{e}_2\|(\|\tilde{W}\|_F^2 - (\bar{W} + c/\lambda_w)\|\tilde{W}\|_F) + \varepsilon_0\|\bar{e}_1\| + \varepsilon_0\|\bar{e}_2\|, \quad (28)$$

故式(27)转化为

$$\dot{V} \leqslant -\lambda_1 e_1^{\mathrm{T}}e_1 - \lambda_2\|\bar{e}_1\|(\|\bar{e}_1\| - \varepsilon_0/\lambda_2) - \lambda_3\|\bar{e}_2\|(\|\bar{e}_2\| - \varepsilon_0/\lambda_3) - \lambda_w\|\bar{e}_1 + \bar{e}_2\|(\|\tilde{W}\|_F^2 - (\bar{W} + c/\lambda_w)\|\tilde{W}\|_F).$$

令 $c_1 = \varepsilon_0/\lambda_2$，$c_2 = \varepsilon_0/\lambda_3$，$c_3 = \bar{W} + c/\lambda_w$，当 $\|\bar{e}_1\| > c_1$，$\|\bar{e}_2\| > c_2$，$\|\tilde{W}\|_F > c_3$ 时可以得到 $\dot{V} < 0$．故闭环误差系统所有信号最终一致有界，且可以得知被控系统(1)输出跟踪参考模型(3)输出． 证毕．

## 5 仿真研究(Simulation study)

考虑如下具有控制项的 Van Der Pol 振荡器的跟踪控制[8]

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \alpha\dot{x} + \beta x^2\dot{x} = u + (x^2 + \dot{x}^2)\sigma(u). \quad (29)$$

其中 $\sigma(u)$ 是系统未知不确定项．$\alpha = -2\xi\omega$，$\beta = |\alpha|$，$\xi = -1.0$，$\omega = 0.4\pi$．仿真时取 $\sigma(u) = \frac{1 - e^{-u}}{1 + e^{-u}}$，系统初始状态为 $x_1(0) = 0.5$，$x_2(0) = 2.5$．系统在初始状态作用下，相平面曲线如图 2 所示．给定渐近稳定的参考模型为

$$\dot{x}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6.25 & -4 \end{bmatrix} x_{\mathrm{m}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 6.25 \end{bmatrix} x_{\mathrm{r}}.$$

其中参考模型输入信号为单位正弦波信号．对上述系统设计式(4)所示观测器方程，并按照定理中所给出的方法确定观测器增益和控制律参数．经计算得 $\Lambda_1 = 10$，$\Lambda_2 = 5$，$L_1 = 25$，$L_2 = 100$，$K_d = 15$．观测器初始状态设置为 $\hat{x}_1(0) = 0.0$，$\hat{x}_2(0) = 2.0$．在没有引入神经网络控制时，系统的输出响应如图

3 所示.按定理 2 所给出方法设计自适应 AGBFN,其中隐层节点数目 $L = 5$. 图 4 给出了观测器的输出曲线,其中 $x$ 为系统状态,$x_o$ 表示观测器状态.图 5 给出了在文中所提出控制律作用下,系统的跟踪性能曲线.为了进一步比较 AGBFN 的性能,图 6 给出了隐层节点数目相同的高斯基函数 RBF 神经网络控制作用下,系统的跟踪性能曲线.仿真结果表明,自适应 AGBFN 网络比传统的 RBF 神经网络具有更好的适应性和近似学习能力,采用自适应 AGBFN 的跟踪控制效果要优于传统的 RBF 神经网络控制.

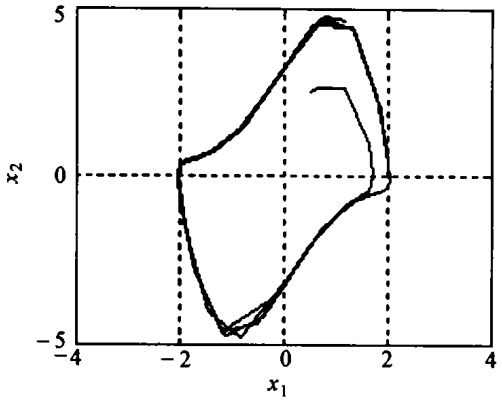



图 2　系统相平面曲线
Fig. 2　Phase-plane trajectory of system

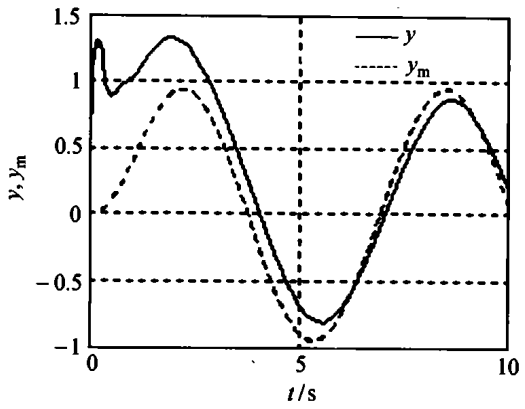
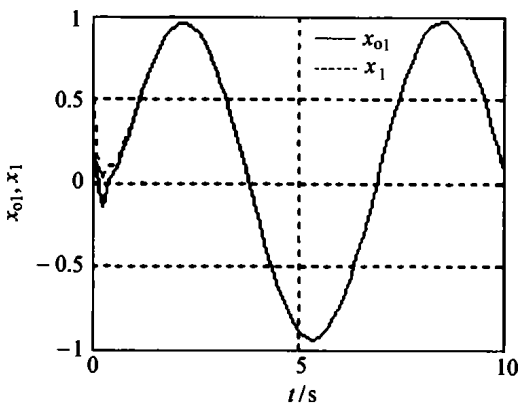



图 3　未引入神经网络时系统输出跟踪响应
Fig. 3　Response of the system output without NN



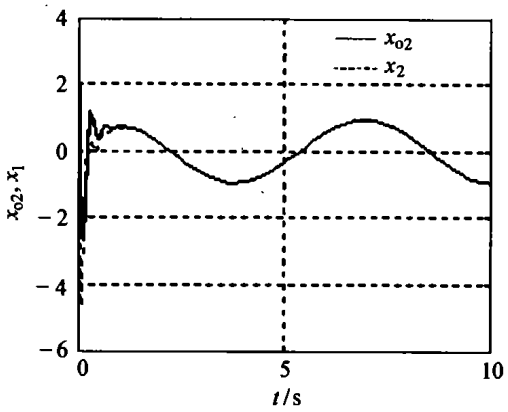




图 4　观测器输出曲线
Fig. 4　Response of the observer

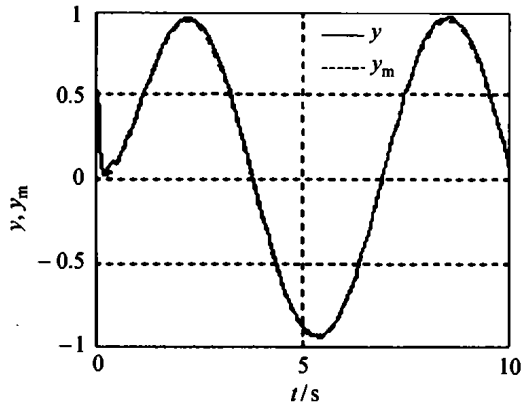



图 5　引入 AGBFN 时系统输出跟踪响应
Fig. 5　Response of the system output with AGBFN

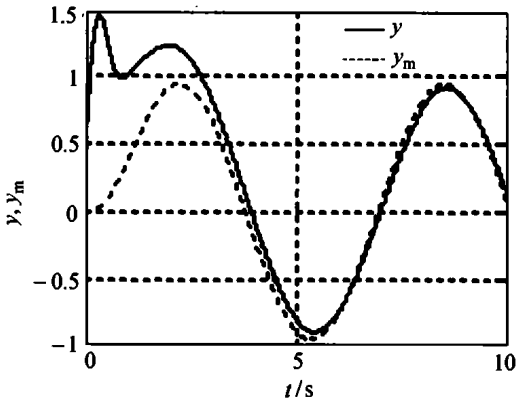



图 6　采用 RBF 神经网络控制时系统输出跟踪响应
Fig. 6　Response of the system output with RBFNN

## 6　结论(Conclusion)

本文针对一类具有未知不确定性且只有输出可以测量的非线性系统,在设计观测器对其状态进行估计的基础上,构造了基于自适应 AGBFN 的反馈控制律.所采用的全自适应 AGBFN,选用不对称高斯函数作为基函数,且在线调节所有网络参数,具有较好的灵活性和函数近似能力.所提出的控制方案易于工程实现,具有较好的跟踪控制效果.

## 参考文献(References):

[1] GE S S, WANG C. Direct adaptive NN control of a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2002, 13(1): 214 - 221.

[2] LI Y, SUNDARAJAN N, SARATCHANDRAN P. Neuro-controller design for nonlinear fighter aircraft maneuver using fully tuned RBF networks [J]. *Automatica*, 2001, 37(8): 1293 - 1301.

[3] ROVITHAKIS G A. Tracking control of multi-input affine nonlinear dynamical systems with unknown nonlinearities using dynamical neural networks [J]. *IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics*, 1999, 29(2): 179 - 189.

[4] LI C, LEE C Y. Self-organizing neuro-fuzzy system for control of unknown plants [J]. *IEEE Trans on Fuzzy Systems*, 2003, 11(1): 135 - 150.

[5] LU Yingwei, SUNDARAJAN N, SARATCHANDRAN P. Performance evolution of a sequential minimal RBF neural network learning algorithm [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1998, 9(2): 308 - 318.

[6] ROJAS I, GONZALEZ J, CANAS A, et al. Short-term prediction of chaotic time series by using network with regression weights [J]. *Int J of Neural Systems*, 2000, 10(5): 353 - 364.

[7] STINCHCOMBE M, WHITE H. Approximation and learning unknown mappings using multilayer feedforward network with bounded weights [C]// *Proc of Int Joint Conf on Neural Networks*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1990, 3: 7 - 16.

[8] KIM Y H, LEWIS F L. *High Level Feedback Control with Neural Networks* [M]. New Jersey: World Scientific, 1998: 451 - 452.



## 作者简介:

**刘 亚** (1975—),女,博士,1996年毕业于合肥工业大学电气工程系,主要研究方向模糊系统、神经网络及可靠控制,E-mail: liuyaly@263.net;

**侯 霞** (1974—),女,南京航空航天大学自动化学院博士生,2000年获新疆大学数学系应用数学硕士学位,主要研究方向为小波分析、神经网络及故障检测;

**胡寿松** (1937—),男,南京航空航天大学自动化学院教授,博士生导师,1960年毕业于北京航空航天大学自控系,主要研究方向为故障诊断、自修复控制和复杂系统控制.


(上接第28页)

## 5 结论(Conclusion)

本文针对一类含有对象不确定和干扰的MIMO非线性系统提出了一种基于径向基神经网络的自适应鲁棒输出反馈控制方案,使用了高增益观测器重构系统状态,在控制项中加入了鲁棒项从而克服了神经网络重构系统未知非线性所带来的误差和系统外部干扰对闭环系统稳定性的影响.在所设计的控制器的作用下闭环系统所有状态有界并且跟踪误差一致终值有界.本文实际上是文献[4]的结果的拓展,如何研究含有零动态的MIMO不确定非线性系统的自适应鲁棒输出反馈控制将是下一步继续研究的课题.


## 参考文献(References):

[1] KHALIL H K. Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 36(8): 1241 - 1253.

[2] JANKOVIC M. Adaptive output feedback control of nonlinear feedback linearizable systems [J]. *Int J of Adaptive Control & Signal Processing*, 1996, 10(1): 1 - 18.

[3] JANKOVIC M. Adaptive nonlinear output feedback tracking with a partial high-gain observer and backstepping [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(1): 106 - 113.

[4] SESHAGIRI S, KHALIL H K. Output feedback control of nonlinear systems using RBF neural networks [J]. *IEEE Trans on Neural Network*, 2000, 11(1): 69 - 79.

[5] CALISE A J, HOVAKIMYAN N, IDAN M. Adaptive output feedback control of nonlinear systems using neural networks [J]. *Automatica*, 2001, 37(8): 1201 - 1211.

[6] SUN F, SUN Z, WOO P. Neural network - based adaptive controller design of robotic manipulator with an observer [J]. *IEEE Trans on Neural network*, 2001, 1(1): 54 - 67.

[7] POMET J B, PRALY L. Adaptive nonlinear regulation: estimation from the Lyapunov equation [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(6): 729 - 740.

[8] SCANNER R M, SLOTINE J-J E. Gaussian networks for direct adaptive control [J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837 - 863.



## 作者简介:

**朱永红** (1965—),男,副教授,1989年获江西工业大学(现南昌大学)硕士学位,2004年3月获南京航空航天大学博士学位.主要研究方向:鲁棒控制、自适应控制、智能控制等,E-mail: zyh_patrick@tom.com;

**姜长生** (1942—),男,南京航空航天大学自动化学院教授、博士生导师,1968年南京航空航天大学自控理论专业研究生毕业,主要研究方向为鲁棒控制、自适应控制、智能控制、飞行器控制等;

**费树岷** (1961—),男,1985年获安徽大学理学硕士学位,1995年获北京航空航天大学博士学位.现为东南大学自动化所教授、博士生导师.主要研究方向:非线性控制系统设计与综合、鲁棒控制、自适应控制等.