文章编号: 1000-8152(2005)01-0081-05

混合动态系统的状态事件快速定位

郅跃茹[1], 诸 静[1], 朱维彰[2]
(1.浙江大学 电气工程学院,浙江 杭州 310027; 2.杭州电子工业学院 自动化系,浙江 杭州 310037)

摘要: 利用两种不同的微分方程数值解法,提出一种快速区间套搜索方法,用于提高自动分析和仿真混合动态系统时状态事件定位的精度,同时避免定位时常出现的"不连续粘连"现象.在所设定的允许误差范围内,能够快速且精确地定位在状态事件.对一个电路系统的分析和仿真结果表明算法的有效性.

关键词: 混合动态系统; 状态事件; 区间套; 事件定位
中图分类号: TP202 **文献标识码**: A

Rapid event state location for hybrid dynamical systems

ZHI Yue-ru[1], ZHU Jing[1], ZHU Wei-zhang[2]
(1.College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China;
2.College of Automation, Hangzhou Institute of Electronic Engineering, Hangzhou Zhejiang 310037, China)

Abstract: Based on the two different numerical solvers for the differential equations, an interval set rapid searching method is presented to improve the precision of state event location and solve the discontinuity sticking phenomena, which arises in the automated analysis and simulating the hybrid dynamical systems. Given the error bound of location state, this method can quickly and precisely locate the state event. The analysis and simulation result of a circuit system show its validity.

Key words: Hybrid dynamical system; state event; interval sets; state event location

1 引言(Introduction)

在混合动态系统中多数仿真器、事件发生器的设计,以及系统的能达性和其他形式的自动分析,都需要有效地定位状态事件或时间事件.在不连续微分方程初值问题的数值解法中,为了提高积分的有效性和精度[1],也存在状态事件定位问题.

状态事件定位的目标是能够有效并且精确地确定连续状态首次穿越事件条件所定义的超平面的阀值.混合动态系统状态事件定位的困难在于,状态事件由状态条件和微分方程共同决定,而状态条件的值不能够事先得知,同时,系统中存在模式之间的耦合和模式内状态间的耦合,当前模式的不精确事件定位所造成的误差可能会传递到后继模态中,影响后继模式的积分和状态事件定位时的精度及可靠性,甚至使整个系统的将来行为异常.

一般采用内插状态变量之间的方法定位状态事件,但内插解耦了状态事件的邻域内变量之间的依赖关系,定位误差比较大,经常导致"不连续粘连(discontinuity sticking)"现象发生[2];最近,Esposito等[3]采用线性多步积分方法,但当连续状态以正交的方法穿越事件条件所定义的超平面时,则不能使用这种方法定位状态事件.

基于微分方程初值问题数值解的单步法,本文提出一种"快速区间套"状态事件定位方法,算法简单、代价小、定位精度高,能够避免"不连续粘连"现象,对多变量系统也适用.将其用于整流电路,分析和仿真结果表明,提出的方法是有效的.

2 混合动态系统的模型(Hybrid dynamical system models)

一个混合动态系统的模型,要描述系统三方面的特征: i) 系统的连续动态; ii) 离散动态部分(有时也称为模式); iii) 模式转换的条件.通常由一组微分方程和逻辑命题描述混合动态系统,或用微分代数方程(DAEs)、混合自动机、混合 Petri 网等其他形式来建模.用微分方程对混合动态系统的描述方法为

$$\text{微分方程} \quad \dot{x}_k = f_k(x_k, u_k, t) = 0,$$
$$t \in [t_{k-1}, t_k),\ k = 1,2,\cdots,N, \tag{1}$$

收稿日期:2003-06-03; 收修改稿日期:2004-01-14.

初始条件 $x_0 = x_1(t_0)$,

事件条件 $g_k(x_k, t) \geqslant 0.$ (2)

其中 $f_k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, 且 $x_k \in \mathbb{R}^n, \dot{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^l$.

未知量 x 指微分变量, u 是已知的系统输入, m 为模式, N 为模式的个数. 以 (m, x) 表示系统的状态变量. 定义模式 m 的状态变量首次满足事件条件 $g_k(x_k, t) \geqslant 0$, 到达模式 n 时的状态为状态事件, 记为 (m, n, x^*); 状态事件所发生的时刻为 t^*.

3 状态事件定位方法(State event locating method)

混合动态系统中, 状态事件定位所需要的信息来自数值积分所产生的支撑点. 精确的定位方法, 需要利用更多的积分支撑点, 尤其需要得到状态轨迹接近事件条件时的支撑点. 积分支撑点的多少和分布, 通过对积分步长的调整来实现.

3.1 两种RK方法的计算公式及附属公式(Two RK formulas and additional formulas)

已知常微分方程的形式为

$$dx/dt = f(t, x). \tag{3}$$

其中, $f(t, x)$ 对 x 应满足 Lipschitz 条件, 使得初值问题有唯一解. 对于给定的常微分方程的初值问题的4阶和5阶 RK(Runge-Kutta)方法的两个计算公式为:

1) Butcher RK(1964)的5阶的RK公式

$$x_{i+1}^{(1)} = x_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)h. \tag{4}$$

记
$$x_{j+2} = x_i + \frac{1}{8}k_1 h + \frac{1}{8}k_2 h, \tag{a2}$$

$$x_{j+4} = x_i - \frac{1}{2}k_2 h + k_3 h, \tag{a4}$$

$$x_{j+6} = x_i + \frac{3}{16}k_1 h + \frac{9}{16}k_4 h. \tag{a6}$$

2) Cash-Karp RK(1990)的4阶的RK公式[4]:

$$x_{i+1}^{(2)} = x_i + \left(\frac{37}{378}k_1 + \frac{250}{621}k_3 + \frac{125}{594}k_4 + \frac{512}{1771}k_6\right)h. \tag{5}$$

记
$$x_{j+1} = x_i + \frac{1}{5}k_1 h, \tag{a1}$$

$$x_{j+3} = x_i + \frac{3}{40}k_1 h + \frac{9}{40}k_2 h, \tag{a3}$$

$$x_{j+5} = x_i + \frac{3}{10}k_1 h - \frac{9}{10}k_2 h + \frac{6}{5}k_3 h, \tag{a5}$$

$$x_{j+7} = x_i + \frac{1631}{55,296}k_1 h + \frac{157}{512}k_2 h + \frac{575}{13,824}k_3 h + \frac{44,275}{110,592}k_4 h + \frac{253}{4096}k_5 h. \tag{a7}$$

设当前积分状态 x_i, 以 h 为步长, 则 $x_{i+1}^{(1)}$ 和 $x_{i+1}^{(2)}$ 分别为5阶、4阶RK方法得到的 x_{i+1} 的预测值. 公式(a1)~(a7)表示的 $x_{j+l}(l = 1, \cdots, 7)$ 为计算 $x_{i+1}^{(1)}$ 和 $x_{i+1}^{(2)}$ 时的附属公式, 是当前积分子间隔内, 计算增量函数时产生的中间函数值.

除了(a1)以外, 公式(a2)~(a7)的精度都在3阶以上, 随着积分步长的减小, 子区间内近似线性程度越高, 用 $x_{j+l}(l = 1, \cdots, 7)$ 可以近似代替积分子间隔内的状态.

3.2 积分步长调整策略(Method to adjust step size)

设当前状态为 (k, x), 积分步长为 h, 已经检测到当前积分子间隔 $[t_k(i), t_k(i+1)]$ 存在状态事件 (k, x_k^*), 即

$$x_k^* \in [x_k(i), x_k(i+1)], g_k(x_k(i), t_k(i)) \leqslant 0$$

且 $$g_k(x_k(i+1), t_k(i+1)) > 0.$$

定位的目标是: 选择合适的积分方法, 采用适当的步长调整策略, 对给定的 ε, 经过 n 次计算之后, 使得

$$| x_k(j), x_k(j+1) | \leqslant \varepsilon$$

或 $$| f(x_k(j)), f(x_k(j+1)) | \leqslant \varepsilon,$$

且 $$x_k^* \in [x_k(j), x_k(j+1)] \subset [x_k(i), x_k(i+1)].$$

RK方法可以非常灵活的选择步长和改变阶次. 若当前积分步长为 h, 将 h 分为4等分, 即为常用的5阶RK方法(公式4); 将 h 分为5不等分, 可以得到Cash-Karp的4阶和5阶RK方法[4](公式5), 它的最小间隔为 $(1/10h)$, 最大间隔为 $(3/10h)$. Cash-Karp的RK方法的这种不等分特性, 使得在积分过程中有机会探测到由于原函数的各阶导数引起的误差, 以及方程(1)的异常行为, 如不连续或粗糙的形式, 从而提高数值积分的精度, 这种积分公式尤其适应混合动态系统和具有不连续的微分方程初值问题的数值解[4].

显然, 若利用小步长等间隔积分, 效率很低, 还可能存在舍入误差的影响大于截断误差. 步长调整策略是定位方法的关键. 为了提高区间套的收敛速度, 不仅利用区间套的端点, 同时注意到用数值方法求解微分方程初值问题时, 需要计算增量函数, 利用这些增量函数产生的中间函数值, 相应于事件条件的符号变化, 可以缩短包含状态事件的邻域.

同时, 在微分方程初值问题的数值方法中, 比较相同步长、不同阶RK方法的局部截断误差, 可以作

为控制积分步长的依据.结合两种不同阶 RK 方法和事件条件,一次计算之后,可以将事件包含的领域从 $[0,h]$ 缩短到 $[0,1/8h]$,最小到 $[0,1/20h]$;用这个邻域的长度作为下次迭代的步长选择依据,这样,在不增加计算量的同时,用简单的判断,即可得到缩小的状态事件所在的邻域.经过少量的几次迭代,当区间套小到一定程度时,即可确定给定误差范围内的有效的状态事件和时间事件.由于这种定位方法经过一次迭代之后,新的区间套平均可以缩小到原区间套的(1/8)倍,故称其为"快速区间套"状态事件定位方法.

3.3 快速区间套的定位方法(Locating method using the rapid interval sets)

若当前积分区间为 $[j,j+h]$,利用同步长、不同阶的两种 RK 方法,经过一次积分后,可以同时得到 7 个函数: $x_j, j=1,\cdots,7$, 分别相对于点集 $\left\{j+\frac{1}{5}h, j+\frac{1}{4}h, j+\frac{3}{10}h, j+\frac{1}{2}h, j+\frac{3}{5}h, j+\frac{3}{4}h, j+\frac{7}{8}h\right\}$ 内各点的函数值,即 $x_{j+l}(l=1,\cdots,7)$. 根据这些函数值相对于事件条件的符号,判断一个积分步长内的各子间隔是否有事件发生.重复积分和判断的过程,即得到可快速缩减的区间套.

当前积分步长为 h, 快速区间套的定位方法如下:

a) 设定当前数值积分步长为初始步长 h_{present};

b) 使用公式(4),(5),计算 $x_{i+1}^{(1)}$ 和 $x_{i+1}^{(2)}$;

c) 比较 $x_{i+1}^{(1)}$ 和 $x_{i+1}^{(2)}$, 根据误差判断是否需要调整步长,并用以下原则调整

$$h_{\text{new}} = h_{\text{present}}\left|\frac{\Delta_{\text{new}}}{\Delta_{\text{present}}}\right|^{a}, \tag{6}$$

其中

$$\Delta_{\text{new}} = \varepsilon x_{\text{scale}},$$

$$x_{\text{scale}} = |x| + \left|h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|,\ \varepsilon \text{ 为总体误差},$$

若需要调整,以 h_{new} 作为调整后的步长,回到 b).若不需要,继续;

d) 检测当前积分子间隔内是否有事件发生,若无,回到 b),若有,继续;

e) 依据事件条件(2)和 $x_{j+l}(j=1,\cdots,7)$,查找并得到首次符合事件条件的相应的 x_j,得到缩减后的有事件发生的子区间,$[x_{j+l}, x_{j+l+1}]$, 并且,

$$[x_{j+l}, x_{j+l+1}] \subset [x_i, x_{i+1}],\ l \in \{1,2,\cdots,7\} \in I; \tag{7}$$

f) 判断此积分子区间的状态的长度,或事件函数的长度,是否满足设定的状态事件定位误差限,若满足,则停止迭代,否则,以此子区间的长度为新的积分步长 h_{new}, 此子区间起始端的函数值为初值,重复 b),e),f);

g) 确定状态事件和时间事件.积分子间隔内的状态为状态事件,相应地,状态事件发生的时刻为时间事件.

很明显,根据区间套引理和公式(7),快速区间套状态事件定位方法是收敛的.算法中提供的区间套的末端仅用来判断事件发生,并没有参与积分.

注 用 $x_{j+l}, l=1,\cdots,7$, 近似代替积分子间隔内的状态,可能会产生当前的子区间套没有包括事件状态的情况,如果出现这种情况,说明事件状态就在区间套的一侧端点的很小的领域内,只要将当前的区间套左移或右移,即可继续迭代过程.

3.4 算法的误差设定原则(Rule to set the error bound)

状态事件定位的误差表明事件状态接近事件条件的程度,可以用两方面来衡量:对于同一子间隔,连续状态的长度,以及事件函数的长度.根据混合系统的具体特征,用这两种长度设定迭代停止时的误差上限.

在混合动态系统中,如果系统模式转换前后,状态变量是连续的,则需要尽可能精确地定位前一模式的连续状态,穿越事件条件所定义超平面时的阀值,在这种情况下,可以将所期望的包含事件状态的连续状态变量的积分邻域,设定为使状态事件定位算法迭代停止的误差下限;如果状态变量发生跳转,则需要以所期望的包含事件状态的积分邻域相对于事件条件的邻域,作为使定位算法迭代停止的误差下限,以便尽可能精确的确定事件状态发生时的时刻 t^*.

3.5 对算法的有关分析(Relative analysis)

收敛速度:每一次迭代之后,使用二分法,新的子区间为上次子区间的 1/2;而使用快速区间套,新的子区间平均为上次子间隔的 1/8,最小的为上次子间隔的 1/20,最大的为上次子间隔的 1/5,因此,经过 n 次迭代之后,二分法得到的积分间隔为 2^{-n};快速区间套得到的积分间隔平均为 2^{-3n}.

计算复杂度.本算法与 Esposito 方法相比,没有复杂的多项式求根,也没有求导运算,只是在数值积分的基础上,每一次迭代,多了一些简单的符号判断.本算法和二分法相比,每一次迭代,利用二分法,

做1次符号判断;用快速区间套,平均做4次判断,最多做7次判断,最少做1次符号判断.

误差分析:若 $p(s)$ 为 $g_k(x)$ 的内插多项式,x^* 为精确的事件状态,$\bar{x}$ 为用多项式 $p(x)$ 求得的近似值,则基于网格点的内插多项式求根的近似误差为[1]

$$E(x) = x^* - \bar{x} \approx -(g_k(x) - p(x))/p'(\bar{x}). \tag{8}$$

由上式,当 $p'(\bar{x})$ 很小时,得到的 $E(x)$ 是病态的,初值问题的数值积分甚至不能直接控制这个误差.

本算法中,因为设定状态事件误差上限为迭代中止的指标,相对于积分子间隔的状态的长度可以用来估计事件定位的误差.如果选取最后区间内的点所对应的状态作为事件状态,这时误差不大于设定的状态误差限.

此外,快速区间套的收敛速度很快,由积分步长的缩短所导致的舍入误差的影响不会大于截断误差.

关于"不连续粘连"现象的讨论:不连续粘连现象产生的原因在于,内插解耦了状态事件邻域内变量间的依赖关系.在快速区间套状态事件定位方法中,新的区间套的确定始终以是否事件条件为准则(算法中的步骤 e),同时,没有解耦状态间的耦合关系,定位的误差在预先所设定的范围内,可以取最小的区间套末端的状态作为事件状态,因此,不会产生"不连续粘连"现象.

4 仿真(Simulation)

图1所示[5]整流电路.这个系统包括2个微分方程,4个不连续条件,3个模式.用混合自动机建立的模型,如图2所示.

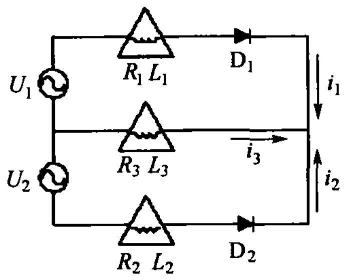

图1 整流电路图

Fig. 1 Rectifier circuit

图1中,$R_1 = R_2 = 2\Omega$,$R_3 = 10\Omega$,$L_1 = L_2 = 0.04\,\mathrm{H}$,$L_3 = 0.2\,\mathrm{H}$,$v_1 = -v_2 = 100\sin(100\pi t)\,\mathrm{V}$,各模式的微分方程为

(模式1) $i_1' = (v_1 - i_i a_1)/a_2$, $i_2' = i_2 = 0$;

(模式2) $i_1' = (a_5 v_1 + a_6 v_2) + a_7 i_1 + a_8 i_2$,

$i_2' = (a_9 v_1 + a_{10} v_2) + a_{11} i_1 + a_{12} i_2$;

(模式3) $i_1' = i_1 = 0$, $i_2' = (v_2 - i_2 a_3)/a_4$;

并且,$a_i = (12, 0.24, 12, 0.24, 13.64, -11.64, -50, 0, -11.64, 13.64, 0, -50)$.

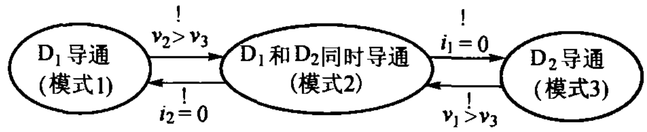

图2 整流电路的混合自动机模型

Fig. 2 Hybrid automata model for the rectifier circuit

初始模式为模式1,即 D_1 导通.采用不连续锁定技术[5]的事件检测方法,得到状态事件所在的原始的积分子间隔,然后用快速区间套定位状态事件.检测阶段的步长为 1×10^{-3},设定的状态误差上限为 1×10^{-10},定位过程的迭代次数平均为10次,仿真结果如图3、图4所示.其中,图3为电流随时间的变化情况;图4为电压差($v_1 - v_3, v_2 - v_3$)随着时间变化情况,用于观察转换条件是否满足.表1为本算法与其他算法的比较结果.

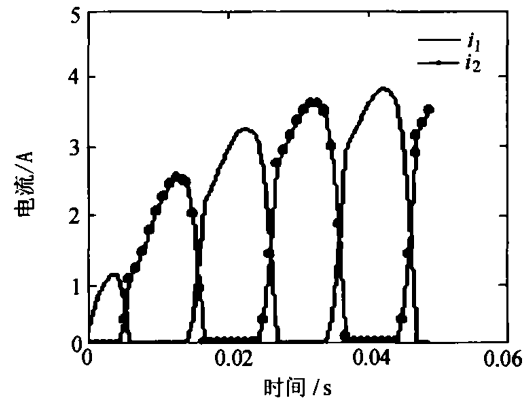

图3 电流 i_1, i_2 随时间的变化

Fig. 3 Current changes with the time

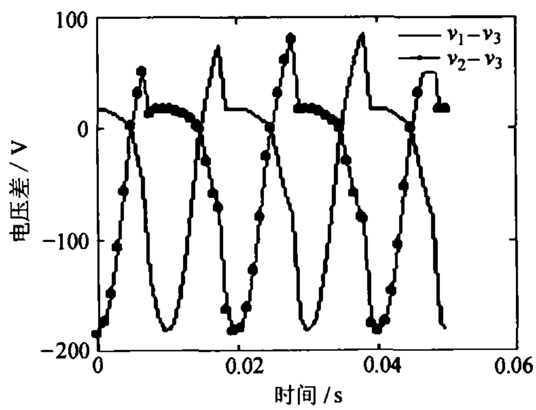

图4 电压差随时间的变化情况

Fig. 4 Voltage difference with the time

表1 各算法之间的比较

Table 1 Comparative results among the location methods

定位方法	特性				
	系统状态	定位精度	积分步长	运算	不连续粘连
快速区间套	多变量	可设定	指数变化	数值积分、符号判断	可避免
Esposito 方法	多变量	可设定	指数变化	偏导数、求根	可避免
内插法	多变量	不可设定	不变化	内插、求根	不可避免

5 结论(Conclusions)

针对混合动态系统,选择特殊的 RK 计算公式,并利用它们在微分方程初值问题的数值计算时产生的中间数据,提出了能够快速及有效地定位状态事件的快速区间套方法.算法能够有效地避免"不连续粘连"现象的产生;状态事件定位的精度高于内插算法;同时能够控制状态事件定位的精度;这种定位方法可以推广用在方程(1)相对于事件条件的另一侧没有定义但可估计的情况,多数的混合动态系统都能够满足这个条件.

参考文献(References):

[1] SHAMPINE L F, GLADWELL I. Reliable solution of special event location problems for ODEs [J]. *ACM Trans on Mathematical Software*, 1991, 17(1): 11 - 25.

[2] PARK T, BARTON P I. State event location in differential algebraic models [J]. *ACM Trans on Computer. Simulation*, 1996, 6: 137 - 165.

[3] ESPOSITO J M, KUMAR V J, PAPPAS G. Accurate event detection for simulating hybridsystems [C]// BENEDETTO M D, VINCENTELLI A S(Eds.). *Hybrid Systems: Computation and Contol* 2001, *Lecture Notes in Computer Science* 2034. Rome, Italy: Springer-Verlag, 2001: 204 - 217.

[4] CASH J R, KARP A H. A variable Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides [J]. *ACM Trans on Mathematical Software*. 1990, 16(3): 201 - 222.

[5] BAHL V, LINNINGER A. Modeling of continuous-discrete proces-ses [C]// BENEDETTO M D, VINCENTELLI A S(Eds.) *Hybrid Systems: Computation and Contol* 2001, *Lecture Notes in Computer Science* 2034. Rome Italy: Springer-Verlag, 2001: 387 - 402.

作者简介:

郅跃茹 (1969—),女,浙江大学电气工程学院博士研究生,主要从事复杂系统的智能控制、混合动态系统等方面的研究,E-mail: chinayrzhi@hotmail.com;

诸 静 (1938—),男,1962年毕业于浙江大学电机系工业自动化专业.现任浙江大学电气工程学院教授,博士生导师,研究方向为复杂系统智能控制与系统集成、机器人控制、预测控制、模糊控制等,曾获省部科技奖4项,出版专著3本,发表论文80多篇;

朱维彰 (1944—),男,1968年毕业于北京大学物理系,1981年于北京理工大学获得工学硕士学位,现任职于杭州电子工业学院自动化分院,长期从事控制理论与应用、信号处理、智能控制等领域的教学与科研.

更 正

本刊2004年21卷6期第872页右栏倒数第14行:"《控制理论与应用》中、英文版全部收入美国Ei数据库"应为"《控制理论与应用》中文版收入美国Ei数据库".特此更正.

《控制理论与应用》编辑部