

时滞模糊奇异摄动系统的 H_2 次优控制

刘华平^{1,2}, 孙富春¹, 李春文², 何克忠¹, 孙增圻¹

(1. 清华大学 计算机科学与技术系 智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084; 2. 清华大学 自动化系, 北京 100084)

摘要: 引入了时滞模糊奇异摄动模型. 这里模糊规则后件为线性时滞奇异摄动模型, 整个系统的动力学由各规则后件的线性动力学通过隶属函数插值得到, 从而形成一类非线性时滞奇异摄动系统. 系统的稳定性分析和 H_2 控制器设计方法可以归结为求解一组线性矩阵不等式, 该组条件与小参数无关, 故较好地回避了数值求解的病态问题. 最后给出了仿真实例.

关键词: 模糊系统; 奇异摄动; 时滞系统; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273.4 **文献标识码:** A

H-two sub-optimal control for fuzzy time-delay singularly perturbed systems

LIU Hua-ping^{1,2}, SUN Fu-chun¹, LI Chun-wen², HE Ke-zhong¹, SUN Zeng-qi¹

(1. State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The time-delay fuzzy singularly perturbed model is proposed based on the Takagi-Sugeno form. The resulting nonlinear singularly perturbed systems are formulated by blending the linear model via nonlinear membership functions. The stability analysis and H-two controller design are solved by a set of linear matrix inequalities, which are independent of the small parameter, and thus the ill-conditioned problem is avoided effectively. Finally, a simulation example is given to illustrate the approach.

Key words: fuzzy systems; singular perturbation; time-delay system; linear matrix inequalities (LMIs)

1 引言(Introduction)

多时标现象广泛存在于各种物理、化学以及人工系统中, 例如复杂电子电路、柔性机器人、通讯网络等. 由此引发的病态问题成为分析与设计控制系统的巨大障碍. 所幸的是, 奇异摄动方法已被证明是一种理想的处理多时标现象的数学工具. 其基本思想是首先将慢、快变量分离开, 然后分别设计控制器, 再组合起来作为“复合控制器”. 文献[1, 2]对近期奇异摄动的发展有比较详尽的综述.

利用快慢分解方法, 线性奇异摄动系统的反馈控制已得到广泛研究, 一般来说, 研究方法可以大致分为两类, 第一种是所谓的“经典分解”法, 即将快、慢子系统考虑成两个常规系统, 在这种情形下, 非标准奇异摄动系统难以处理; 另一种方法则将慢子系统考虑成为广义系统, 一方面描述了慢子系统的动力学行为, 还可以同时处理标准和非标准情形^[3]. 目

前绝大多数方法都是建立于求解 Riccati 方程基础上. 最近, 有学者相继提出了采用线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI)^[4]来分析和设计奇异摄动系统^[5]. 另一方面, 文献[6]研究了时滞情形, 但主要集中于线性奇异摄动系统.

对于非线性奇异摄动系统, 问题要复杂得多, 文献[7]采用二次型 Lyapunov 函数研究了稳定性问题. 另一方面, 广义系统方法也被推广到了非线性奇异摄动系统^[8]. 但性能指标的满足仅在局部意义上成立. 相比于常规非线性系统的模糊控制、神经控制, 智能控制在非线性奇异摄动系统领域取得的成果尚不多见. 最近, 文献[9]提出了“模糊奇异摄动系统”的概念.

本文进一步提出了考虑时滞情形的模糊奇异摄动系统, 利用 LMI 研究了稳定性条件和 H_2 模糊控制器设计问题. 由于求解过程与小参数无关, 从而能

够获得稳定的数值解. 这里提出的方法将为非线性时滞奇异摄动系统的分析与综合提供新的思路.

2 时滞模糊奇异摄动模型 (Fuzzy time-delay singularly perturbed model)

文献[10]曾提出时滞模糊系统, 这里提出的时滞模糊奇异摄动模型规则前件同常规 T-S 模型, 后件为时滞线性奇异摄动系统, 第 i 条规则为如下形式:

Plant Rule i : IF $\xi_1(t)$ is F_{i1} and $\cdots$ and $\xi_g(i)$ is F_{ig} THEN

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \\ A_{11}^i x_1(t) + A_{12}^i x_2(t) + C_{11}^i x_1(t - \tau(t)) + C_{12}^i x_2(t - \tau(t)) + B_1^i u(t), \\ \epsilon \cdot \dot{x}_2(t) = \\ A_{21}^i x_1(t) + A_{22}^i x_2(t) + C_{21}^i x_1(t - \tau(t)) + C_{22}^i x_2(t - \tau(t)) + B_2^i u(t). \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.1)$$

其中 $F_{ij} (j = 1, 2, \dots, g)$ 为模糊集合, $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$ 为状态变量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 为控制量, $A_{11}^i, A_{12}^i, A_{21}^i, A_{22}^i, C_{11}^i, C_{12}^i, C_{21}^i, C_{22}^i, B_1^i, B_2^i$ 为适当维数的矩阵. $\xi_1(t), \dots, \xi_g(t)$ 为可测变量. $\tau(t) \leq \tau_0$ 为有界时变时滞, 且 $\dot{\tau}(t) \leq \beta < 1$, 其中 τ_0 和 β 均为已知常数. ϵ 为远小于 1 的正常数.

采用标准模糊推理方法, 即单点模糊化、乘积模糊推理和加权平均清晰化方法, 整个模糊系统可表达为

$$E_\epsilon \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) [A^i x(t) + C^i x(t - \tau) + B^i u(t)]. \quad (2.2)$$

其中

$$E_\epsilon = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & \epsilon I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad A^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix},$$

$$B^i = \begin{bmatrix} B_1^i \\ B_2^i \end{bmatrix}, \quad C^i = \begin{bmatrix} C_{11}^i & C_{12}^i \\ C_{21}^i & C_{22}^i \end{bmatrix},$$

$$h_i(\xi(t)) = \frac{w_i(\xi(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(\xi(t))}, \quad w_i(\xi(t)) = \prod_{j=1}^g F_{ij}(\xi_j(t)).$$

定理 2.1 模糊开环系统

$$E_\epsilon \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) [A^i x(t) + C^i x(t - \tau)] \quad (2.3)$$

对充分小的 ϵ 是渐近稳定的, 如果存在公共矩阵 P_ϵ 和 $S > 0$ 满足

$$(A^i)^T P_\epsilon + (P_\epsilon)^T A^i + (P_\epsilon)^T C^i S^{-1} (C^i)^T P_\epsilon + \frac{1}{1 - \beta} S < 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, r, \quad (2.4)$$

且 P_ϵ 具有结构 $P_\epsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \epsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, 其中 $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m} > 0$.

证 考虑到 P_ϵ 的结构特点可知对充分小 ϵ , 有 $E_\epsilon P_\epsilon = P_\epsilon^T E_\epsilon > 0$. 则可选择 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$V(x(t)) = x^T(t) E_\epsilon P_\epsilon x(t) + \frac{1}{1 - \beta} \int_{t-\tau(t)}^t x^T(\sigma) S x(\sigma) d\sigma.$$

(显然存在 δ_1 与 δ_2 使得 $\delta_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq \delta_2 \|x(t)\|^2$, 例如, 可以选择 $\delta_1 = \lambda_{\min}(E_\epsilon P_\epsilon)$, $\delta_2 = \lambda_{\max}(E_\epsilon P_\epsilon) + \frac{\tau_0}{1 - \beta} \lambda_{\max}(S)$). 则沿式(2.3)对其求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) [x^T(t) ((A^i)^T P_\epsilon + P_\epsilon^T A^i) x(t) + \\ & x^T(t) P_\epsilon^T C^i x(t - \tau) + x^T(t - \tau) (C^i)^T P_\epsilon x(t)] + \\ & \frac{1}{1 - \beta} x^T(t) S x(t) - \frac{1 - \dot{\tau}(t)}{1 - \beta} x^T(t - \tau) S x(t - \tau) \leq \\ & \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) [x^T(t) ((A^i)^T P_\epsilon + P_\epsilon^T A^i + \\ & P_\epsilon^T C^i S^{-1} (C^i)^T P_\epsilon) x(t) + x^T(t - \tau) S x(t - \tau)] + \\ & \frac{1}{1 - \beta} x^T(t) S x(t) - x^T(t - \tau) S x(t - \tau) = \\ & \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) [x^T(t) ((A^i)^T P_\epsilon + P_\epsilon^T A^i + \\ & P_\epsilon^T C^i S^{-1} (C^i)^T P_\epsilon + \frac{1}{1 - \beta} S) x(t)]. \end{aligned}$$

如果条件(2.4)成立, 则 $\dot{V}(x(t)) < 0$, 从而由 Lyapunov-Krasovskii 定理可知系统(2.3) 渐近稳定.

证毕.

条件(2.4)依赖于小参数 ϵ , 不利于用常规数值计算工具求解. 第3节将提出独立于 ϵ 的镇定条件, 以及满足 H_2 性能指标的控制器的设计方法.

3 状态反馈模糊控制器设计 (Design of fuzzy state feedback controller)

基于并行分布式补偿(PDC)方案, 可以考虑模糊控制器的第 i 条规则为

Controller Rule i :

IF $\xi_1(t)$ is F_{i1} and $\cdots$ and $\xi_g(t)$ is F_{ig} ,

THEN $u(t) = K^i x(t) = K_1^i x_1(t) + K_2^i x_2(t)$,

$$i = 1, 2, \dots, r. \quad (3.1)$$

模糊控制器可表达为

$$u(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) K^i x(t), \quad (3.2)$$

其中 $K^i = [K_1^i \ K_2^i]$. 则闭环系统为

$$E_\epsilon \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i^2(\xi(t)) [G^{\bar{i}} x(t) + C^i x(t - \tau)] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r h_i(\xi(t)) h_j(\xi(t)) [(G^{\bar{j}} + G^{\bar{i}}) x(t) +$$

$$(C^i + C^j) x(t - \tau)]. \quad (3.3)$$

其中 $G^{\bar{i}} = A^i + B^i K^i$, $G^{\bar{j}} = A^j + B^j K^j$.

定理 3.1 对于适当的加权矩阵 $Q > 0$ 和 $R > 0$. 如果存在适当维数的矩阵 $M > 0$, X 和 N^i 满足

$$\Theta_{\bar{i}} < 0, \Theta_{\bar{j}} < 0. \quad (3.4)$$

其中(符号“*”表示对称项)

$$\Theta_{\bar{i}} = \begin{bmatrix} A^i X + (A^i X)^T + B^i N^i + (B^i N^i)^T + \frac{1}{1-\beta} M & * & * & * \\ X^T (C^i)^T & -M & * & * \\ X & 0 & -Q^{-1} & * \\ N^i & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.5a)$$

$$\Theta_{\bar{j}} = \begin{bmatrix} \left(A^i X + (A^i X)^T + A^j X + (A^j X)^T + B^i N^j + (B^i N^j)^T + B^j N^i + (B^j N^i)^T + \frac{2}{1-\beta} M \right) & * & * & * & * \\ X^T (C^i + C^j)^T & -M & * & * & * \\ X & 0 & -Q^{-1} & * & * \\ N^i & 0 & 0 & -R^{-1} & * \\ N^j & 0 & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.5b)$$

并具有如下结构

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad X_{11} > 0, X_{22} > 0, M > 0, \quad (3.6)$$

则闭环系统(3.3)保持渐近稳定,且满足如下 H_2

性能

$$\int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt < x_1^T(0) X_{11}^{-1} x_1(0) + O(\epsilon), \quad (3.7)$$

相应的模糊控制器增益为 $K^i = N^i X^{-1}$.

证 首先由 Schur 补,式(3.4)等价于:

$$\begin{bmatrix} A^i X + (A^i X)^T + B^i N^i + (B^i N^i)^T + \frac{1}{1-\beta} M + X^T Q X + (N^i)^T R N^i & * \\ X^T (C^i)^T & -M \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} \left(A^i X + (A^i X)^T + B^i N^j + (B^i N^j)^T + A^j X + (A^j X)^T + B^j N^i + (B^j N^i)^T + \frac{2}{1-\beta} M + 2X^T Q X + (N^i)^T R N^i + (N^j)^T R N^j \right) & * \\ X^T (C^i + C^j)^T & -2M \end{bmatrix} < 0,$$

对上两式左、右各乘以 $\begin{bmatrix} X^{-T} & 0 \\ 0 & X^{-T} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix}$, 定义新变量 $P = X^{-1}$, $S = X^{-T} M X^{-1}$ 并考虑 $K^i = N^i X^{-1}$, 可得:

$$E_{\bar{i}} = \begin{bmatrix} (G^{\bar{i}})^T P + P^T G^{\bar{i}} + \frac{1}{1-\beta} S + Q + (K^i)^T R K^i & * \\ (C^i)^T P & -S \end{bmatrix} < 0, \quad (3.8a)$$

$$E_{\bar{j}} = \begin{bmatrix} (G^{\bar{j}} + G^{\bar{i}})^T P + P^T (G^{\bar{j}} + G^{\bar{i}}) + \frac{2}{1-\beta} S + 2Q + (K^i)^T R K^i + (K^j)^T R K^j & * \\ (C^i + C^j)^T P & -2S \end{bmatrix} < 0. \quad (3.8b)$$

考虑到 X 的特殊结构, P 可表达为 $P = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$,

其中 $P_{11} > 0, P_{22} > 0$ 且 $P_{11} = X_{11}^{-1}$.

进一步,考虑到 P 的结构特点可知,存在 $\epsilon_0^* > 0$,

$\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0^*]$, 矩阵 $P_\epsilon = \begin{bmatrix} P_{11} & \epsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ 满足 $E_\epsilon P_\epsilon =$

$P_\epsilon^T E_\epsilon > 0$. 则构建 Lyapunov-Krasovskii 泛函如下

$$V(x(t)) =$$

$$x^T(t) E_\epsilon P_\epsilon x(t) + \frac{1}{1-\beta} \int_{t-\tau(t)}^t x^T(\sigma) S x(\sigma) d\sigma.$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &< (E_\epsilon \dot{x}(t))^T P_\epsilon x(t) + x^T(t) P_\epsilon^T E_\epsilon \dot{x}(t) + \\ &\frac{1}{1-\beta} x^T(t) S x(t) - x^T(t-\tau) S x(t-\tau). \end{aligned} \quad (3.9)$$

另一方面,

$$J_2 = \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt =$$

$$\int_0^{t_f} \{x^T(t) Q x(t) + x^T(t) [\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) (K^i)^T] \cdot$$

$$R [\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) K^i] x(t) +$$

$$\dot{V}(x(t))\} dt + V(x(0)) - V(x(t_f)).$$

既然 $V(x(t_f)) \geq 0$, 且

$$[\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) (K^i)^T] R [\sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) K^i] \leq$$

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(\xi(t)) (K^i)^T R (K^i) +$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r h_i(\xi(t)) h_j(\xi(t)) [(K^i)^T R (K^i) + (K^j)^T R (K^j)],$$

从而可得

$$J_2 \leq$$

$$\int_0^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^r h_i^2(\xi(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \Xi_{ii}^\epsilon \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r h_i(\xi(t)) h_j(\xi(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \right.$$

$$\left. \Xi_{ij}^\epsilon \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} \right\} dt + V(x(0)).$$

其中,

$$\Xi_{ii}^\epsilon = \begin{bmatrix} (G^{ii})^T P_\epsilon + P_\epsilon^T G^{ii} + \frac{1}{1-\beta} S + Q + (K^i)^T R K^i & * \\ (C^i)^T P_\epsilon & -S \end{bmatrix},$$

$$\Xi_{ij}^\epsilon = \begin{bmatrix} ((G^{ij} + G^{ji})^T P_\epsilon + P_\epsilon^T (G^{ij} + G^{ji}) + \frac{2}{1-\beta} S + 2Q + (K^i)^T R K^i + (K^j)^T R K^j) & * \\ (C^i + C^j)^T P_\epsilon & -2S \end{bmatrix}.$$

显然 $\Xi_{ii}^\epsilon = \Xi_{ii} + O(\epsilon)$, $\Xi_{ij}^\epsilon = \Xi_{ij} + O(\epsilon)$. 因而, 存在 $\epsilon_1^* > 0$, $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_1^*]$, 对 $i, j = 1, 2, \dots, r$ 和 $i < j$, 有 $\Xi_{ii}^\epsilon < 0$, $\Xi_{ij}^\epsilon < 0$. 故得 $J_2 < V(x(0))$, 即

$$\int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt < x^T(0) E_\epsilon P_\epsilon x(0).$$

由于

$$x^T(0) E_\epsilon P_\epsilon x(0) =$$

$$x_1^T(0) P_{11} x_1(0) + \epsilon \cdot x_1^T(0) P_{21}^T x_2(0) +$$

$$\epsilon \cdot x_2^T(0) P_{21} x_1(0) + \epsilon \cdot x_2^T(0) P_{22} x_2(0) =$$

$$x_1^T(0) P_{11} x_1(0) + O(\epsilon),$$

并考虑到 $P_{11} = X_{11}^{-1}$. 令 $\epsilon^* = \min\{\epsilon_0^*, \epsilon_1^*\}$, 则对任意 $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$, H_2 性能式(3.7)均能满足.

另一方面, 由 $\Xi_{ii}^\epsilon < 0$, $\Xi_{ij}^\epsilon < 0$, 很容易得到:

$$\gamma_{ii}^\epsilon = \begin{bmatrix} (G^{ii})^T P_\epsilon + P_\epsilon^T G^{ii} + \frac{1}{1-\beta} S & * \\ (C^i)^T P_\epsilon & -S \end{bmatrix} < 0,$$

$$\gamma_{ij}^\epsilon = \begin{bmatrix} (G^{ij} + G^{ji})^T P_\epsilon + P_\epsilon^T (G^{ij} + G^{ji}) + \frac{2}{1-\beta} S & * \\ (C^i + C^j)^T P_\epsilon & -2S \end{bmatrix} < 0.$$

则由式(3.9)可得

$$\dot{V}(x(t)) <$$

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(\xi(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \gamma_{ii}^\epsilon \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^r h_i(\xi(t)) h_j(\xi(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \gamma_{ij}^\epsilon \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix},$$

从而 $\dot{V}(x(t)) < 0$. 故闭环稳定性也能得到保证.

证毕.

为进一步得到次优解, 我们可以考虑在求解过

程中优化 $\text{tr} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} = \text{tr}(EP + PF)$. 注意到

$$EX + XF = (EP + PF)^{-1},$$

其中

$$E = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0 \\ 0 & I_{m \times m} \end{bmatrix},$$

因而可以构造如下优化问题:

$$\min \text{tr}(W)$$

$$\text{s.t. } W = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} -(EX + XF) & I \\ I & -W \end{bmatrix} < 0, \text{ 以及式(3.7), (3.8).}$$

4 仿真例子(Simulation example)

考虑由两条规则描述的时滞模糊奇异摄动系统

R_1 : If $x_1(t)$ is F_1 , Then

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}^1 x_1(t) + A_{12}^1 x_2(t) + \\ \quad C_{11}^1 x_1(t-\tau) + C_{12}^1 x_2(t-\tau) + B_1^1 u(t), \\ \epsilon \dot{x}_2(t) = A_{21}^1 x_1(t) + A_{22}^1 x_2(t) + \\ \quad C_{21}^1 x_1(t-\tau) + C_{22}^1 x_2(t-\tau) + B_2^1 u(t). \end{cases}$$

R_2 : If $x_1(t)$ is F_2 , Then

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A_{11}^2 x_1(t) + A_{12}^2 x_2(t) + \\ C_{11}^2 x_1(t - \tau) + C_{12}^2 x_2(t - \tau) + B_1^2 u(t), \\ \epsilon \dot{x}_2(t) = A_{21}^2 x_1(t) + A_{22}^2 x_2(t) + \\ C_{21}^2 x_1(t - \tau) + C_{22}^2 x_2(t - \tau) + B_2^2 u(t). \end{cases}$$

其中 $x_1(t) \in [-1.6, 1.6]$.

$$\begin{aligned} A_{11}^1 &= \begin{bmatrix} -0.95 & -0.68 \\ 1.478 & 0 \end{bmatrix}, A_{12}^1 = \begin{bmatrix} -0.92 & 0.11 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{21}^1 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.14 & 0.5 \end{bmatrix}, A_{22}^1 = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.428 \\ -2.103 & -0.215 \end{bmatrix}, \\ B_1^1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{11}^2 = \begin{bmatrix} -1.24 & -1.11 \\ 1.01 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{12}^2 &= \begin{bmatrix} 0.81 & -0.7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{21}^2 = \begin{bmatrix} -1.0 & -0.6 \\ -0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, \\ A_{22}^2 &= \begin{bmatrix} -0.71 & 1.20 \\ -1.111 & 0.325 \end{bmatrix}, B_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_{11}^1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, C_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{21}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_{22}^1 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, C_{11}^2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ C_{12}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{21}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{22}^2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

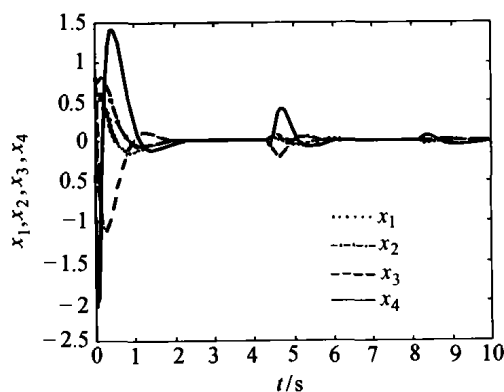


图1 $\epsilon = 0.1$ 时的闭环系统响应

Fig. 1 Closed-loop responses when $\epsilon = 0.1$

时变时滞为 $\tau(t) = 4 + 0.5\sin 2t$. 对应模糊集合的隶属函数为

$$h_1(x_1(t)) = 1 - x_1^2(t)/2.56, h_2(x_1(t)) = x_1^2(t)/2.56.$$

可得

$$P = \begin{bmatrix} 2.4723 & -0.0003 & 0 & 0 \\ -0.0003 & 6.2415 & 0 & 0 \\ 25.7401 & 59.2439 & 61.1786 & 11.2311 \\ 1.3092 & 4.3702 & 11.2311 & 5.0979 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.1276 & 0.4749 & 0.7691 & 0.0510 \\ 0.4749 & 3.1740 & 1.3474 & 0.1927 \\ 0.7691 & 1.3474 & 3.1391 & 0.5410 \\ 0.0510 & 0.1927 & 0.5410 & 0.3416 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = [-3.2382 \quad -7.1475 \quad -6.7499 \quad -2.8818],$$

$$K_2 = [-4.6314 \quad -10.5508 \quad -10.3444 \quad -3.6688],$$

则模糊控制器为

$$u(t) = (h_1(x_1(t))K_1 + h_2(x_1(t))K_2)x(t).$$

图1~3分别为对应 $\epsilon = 0.1, \epsilon = 0.2$ 和 $\epsilon = 0.3$ 时的闭环系统响应, 而图4为性能指标 $J_2(t_f) = \int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$ 的比较. 可以发现对充分小的 ϵ , 系统能够获得满意的性能.

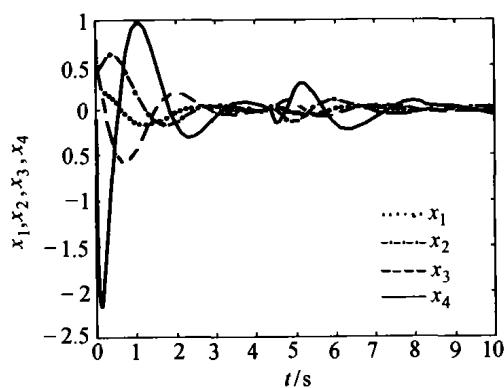


图2 $\epsilon = 0.2$ 时的闭环系统响应

Fig. 2 Closed-loop responses when $\epsilon = 0.2$

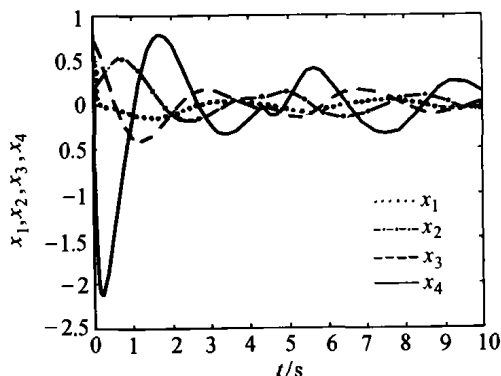


图3 $\epsilon = 0.3$ 时的闭环系统响应

Fig. 3 Closed-loop responses when $\epsilon = 0.3$

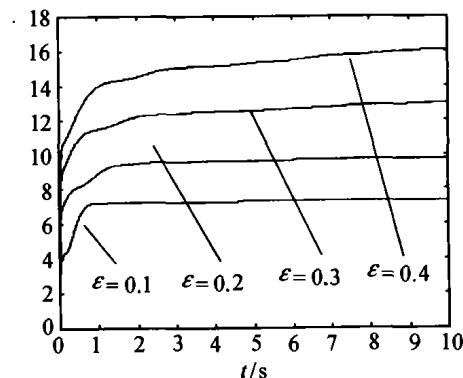


图4 H_2 性能指标比较

Fig. 4 Comparisons of H_2 performance

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类新的时滞模糊奇异摄动系统,得到了满足 H_2 性能指标的模糊控制器设计方法,该设计方法可归结为 LMI 方便地求解.值得指出的是,本文提出的方法与文献[9]中采用的迭代方法并不相同.

参考文献(References):

- [1] NAIDU D S, CALISE A J. Singularly perturbations and time scales in guidance and control of aerospace systems: a survey [J]. *J of Guidance, Control and Dynamics*, 2001, 24(6): 1057 - 1078.
- [2] 刘华平, 孙富春, 何克忠等. 奇异摄动控制系统: 理论与应用 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1): 1 - 7.
(LIU H P, SUN F C, HE K Z, et al. Survey of singularly perturbed control systems: Theory and applications [J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(1): 1 - 7.)
- [3] WANG Y Y, SHI S J, ZHANG Z J. A descriptor-system approach to singular perturbation of linear regulators [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1988, 33(4): 370 - 373.
- [4] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory* [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [5] LI Y, WANG J L, YANG G H. Sub-optimal linear quadratic control for singularly perturbed systems [C]// *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA, New York: IEEE Press, 2001, 4: 3698 - 3703.
- [6] FRIDMAN E. Effects of small delays on stability of the singularly perturbed systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 897 - 902.
- [7] SABERI A, KHALIL H. Quadratic-type Lyapunov functions for singularly perturbed systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1984, 29(6): 542 - 550.
- [8] FRIDMAN E. A descriptor system approach to nonlinear singularly perturbed optimal control problem [J]. *Automatica*, 2001, 37(2): 543 - 549.
- [9] 刘华平, 孙富春, 何克忠等. 模糊奇异摄动系统及其稳定性分析与综合 [J]. 自动化学报, 2003, 29(4): 494 - 500.
(LIU H P, SUN F C, HE K Z, et al. Controller design and stability analysis for fuzzy singularly perturbed systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003, 29(4): 494 - 500.)
- [10] CAO Y Y, FRANK P M. Stability analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via linear Takagi-Sugeno fuzzy models [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 124(2): 213 - 229.

作者简介:

刘华平 (1976—), 男, 清华大学计算机科学与技术系攻读博士学位研究生, 主要研究方向为智能机器人系统、神经模糊学习, E-mail: lhp@sl000e.cs.tsinghua.edu.cn;

孙富春 (1964—), 男, 清华大学计算机科学与技术系教授, 主要研究领域为空间柔性机器人、通讯网络管理与控制和计算智能技术等, E-mail: sfc@sl000e.cs.tsinghua.edu.cn;

李春文 (1958—), 男, 清华大学自动化系教授. 当前研究领域为非线性系统分析与控制、电力系统控制、网络控制等, E-mail: lcw@mail.tsinghua.edu.cn;

何克忠 (1937—), 男, 清华大学计算机科学与技术系教授, 主要研究领域为地面移动机器人、视觉临场感技术、无线通讯技术和计算机控制技术, E-mail: hkz-dcs@mail.tsinghua.edu.cn;

孙增圻 (1943—), 男, 清华大学计算机科学与技术系教授, 当前研究领域为月球探测机器人、足球机器人、空间遥操作系统和模糊神经网络理论, E-mail: szq-dcs@mail.tsinghua.edu.cn.