

具有未知上界时滞状态扰动的非线性系统自适应鲁棒镇定

吴 敏, 张凌波, 何 勇

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙, 410083)

摘要: 讨论了一类具有时滞状态扰动的非线性系统的自适应鲁棒镇定问题. 时滞状态扰动的上界是未知的. 在控制中通过自适应律估计上界的值, 并且利用估计值设计鲁棒控制器. 基于 Lyapunov-Krasovskii 函数, 证明了闭环系统具有一致最终有界意义下的鲁棒稳定性. 最后通过一个数值例子的仿真验证了结论的正确性.

关键词: 非线性系统; 时滞不确定性; 自适应控制; 鲁棒稳定; 一致最终有界

中图分类号: TP202

文献标识码: A

Adaptive robust stabilization for a class of nonlinear systems with time-delay state disturbance

WU Min, ZHANG Ling-bo, HE Yong

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China)

Abstract: Adaptive robust stabilization for a class of nonlinear systems with time-delay state disturbance is discussed. The bound of the time-delay state disturbance is unknown. And an adaptive law is proposed to estimate the bound of the disturbance, and the estimated value is used to design a robust controller. Based on Lyapunov-Krasovskii function, it is shown that the closed-loop system is stable in the sense of uniform ultimately boundedness. Finally, a numerical example is given to verify the correctness of the conclusion.

Key words: nonlinear systems; time-delay uncertainties; adaptive control; robust stabilization; uniform ultimately boundedness

1 引言 (Introduction)

不确定非线性系统的稳定性是控制领域的一个重要研究课题, 长期以来倍受人们关注. 在非线性系统的稳定性问题研究中, 形成了自适应镇定和鲁棒镇定两种方法. 在近期的文献中, 文献[1]针对一类非线性二阶系统, 在系统具有非参数不确定性的情形, 设计自适应控制器使系统稳定. 文献[2]具有时变不确定性的非线性系统, 通过设计自适应律在线估计, 设计了使系统稳定的自适应鲁棒控制器.

定常或时变滞后是工程系统控制中经常碰到的情况, 广泛存在于过程控制、液压系统、核反应堆等实际控制系统中. 时滞系统的控制受到了广泛研究. 文献[3]讨论了具有小状态时滞的线性系统的 H_∞ 控制问题, 基于 Riccati 不等式设计了鲁棒控制器保证系统的内部稳定性和鲁棒性能. 文献[4]讨论了一类下三角结构的线性时滞系统的 H_∞ 控制, 并利用

Backstepping 方法构造了使 H_∞ 控制问题可解的鲁棒控制器. 文献[5]基于线性矩阵不等式研究了一般类型的连续和离散时滞系统的 H_∞ 控制. 文献[6]研究了一类线性时变不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制问题, 在系统的状态不完全可测的情形下, 基于代数 Riccati 等式和线性矩阵不等式设计动态输出控制器使系统二次稳定, 并且将扰动对系统的影响降低到一个预先给定的范围内.

时滞不确定性的存在是影响系统稳定性的一个重要因素, 因此时滞不确定系统的鲁棒稳定问题受到了广泛的重视. 文献[7]总结了具有参数不确定性的线性时滞系统的稳定性和鲁棒稳定性的近期部分研究工作. 文献[8, 9]研究了依赖于时滞的时滞不确定系统的稳定性和鲁棒稳定性. 文献[10]考虑了具有结构不确定性的时滞系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能, 得到了计算上可行的充分条件. 在上述结论中,

时滞不确定性的上界函数是已知的.然而在许多工程实践中,系统不确定性的上界是未知的.因此研究系统时滞不确定性的上界未知情形的控制问题具有重要意义.文献[11]研究了线性系统具有时滞扰动并且扰动上界未知情形下系统的鲁棒稳定问题,通过设计自适应鲁棒稳定控制器,使闭环系统状态和参数估计误差一致最终有界.文献[12]进一步研究了线性系统具有多时滞不确定性的情形.

本文针对非线性系统具有未知上界时滞状态扰动的情形,通过估计时滞不确定性的上界,设计了自适应鲁棒控制器保证闭环系统状态和估计误差一致最终有界.本文结果是文献[11]的结论在非线性系统中的推广.

2 问题描述(Problem fomulation)

考虑时滞不确定非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + E(x(t-h), t), \quad (1)$$

其中 $t \in \mathbb{R}$ 是时间, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态的当前值, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是具有相应维数的已知矩阵函数, $E(x(t-h), t)$ 表示系统时滞状态扰动的连续非线性向量函数.此外,时滞 h 为任意正的常数,并且在下文的结论显示在系统设计中不要求 h 的值已知.系统(1)的初始状态由下式

$$x = \chi(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0] \quad (2)$$

给定,其中 $\chi(t)$ 是 $[t_0 - h, t]$ 上的连续函数.

如果状态的所有当前值可测,那么所要设计的无记忆状态反馈控制律可表示为一个连续函数

$$u = p(x(t), t). \quad (3)$$

本文所要解决的问题是如何设计无记忆状态反馈控制律 u 使系统(1)存在时滞状态扰动时保持稳定.

在进行状态反馈控制律设计前引入以下假设条件:

A1) 存在连续的向量函数 $\xi(x(t-h), t)$ 使得对于所有的 $(x(t-h), t)$,

$$E(x(t-h), t) = g(x)\xi(x(t-h), t), \quad (4)$$

并且满足不等式

$$\|\xi(x(t-h), t)\| \leq \beta \|a(x(t-h))\|. \quad (5)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示欧几里德范数, $a(x(t-h))$ 是已知的向量函数,并且 $a(x(t-h)) \neq 0, \forall x(t-h) \neq 0$, β 是未知正的常数,不失一般性,设定

$$\theta = \beta^2, \quad (6)$$

显然 θ 是一个未知的正的常数.

注1 假设条件 A1)是关于时滞扰动的匹配性条件,是关于不确定性要求较强的假设,类似于文献[11]中的假设条件 A2.2.在文献[2]中关于不确定非线性系统的假设条件

中,事实上也限定了类似的条件,不同之处在于文献[2]未涉及到系统不确定性具有时滞性的情形.

注2 在以往的关于不确定非线性系统的鲁棒稳定问题研究中,已有一些关于系统不确定性不具有时滞性情形和系统时滞不确定性的上界函数已知情形的结果.然而在实际工程中,由于时滞不确定性的上界函数有时无法获得,因此有必要研究如何设计控制律使系统在时滞不确定性的上界函数未知时鲁棒稳定.

3 自适应鲁棒镇定控制器的设计(Design of adaptive robust stabilization controller)

对于非线性系统(1),由于 θ 未知,在控制器的设计中以 $\hat{\theta}$ 表示 θ 的估计值,设计自适应率使 $\hat{\theta}$ 逼近 θ .关于非线性系统(1)有以下结论.

定理1 对于满足假设条件 A1)的非线性系统(1),如果存在正定函数 $V(x)$ 和正数 μ 使 Hamilton-Jacobi 不等式

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \mu \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} + a^T(x) a(x) \leq 0 \quad (7)$$

成立,则可以设计控制器为

$$u = -k(t)g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (8)$$

其中

$$k(t) = \mu + \frac{1}{4} \rho^{-1} \hat{\theta}, \quad (9)$$

ρ 是小于1的正数,自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}} = -\sigma \gamma \hat{\theta} + \frac{1}{8\rho} \gamma \left\| g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2, \quad (10)$$

σ 和 γ 是任意的正的常数, $\hat{\theta}(t)$ 的初始值 $\hat{\theta}(t_0)$ 为有限值.

在该控制器的作用下,系统(1)的闭环系统的状态和估计误差 $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$ 是一致最终有界的.

证 选择 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$W(x, \tilde{\theta}) = V(x) + \rho \int_{t-h}^t a^T(\tau) a(\tau) d\tau + \gamma^{-1} \tilde{\theta}^2, \quad (11)$$

由式(10)可知误差系统为

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\sigma \gamma \tilde{\theta} - \sigma \gamma \theta + \frac{1}{8\rho} \gamma \left\| g^T(x) \frac{\partial V}{\partial x} \right\|^2, \quad (12)$$

因此

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, \tilde{\theta}) = & \frac{\partial V}{\partial x} [f(x) + g(x)u + E(x(t-h), t)] - \\ & \rho a^T(x(t-h)) a(x(t-h)) + \\ & \rho a^T(x(t)) a(x(t)) + 2\gamma^{-1} \tilde{\theta} \dot{\tilde{\theta}}. \end{aligned} \quad (13)$$

将式(8)表示的控制器 u 代入式(13),可得

$$\dot{W}(x, \bar{\theta}) =$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial V}{\partial x} f(x) - (\mu + \frac{1}{4\rho}) \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \right. \\ & \left. \frac{\partial V}{\partial x} E(x(t-h), t) \right] - \rho \alpha^T(x(t-h)) \alpha(x(t-h)) + \\ & \rho \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) + 2\gamma^{-1} \ddot{\theta} \dot{\theta} = \\ & \left[\frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \mu \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \right. \\ & \left. \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) \right] - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} - \\ & (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \xi(x(t-h), t) - \\ & \rho \alpha^T(x(t-h)) \alpha(x(t-h)) + 2\gamma^{-1} \ddot{\theta} \dot{\theta} \leq \\ & - (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) - \\ & \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \xi(x(t-h), t) - \\ & \rho \alpha^T(x(t-h)) \alpha(x(t-h)) + 2\gamma^{-1} \ddot{\theta} \dot{\theta} \leq \\ & - (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \\ & \sqrt{\frac{\theta}{\rho}} \left\| g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} \right\| \cdot \sqrt{\rho} \left\| \alpha(x(t-h)) \right\| - \\ & \rho \alpha^T(x(t-h)) \alpha(x(t-h)) + 2\gamma^{-1} \ddot{\theta} \dot{\theta}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, \bar{\theta}) & \leq - (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) - \\ & \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + 2\gamma^{-1} \ddot{\theta} \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (14)$$

由式(12), 根据文献[11]中定理3.1的证明有

$$\begin{aligned} \dot{W}(x, \bar{\theta}) & \leq \\ & - (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) - \\ & \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \\ & 2\gamma^{-1} \ddot{\theta} \left(-\sigma \gamma \bar{\theta} - \sigma \gamma \theta + \frac{1}{8\rho} \gamma \left\| g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} \right\|^2 \right) = \\ & - (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) - 2\sigma \bar{\theta}^2 - 2\sigma \bar{\theta} \theta \leq \\ & - (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) - \sigma \bar{\theta}^2 + \sigma \theta^2. \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 闭环系统和误差系统的解 $(x, \bar{\theta})$ 一致最终有界, 最终稳定于剩余集

$$\{(x, \bar{\theta}) \mid (1-\rho) \alpha^T(x(t)) \alpha(x(t)) + \sigma \bar{\theta}^2 \leq \sigma \theta^2\}. \quad (16)$$

注3 由式(15)可知, 通过减少 σ 值的大小, 能够使处于稳定状态的 $\{x, \bar{\theta}\}$ 的上界任意小, 即设计者可以通过调节自适应律(10)中 σ 值的大小来调节系统稳定的剩余集的大小.

注4 由定理1可知, 所获得的闭环时滞系统是连续

的, 并且所设计的控制器与时滞无关, 因此, 在系统设计中不需要知道时滞 h 的值.

4 举例(Illustration)

考虑以下形式的非线性系统(1), 其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & \sin x_1 \end{bmatrix},$$

并且假设条件 A1) 中的 $\alpha(x)$ 为

$$\alpha(x) = [x_1 \quad x_2]^T. \quad (17)$$

假设时滞为 $h = 2$, 选择

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad (18)$$

则当 $\mu = 1$ 时

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial x} f(x) - \mu \frac{\partial V}{\partial x} g(x) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} + \alpha^T(x) \alpha(x) = \\ & [2x_1 \quad 2x_2] \begin{bmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix} - [2x_1 \quad 2x_2] \begin{bmatrix} \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & \sin x_1 \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & \sin x_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ & -x_1^2 - x_2^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (19)$$

满足不等式(7), 选择 $\rho = 0.5, \sigma = 0.1, \gamma = 1$, 则根据定理1设计控制器为

$$\begin{aligned} u & = - (1 + 0.5\hat{\theta}) g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} = \\ & - (1 + 0.5\hat{\theta}) \begin{bmatrix} 2x_1 \sin x_1 - 2x_2 \cos x_1 \\ 2x_1 \cos x_1 + 2x_2 \sin x_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

自适应律为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}} & = -0.1\hat{\theta} + 10 \left\| g^T(x) \frac{\partial^T V}{\partial x} \right\|^2 = \\ & -0.1\hat{\theta} + 10(4x_1^2 + 4x_2^2). \end{aligned} \quad (21)$$

在仿真中, 设定初始条件为

$$x = [2 \cos t \quad \cos t], \quad t \in [t_0 - h, t_0], \quad (22)$$

$$\hat{\theta}(t_0) = 2. \quad (23)$$

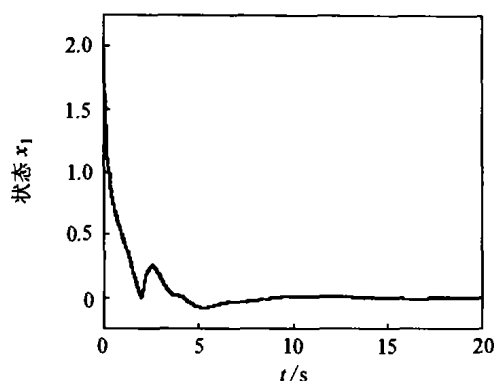
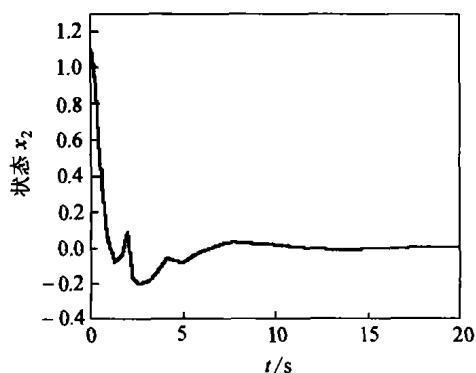
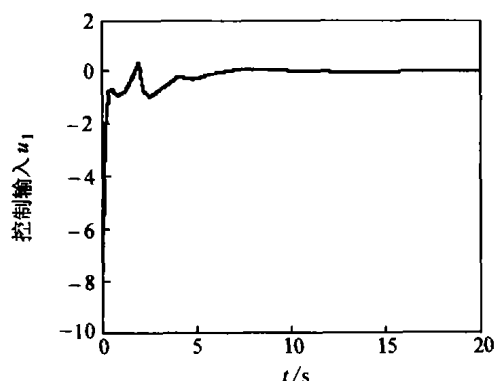
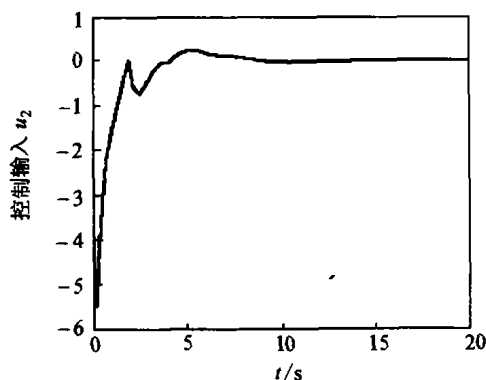
选择具有时滞的函数 $\xi(\cdot)$ 为

$$\xi(x(t-h), t) = \begin{bmatrix} \sqrt{|x_1(t-h)x_2(t-h)|} \\ \sqrt{|x_1(t-h)x_2(t-h)|} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

则满足条件 A1).

在所设定的参数的作用下, 运用 Matlab 软件中的 Simulink 工具箱进行仿真, 所获得的结果如图 1~4 所示.

由图 1~4 可知, 在所设计的控制器作用下, 闭环系统的状态在一致最终有界意义下稳定, 而且具有良好的性能.

图1 系统状态 x_1 Fig. 1 System state x_1 图2 系统状态 x_2 Fig. 2 System state x_2 图3 控制输入 u_1 Fig. 3 Control input u_1 图4 控制输入 u_2 Fig. 4 Control input u_2

5 结论(Conclusion)

本文讨论了一类时滞不确定非线性系统的鲁棒镇定问题.在系统的时滞扰动的上界函数未知,但时滞扰动满足一定的匹配条件的情况下,通过求解一个 Hamilton-Jacobi 不等式设计了一类自适应鲁棒控制器.基于 Lyapunov-Krasovskii 函数,证明了系统的状态和参数估计误差一致最终有界,收敛于一定的剩余集内,并且剩余集的大小可以通过调节控制器的参数值任意调节.

参考文献(References):

- [1] ROUP A V, BERNSTEIN D S. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems with nonparametric uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(11): 1821 - 1825.
- [2] QU Z. Robust control of nonlinear systems by estimating time variant uncertainties [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(1): 115 - 121.
- [3] FRIDMAN E, SHAKED U. H_∞ -state-feedback control of linear systems with small state delay [J]. *System and Control Letters*, 1998, 33(3): 141 - 150.
- [4] GUO Y, ZHOU W, LEE P L. H_∞ control of structured time-delay systems [J]. *System and Control Letters*, 2002, 45(1): 35 - 47.
- [5] KIM J H, PARK H B. H_∞ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system [J]. *Automatica*, 1999, 35(8): 1443 - 1451.
- [6] SU H Y, CHU J. Robust H_∞ control for linear time-varying uncertain time-delay systems via dynamic output feedback [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(10): 1093 - 1107.
- [7] KHARITONOV V L. Robust stability analysis of time delay system: A survey [J]. *Annual Review in Control*, 1999, 23(1): 185 - 196.
- [8] KHARITONOV V L, MELCHOR-AGUILAR D. On delay-dependent stability condition [J]. *System and Control Letters*, 2000, 40(1): 71 - 76.
- [9] LIU P L, SU T S. Robust stability of interval time-delay systems with delay-dependence [J]. *System and Control Letters*, 1998, 33(4): 231 - 239.
- [10] HUANG Y P, ZHOU K. On the robustness of uncertain time-delay systems with structured uncertainties [J]. *System and Control Letters*, 2000, 41(5): 367 - 376.
- [11] WU H S. Adaptive robust state feedback controllers for a class of dynamical systems with delayed state perturbation [C] // *Proc of American Control Conference*. Chicago, Illinois: [s. n.], 2000: 3661 - 3665.
- [12] WU H S. Adaptive stabilizing state feedback controllers for uncertain dynamical systems with multiple time delays [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(9): 1697 - 1701.

作者简介:

吴敏 (1963—),男,中南大学教授、博士生导师,1986年于中南工业大学自动化专业获硕士学位,1999年获日本东京工业大学博士学位,研究领域:鲁棒控制、非线性控制和过程控制, E-mail: min@csu.edu.cn;

张凌波 (1974—),男,2003年于中南大学控制理论与控制工程专业获博士学位,研究领域为非线性控制和鲁棒控制;

何勇 (1969—),男,中南大学副教授,2004年于中南大学控制理论与控制工程专业获博士学位,研究领域为非线性控制、鲁棒控制和时滞系统.