第22卷第2期
2005年4月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.2
Apr. 2005

文章编号: 1000-8152(2005)02-0171-06

跳跃扩散股价的最优投资组合选择

郭文旌
(南京财经大学 金融学院,江苏 南京 210046)

摘要: 假定股票价格服从跳跃扩散过程.在传统均值-方差组合投资模型基础上,最大化最终收益的期望及最小化最终财富的方差.引进一个随机线性二次最优控制问题作为原问题的近似问题.证明了一个状态为跳跃扩散过程的一般最优控制问题的验证性定理.应用验证性定理求解 HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程得到了原问题的最优策略.最后还给出了原问题有效前沿的表达式.

关键词: 跳跃扩散过程; 最优投资组合; HJB方程; 有效前沿

中图分类号: O221　　**文献标识码**: A

Optimal portfolio selection when stock prices follow jump-diffusion process

GUO Wen-jing
(School of Finance, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing Jiangsu 210046, China)

Abstract: It is assumed that the stock price follows the jump-diffusion process. In view of the traditional mean-variance portfolio selection model, we maximize the expected terminal return and minimize the variance of the terminal wealth. A stochastic linear-quadratic control problem is introduced as auxiliary problem of the initial problem. A verification theorem for general stochastic optimal control with the state following a jump-diffusion process is showed. By applying verification theorem to the HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) equation, the optimal strategies in an explicit form for initial control problem are presented. Finally, the efficient frontier in a closed form for the original portfolio selection problem is given.

Key words: jump-diffusion process; optimal portfolio; HJB(Hamilton-Jacobi-Bellman) equation; efficient frontier

1 引言(Introduction)

近年来对最优投资组合选择问题的研究很多,但一般把股票价格描述为一个连续的时间过程,即扩散过程[1~6]. 但是, 正如 Merton[7], Jarrow 与 Rudd[8]指出,由于受到外部信息的影响,股票价格在一个有限时域内很可能有突发性的跳跃,实证结果也证实了这一点.因此用跳跃扩散过程来描述股票价格的趋势更符合实际情况.描述跳跃的方法就是点过程,最一般的是 Poisson 过程.对股价是跳跃-扩散过程的投资、定价问题,近年也有了许多研究. Merton[7], Jarrow 与 Rudd[8], Jones[9]研究了跳扩过程的期权定价问题, Jeanblance-Picque 与 Pontier[10], Bardhan 与 Chao[11]研究了跳扩过程的最优投资消费问题, Bardhan 与 Chao[11]用一般的点过程来描述跳跃,其余均用 Poisson 过程.

处理投资问题的方法一般有两种,正如 Pliska[6]指出,一是最大效用法[1,2,10,11];二是均值-方差分析法[3~5].应用均值-方差分析方法的优点是直观、实用性强.而一般处理最大效用的鞅方法[10,11]就存在这方面的不足.所以研究跳扩过程均值-方差模型具有重要的实际意义.但现有的研究却很少,文献[3~5]考虑的股票价格均是连续过程,没有考虑跳跃.

本文研究了一个跳跃扩散过程的关于投资选择的均值-方差模型,应用 Poisson 过程来描述股票价格的跳跃.由于跳跃因素的存在,关于连续时间的扩散过程的验证性定理[12]不一定成立.为此,本文证明了一个关于扩散过程的一般最优控制的验证性定理.在此验证性定理的基础上,应用动态规划原理,求解 HJB 方程得到原问题的最优策略,最后给出了有效前沿的解析形式.

2 模型(Models)

令 $C([0,T];X) = \{f(\cdot) \mid f:[0,T] \to X;\ f$ 在

收稿日期:2003-06-11; 收修改稿日期:2004-02-25.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(70471071).

$[0,T]$ 上连续$\}$; $L^2(0,T;X) = \{f(\cdot) \mid f:[0,T] \to X; \int_0^T \|f(t)\|_X^2 \mathrm{d}t < \infty\}$. 其中 $\|\cdot\|_X$ 为空间X上的范数.

考虑这样一个金融市场,不确定性来自两个驱动因素:一个是概率空间 (Ω^W, F^W, P^W) 上的 l 维 R^l-值 Brown 运动 $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \cdots, W_l(t))^{\mathrm{T}}$ (上标 T 表示转置);另一个是概率空间 (Ω^N, F^N, P^N) 上密度为 $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \cdots, \lambda_m(t))^{\mathrm{T}}$ 的 m 维 R^m-值 Poisson 过程 $N(T) = (N_1(t), \cdots, N_m(t))^{\mathrm{T}}$, 由文献[10]补偿 Poisson 过程 $M(t) = N(t) - \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s$ 是个 $F^N - P^N$ 鞅.其中 $\{F_t^W\}$ 是 $\sigma(W(s);0 \leqslant s \leqslant t)$ 的扩张; $\{F_t^N\}$ 是 $\sigma(N(s);0 \leqslant s \leqslant t)$ 的扩张.定义积空间

$$(\Omega, F, P) = (\Omega^W \times \Omega^N, F^W \otimes F^N, P^W \otimes P^N),$$

$W(t)$ 与 $N(t)$ 在 (Ω, F, P) 相互独立.

市场上有 $d+1$ 种证券,其中一个无风险证券,价格 $p_0(t)$ 满足方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}p_0(t) = p_0(t)r(t)\mathrm{d}t,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ p_0(0) = p_0. \end{cases}$$

d 个风险证券、价格 $p_1(t), \cdots, p_d(t)$ 满足下面随机微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}p_i(t) = p_i(t-)[b_i(t)\mathrm{d}t + \sum\limits_{j=1}^{l} \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t) + \\ \qquad \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_{ik}(t)\mathrm{d}N_k(t)], \\ p_i(0) = p_i,\ l + m = d,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

其中 $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$.令

$$\begin{cases} b(t) = (b_1(t), \cdots, b_d(t))^{\mathrm{T}}, \\ \sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))_{d \times l}, \\ \varphi(t) = (\varphi_{ik}(t))_{d \times m}. \end{cases}$$

假设利率 $r(t) \in C([0,T];\mathbb{R})$、平均收益率 $b(t) \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$、扩散率 $\sigma(t) \in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times l})$, $\varphi(t) \in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$. $\lambda(t)$ 是 Borel 可测、正的、有界的确定性函数.假定 d 阶矩阵 $\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}}$ 非奇异, $[\sigma(t), \varphi(t)]$ 满足不等式

$$[\sigma(t), \varphi(t)][\sigma(t), \varphi(t)]^{\mathrm{T}} \geqslant \delta I,\ \text{a.s.}\ \forall t \in [0,T].$$

δ 为某个正常数, I 为 d 阶单位矩阵.显然, $[\sigma(t), \varphi(t)]$ 可逆.

考虑一个投资者,他(她)的初始财富为 x, t 时刻的财富量为 $x(t)$. $\pi_i(t)$ 表示他(她) t 时刻在风险证券 i 上的投资量,令 $\pi(t) = (\pi_1(t), \cdots, \pi_d(t))^{\mathrm{T}}$,称 $\pi(t)$ 为一个投资组合.

定义 称 $\pi(t)$ 为允许的,若 $\pi(t)$ 为 F_t-可料过程且

$$\mathrm{E}\left(\int_0^T \|\pi(t)\|^2 \mathrm{d}t\right) < \infty. \tag{2.1}$$

所有允许投资组合的集合记为 Λ.

由文献[10]式(1.13)(这里不考虑消费,即在式(1.13)中视 $c(t) = 0$), $x(t)$ 满足下面方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = [x(t)r(t) + \pi(t)^{\mathrm{T}}(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)]\mathrm{d}t + \\ \qquad \pi(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t)dW(t) + \pi(t)^{\mathrm{T}}\varphi(t)\mathrm{d}N(t), \\ x(0) = x > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $\mathbf{1}_d$ 表示分量全为1的 d 维列向量.投资者的目的是在一个有限时域 $[0,T]$ 内连续地进行投资,力求在最终财富的期望值最大与风险最小之间实现合理的均衡.可以建立模型为

$$\begin{aligned} &\min\{-\mathrm{E}x(T) + \mu \mathrm{var}x(T)\} \\ &\text{s.t. } \pi(\cdot) \in \Lambda,\ (x(\cdot), \pi(\cdot)) \text{ 满足式(2.2)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 μ 为正参数.令 $\Pi_\mu = \{\pi(\cdot) \mid \pi(\cdot)$ 是(2.3)的最优控制$\}$.

为了问题的处理,引进下面单目标模型

$$\begin{aligned} &\min \mathrm{E}\{\mu x(T)^2 - \alpha x(T)\}, \\ &\text{s.t. } \pi(\cdot) \in \Lambda, (x(\cdot), \pi(\cdot)) \text{ 满足式(2.2)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

其中参数 $\mu > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.令 $\Pi_{\mu,\alpha} = \{\pi(\cdot) \mid \pi(\cdot)$ 是式(2.4)的最优控制$\}$.则 Π_μ 与 $\Pi_{\mu,\alpha}$ 的关系由下面引理给出.

引理 对任意 $\mu > 0$, 有

$$\Pi_\mu \subseteq \bigcup_{-\infty < \alpha < \infty} \Pi_{\mu,\alpha}.$$

而且,若 $\pi^*(\cdot) \in \Pi_\mu$, 那么 $\pi^*(\cdot) \in \Pi_{\mu,\alpha^*}$, $\alpha^* = 1 + 2\mu x^*(T)$, $x^*(t)$ 为 $\pi^*(\cdot)$ 通过式(2.2)所对应的财富过程.

证 同文献[3]定理3.1.

对任意 $t \in [0,T]$,令

$$\beta = \frac{\alpha}{2\mu},\ y(t) = \sqrt{\mu}(x(t) - \beta),\ u(t) = \sqrt{\mu}\pi(t), \tag{2.5}$$

则式(2.2)变为

$$\begin{cases} \mathrm{d}y(t) = [(y(t)r(t) + u(t)^{\mathrm{T}}(b(t) - \\ \qquad r(t)\mathbf{1}_d) + \sqrt{\mu}\beta r(t)]\mathrm{d}t + \\ \qquad u(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t)\mathrm{d}W(t) + u(t)^{\mathrm{T}}\varphi(t)\mathrm{d}N(t), \\ y(0) = y = \sqrt{\mu}(x - \beta). \end{cases} \tag{2.6}$$

令 $\tilde{\Lambda} = \{u(\cdot) \mid u(\cdot)$ 可测、关于 F_t 可料且满足式(2.1)$\}$,显然 $\tilde{\Lambda} = \Lambda$,又 $\mu x(T)^2 - \alpha x(T) = y(T)^2 - \frac{\alpha^2}{4\mu}$,$(x(\cdot),\pi(\cdot))$ 满足式(2.2)$\Leftrightarrow$$(y(\cdot),u(\cdot))$ 满足式(2.6),故式(2.4)等价于模型

$$\min \mathrm{E}[\frac{1}{2}y(T)^2]$$
$$\text{s.t. } u(\cdot)\in\tilde{\Lambda},\ (y(\cdot),u(\cdot)) \text{ 满足式(2.6)}. \tag{2.7}$$

3 HJB 方程及验证性定理(HJB equation and verification theorem)

这节考虑如下一个关于跳跃扩散过程的一般最优控制问题.概率空间 (Ω,F,P) 同第 2 节.状态方程为

$$\begin{cases} dy(t) = [A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(t)]dt + \\ \qquad u(t)^{\mathrm{T}}D(t)dW(t) + u(t)^{\mathrm{T}}G(t)dN(t), \\ y(0) = y. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中:$W(t) = (W_1(t),\cdots,W_l(t))^{\mathrm{T}}$ 为 l- 维标准 Brown 运动,$N(t) = (N_1(t),\cdots,N_m(t))^{\mathrm{T}}$ 为 m- 维密度为 $\lambda(t) = (\lambda_1(t),\cdots,\lambda_m(t))^{\mathrm{T}}$ 的 Poisson 过程. $A(t)\in C([0,T];\mathbb{R})$,$B(t)\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$,$D(t)\in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times l})$,$G(t)\in C([0,T];\mathbb{R}^{d\times m})$,$f(t)\in L^2(0,T;\mathbb{R}^d)$. 不妨设 $G(t) = (e_{ik}(t))_{d\times m}$.

控制问题为

$$\min_{u\in\Lambda} \mathrm{E}\{\int_0^T L(s,y(s);u(s))ds + \Psi(T,y(T))\}. \tag{3.2}$$

其中 $L(t,y;u)$,$\Psi(t,y)$ 为连续函数,且满足下面多项式增长条件:

$$|L(t,y;u)| \leqslant c(1+|y|^k+|u|^k),$$
$$|\Psi(t,y)| \leqslant c(1+|y|^k).$$

其中 c,k 为某个常数.允许控制集 $\tilde{\Lambda}$ 同第 2 节.

令

$$J(t,y;u) = $$
$$\mathrm{E}_{t,y}\{\int_t^T L(s,y(s),u(s))ds + \Psi(T,y(T))\},$$
$$V(t,y) = \min_{u\in\tilde{\Lambda}} J(t,y;u),$$

其中 $\mathrm{E}_{t,y} = \mathrm{E}[\cdot \mid y(t) = y, y(s), s\leqslant t]$.

定义变分算子

$$A^u w(t,y(t)) =$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial w}{\partial y}(t,y)(A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(t,y)u(t)^{\mathrm{T}}D(t)D(t)^{\mathrm{T}}u(t) +$$
$$\sum_{k=1}^m \lambda_k(t)[w(t,y+\sum_{i=1}^d u_i(t)e_{ik}(t)) - w(t,y)]. \tag{3.3}$$

有下面验证性定理成立.

定理 1 设 $w\in\{v(t,y) \mid \frac{\partial v}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 存在且连续并且存在某个常值 c,k 使得 $|v(t,y)| \leqslant c(1+|y|^k)\}$,且满足下面变分方程

$$\begin{cases} \min_{u\in\tilde{\Lambda}}\{A^u w + L(t,y;u)\} = 0, \\ w(T,y) = \Psi(T,y(T)). \end{cases} \tag{3.4}$$

若存在 $u^*\in\tilde{\Lambda}$,使得

$u^*(t)\in\arg\min\{A^u w(t,y(t)) + L(t,y(t);u(t))\}$,

则 $w(t,y^*) = V(t,y^*)$,其中 $y^*(t)$ 为 $u = u^*$ 时,式(3.1) 的解 u^* 就是问题(3.1),(3.2)的最优控制.

证 由推广的 Itô 公式(见文献[10]补充部分)

$$dw(t,y) =$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,y)dt + \frac{\partial w}{\partial y}(t,y)[A(t)y(t) + B(t)u(t) + f(t)]dt +$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}(t,y)u(t)^{\mathrm{T}}D(t)dW(t) +$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(t,y)u(t)^{\mathrm{T}}D(t)D(t)^{\mathrm{T}}u(t)dt + \sum_{k=1}^m [w(t,y+\sum_{i=1}^d u_i(t)e_{ik}(t)) - w(t,y)](dM_k(t) + \lambda_k(t)dt),$$

两边积分得

$$w(t,y(t)) =$$
$$w(T,y(T)) - \int_t^T A^u w(s,y(s))ds -$$
$$\int_t^T \frac{\partial w}{\partial y}(s,y(s))u(s)^{\mathrm{T}}D(s)dW(s) -$$
$$\sum_{k=1}^m \int_t^T [w(s,y(s)+\sum_{i=1}^d u_i(s)e_{ik}(s)) - w(s,y(s))]dM_k(s). \tag{3.5}$$

由文献[18]第 3 章命题 2.10 及文献[15]第 II 章引理 3.1 知

$$\int_t^T \frac{\partial w}{\partial y}(s,y(s))u^{\mathrm{T}}(s)D(s)dW(s)$$

与

$$\sum_{k=1}^m \int_t^T [w(s,y(s)+\sum_{i=1}^d u_i(s)e_{ik}(s)) - w(s,y(s))]dM_k(s)$$

是 P 鞅.故对式(3.5)两边取条件期望得

$$\mathrm{E}_{t,y}w(T,y(T)) - w(t,y(t)) = \mathrm{E}_{t,y}[\int_t^T A^u w(s,y(s))ds]. \tag{3.6}$$

另外由定理已知,对任意 $u \in \tilde{\Lambda}$ 有

$$A^u w(t,y(t)) + L(t,y(t);u(t)) \geqslant 0. \quad (3.7)$$

那么由式(3.6),(3.7)得

$$\begin{aligned}&J(t,y(t);u(t)) = \\ &\mathrm{E}_{t,y}\{\int_t^T L(s,y(s);u(s))\mathrm{d}s + \psi(T,y(T))\} \geqslant \\ &\mathrm{E}_{t,y}\{-\int_t^T A^u w(s,y(s))\mathrm{d}s + w(t,y(t)) + \\ &\int_t^T A^u w(s,y(s))\mathrm{d}s\} = w(t,y(t)),\end{aligned}$$

故

$$\min_{u\in\tilde{\Lambda}} J(t,y(t);u(t)) \geqslant w(t,y(t)).$$

若 $u = u^*$ 时,则上述的不等号取等号,即有

$$V(t,y^*(t)) = J(t,y^*(t),u^*(t)) = w(t,y^*(t)),$$

所以 u^* 就是控制问题(3.1),(3.2)的最优控制.定理得证.

式(3.4)称为控制问题(3.1),(3.2)所对应的HJB方程.

4 最优策略(Optimal strategies)

本节利用验证定理来求解问题(2.7)的最优策略,然后根据引理来得到原问题的最优策略.

令

$$V(t,y) = \min_{u\in\tilde{\Lambda}} \mathrm{E}_{t,y}[\frac{1}{2}y(T)^2]. \quad (4.1)$$

问题(2.7)的所对应的HJB方程为

$$\begin{cases}\min\limits_{u\in\tilde{\Lambda}}\{\dfrac{\partial V}{\partial t}(t,y) + \dfrac{\partial V}{\partial y}(t,y)[r(t)y(t) + \\ u(t)^{\mathrm{T}}(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d) + \sqrt{\mu}\beta r(t)] + \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}(t,y)u(t)^{\mathrm{T}}\sigma(t)\sigma(t)^{\mathrm{T}}u(t) + \\ \sum\limits_{k=1}^m \lambda_k(t)[V(t,y(t) + \sum\limits_{i=1}^d u_i(t)\varphi_{ik}(t)) - \\ V(t,y(t))]\} = 0, \\ V(T,y(T)) = \dfrac{1}{2}y(T)^2.\end{cases} \quad (4.2)$$

令

$$V(t,y) = \frac{1}{2}P(t)y^2 + Q(t)y + R(t). \quad (4.3)$$

将式(4.3)代入式(4.2)并整理得

$$\begin{aligned}&\min_{u\in\tilde{\Lambda}}\{\frac{1}{2}P(t)[\sigma(t)^{\mathrm{T}}u(t) + \sigma(t)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(y(t) + \\ &\frac{Q(t)}{P(t)})(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)]^{\mathrm{T}}[\sigma(t)^{\mathrm{T}}u(t) + \\ &\sigma(t)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(y(t) + \frac{Q(t)}{P(t)})(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)] + \\ &\frac{1}{2}P(t)\sum_{k=1}^m\lambda_k(t)[\sum_{i=1}^d u_i(t)\varphi_{ik}(t) + (y(t) + \frac{Q(t)}{P(t)})]^2 + \\ &\frac{1}{2}[P'(t) + (2r(t) - (b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t) - \\ &r(t)\mathbf{1}_d) - \sum_{k=1}^m\lambda_k(t))P(t)]y^2(t) + \\ &[Q'(t) + (r(t) - (b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d) - \\ &\sum_{k=1}^m\lambda_k(t))Q(t) + \sqrt{\mu}\beta r(t)P(t)]y(t) + \\ &[R'(t) + \sqrt{\mu}\beta r(t)Q(t) - \frac{1}{2}((b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma_t^{-1}(b(t) - \\ &r(t)\mathbf{1}_d) + \sum_{k=1}^m\lambda_k(t))\frac{Q(t)^2}{P(t)}]\} = 0,\end{aligned} \quad (4.4)$$

其中 $\Sigma(t) = \sigma(t)\sigma^{\mathrm{T}}(t)$. 令

$$\begin{cases}P'(t) + [2r(t) - (b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t) - \\ r(t)\mathbf{1}_d) - \sum\limits_{k=1}^m\lambda_k(t)]P(t) = 0, \\ P(T) = 1, \\ p(t) > 0,\ \forall t \in [0,T],\end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases}Q'(t) + [r(t) - (b(t) - r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t) - \\ r(t)\mathbf{1}_d) - \sum\limits_{k=1}^m\lambda_k(t)]Q(t) + \sqrt{\mu}\beta r(t)P(t) = 0, \\ Q(T) = 0,\end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases}R'(t) + \sqrt{\mu}\beta r(t)Q(t) - \dfrac{1}{2}[(b(t) - \\ r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d) + \\ \sum\limits_{k=1}^m\lambda_k(t)]\dfrac{Q(t)^2}{P(t)} = 0, \\ R(T) = 0.\end{cases} \quad (4.7)$$

式(4.5)~(4.7)都是有初始条件的一阶线性常微分方程,故都存在唯一解.又对 $\forall t \in [0,T]$, $P(t) = \mathrm{e}^{\int_t^T \gamma(s)\mathrm{d}s} > 0$, 其中 $\gamma(s) = 2r(s) - (b(s) - r(s)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(s)(b(s) - r(s)\mathbf{1}_d) - \sum_{k=1}^m\lambda_k(s)$;又已知 $\lambda(t) > 0$, 故HJB方程(4.2)的最优解为下面方程组的解:

$$\begin{cases}\sigma(t)^{\mathrm{T}}u(t) = \\ -\sigma(t)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(y(t) + \dfrac{Q(t)}{P(t)})(b(t) - r(t)\mathbf{1}_d), \\ \varphi(t)^{\mathrm{T}}u(t) = -(y(t) + \dfrac{Q(t)}{P(t)})\mathbf{1}_m.\end{cases} \quad (4.8)$$

其中 $\mathbf{1}_m$ 为 m 维分量全为1的列向量.因 $[\sigma(t),$

$\varphi(t)]$ 可逆,从而 $[\sigma(t),\varphi(t)]^{\mathrm{T}}$ 可逆,故式(4.8)有唯一解

$$u^*(t)=([\sigma(t),\varphi(t)]^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-\sigma(t)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(\gamma(t)+\dfrac{Q(t)}{P(t)})(b(t)-r(t)\mathbf{1}_d)\\-(\gamma(t)+\dfrac{Q(t)}{P(t)})\mathbf{1}_m\end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

由定理 1, $u^*(t)$ 就是问题(2.7)的最优策略.

利用式(4.5),(4.6)容易得到

$$\frac{Q(t)}{P(t)}=\sqrt{\mu}\beta(1-\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}). \tag{4.10}$$

定理 2　对给定的参数 $\mu>0,\alpha\in\mathbb{R}$, 问题(2.4)的最优策略为

$$\pi^*(t)=([\sigma(t),\varphi(t)]^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\sigma(t)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t)-r(t)\mathbf{1}_d)(\beta\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}-x(t))\\(\beta\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}-x(t))\mathbf{1}_m\end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

其中 $\beta=\dfrac{\alpha}{2\mu}$.

证　将式(4.10)代入式(4.9)并考虑到变换式(2.5)即得.

注　对于维数,若取 $l=d,m=0$, 即股票价格中只含 Brown 运动,则容易看出,式(4.11)就是文献[3]的结论式(5.12).所以式(4.11)可以看成是对文献[3]结论式(5.12)的推广.也可以取 $l=0,m=d$, 即股票价格中只包含 Poisson 点过程,由式(4.11)该情形的最优策略为

$$\pi^*(t)=(\beta\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}-x(t))\varphi^{-1}(t)\mathbf{1}_m.$$

下面应用引理来得到原问题的最优策略.

将式(4.11)代入式(2.2)并在得到的等式两边取期望得

$$\begin{cases}\mathrm{dE}x(t)=[(r(t)-\rho(t)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(t))\mathrm{E}x(t)+\\\qquad\beta\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}(\rho(t)+\mathbf{1}_m{}^{\mathrm{T}}\lambda(t))]\mathrm{d}t,\\\mathrm{E}x(0)=x.\end{cases} \tag{4.12}$$

其中 $\rho(t)=((b(t)-r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)\sigma(t),\mathbf{1}_m)[\sigma(t),\varphi(t)]^{-1}(b(t)-r(t)\mathbf{1}_d)$. 解方程(4.12)得

$$\mathrm{E}x(t)=x\mathrm{e}^{\int_0^t[r(s)-\rho(s)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s)]\mathrm{d}s}+\beta\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}(1-\mathrm{e}^{-\int_0^t[\rho(s)+\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s)]\mathrm{d}s}). \tag{4.13}$$

解关于 α 的方程

$$\alpha=1+2\mu\mathrm{E}x(T),$$

得

$$\alpha^*=\mathrm{e}^{\int_0^T(\rho(s)+\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s))\mathrm{d}s}+2\mu x\mathrm{e}^{\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}.$$

由引理,在式(4.11)中取 $\beta=\dfrac{\alpha^*}{2\mu}$ 即得原问题的最优策略.

5　有效前沿(Efficient frontier)

本节有效前沿的定义同文献[3]定义 2.2.

对 $x(t)^2$ 应用推广的 Itô 公式然后在等式两边取期望得

$$\begin{aligned}\mathrm{dE}x(t)^2=&[(2r(t)-2\rho(t)+\eta(t)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(t))\mathrm{E}x(t)^2+\\&2\beta\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}(\rho(t)-\eta(t))\mathrm{E}x(t)+\\&\beta^2\mathrm{e}^{-2\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}(\eta(t)+\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(t))]\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中 $\eta(t)=(b(t)-r(t)\mathbf{1}_d)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(t)(b(t)-r(t)\mathbf{1}_d)$. 解此方程得

$$\mathrm{E}x(t)^2=x^2g(t)+\beta h(t)+\beta^2k(t). \tag{5.1}$$

其中

$$g(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t(2r(s)-2\rho(s)+\eta(s)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s))\mathrm{d}s},$$

$$h(t)=\int_0^t 2x\mathrm{e}^{-\int_s^T r(u)\mathrm{d}u}(\rho(s)-\eta(s))a(s)\mathrm{e}^{\int_s^t(2r(u)-2\rho(u)+\eta(u)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(u))\mathrm{d}u}\mathrm{d}s,$$

$$k(t)=\int_0^t[2\mathrm{e}^{-\int_s^T r(u)du}(\rho(s)-\eta(s))c(s)+\mathrm{e}^{-2\int_s^T r(u)\mathrm{d}u}(\eta(s)+\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s))]\mathrm{e}^{\int_s^t(2r(u)-2\rho(u)+\eta(u)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(u))\mathrm{d}u}\mathrm{d}s,$$

$$a(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t(r(s)-\rho(s)-\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s))\mathrm{d}s},$$

$$c(t)=\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s}(1-\mathrm{e}^{\int_0^t(\rho(s)+\mathbf{1}_m^{\mathrm{T}}\lambda(s))\mathrm{d}s}).$$

由式(4.13)解得

$$\beta=\frac{\mathrm{E}x(t)-xa(t)}{c(t)}, \tag{5.2}$$

那么

$$\begin{aligned}\mathrm{var}x(T)=&\mathrm{E}x(T)^2-[\mathrm{E}x(T)]^2=\\&(x^2g(T)+\beta h(T)+\beta^2k(T))-(xa(T)+\beta c(T))^2=\\&[k(T)-c(T)^2]\beta^2+(h(T)-2xa(T)c(T))\beta+\\&x^2(g(T)-a(T)^2).\end{aligned} \tag{5.3}$$

将式(5.2)代入式(5.3)得

$$\mathrm{var}x(T) = \frac{k(T)-c(T)^2}{c(T)^2}(\mathrm{E}x(T)-xa(T))^2 + \frac{h(T)-2xa(T)c(T)}{c(T)}(\mathrm{E}x(T)-xa(T)) + x^2(g(T)-a(T)^2). \tag{5.4}$$

式(5.4)就是原问题的有效前沿.

参考文献(References):

[1] MERTON R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model [J]. *J of Economic Theory*, 1971, 3(12): 373 - 413.

[2] COX J C, HUANG C F. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process [J]. *J of Economic Theory*, 1989, 49(1): 33 - 83.

[3] ZHOU X Y, LI D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2000, 42(1): 19 - 33.

[4] LIM A, ZHOU X Y. Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2002, 27(1): 101 - 120.

[5] LI X, ZHOU X Y, LIM A. Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints [J]. *SIMA J of Control and Optimization*, 2002, 40(5): 1540 - 1555.

[6] PLISKA S R. A stochastic calculus model of continuous trading optimal portfolio [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1986, 11(2): 371 - 382.

[7] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous [J]. *J of Financial Economics*, 1976, 3(1): 125 - 144.

[8] JARROW R A, RUDD A. *Option Pricing*[M]. Illinois: Irwin, 1983.

[9] JONES E P. Option arbitrage and strategy with large price changes [J]. *J of Financial Economics*, 1984, 13(1): 91 - 113.

[10] JEANBLANCE-PICQUE M, PONTIER M. Optimal portfolio for a small investor in a market model with discontinuous prices [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1990, 22(2): 287 - 310.

[11] BARDHAN I, CHAO X L. Martingale analysis for assets with discontinous returns [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1995, 20(1): 243 - 256.

[12] FLEMING W H, SONER H M. *Controlled Markov Processes and Visoosity Solution* [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[13] IKEDA N, WATANABE S. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* [M]. New York: North-Holland, 1981.

[14] BREMAUD P. *Point Processes and Queues* [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[15] YONG J, ZHOU X Y. *Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[16] KARATZAS I, SHREVE S E. *Brown Motion and Stochastic Calculus (Second Edition)* [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

作者简介:

郭文旌 (1971—),男,博士,主要研究兴趣为组合投资、风险管理,E-mail: guowenjing1971@sina.com.cn.