

网站竞争模型的定性分析

吴 红, 王远世

(中山大学 数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 描述互联网网站竞争系统的模型中, 较为典型的是三网站 Lotka-Volterra 模型. 已有文献通过大量的数值计算, 发现该模型反映了强者胜弱者、弱者联合可胜强者等有趣的现象. 但是, 已有文献中的结论来自于大量的数值计算, 它们未得到严格的证明, 也不够完整. 本文用微分方程定性理论的方法, 对这类网站竞争模型进行了彻底的分析, 不仅严格证明了已有文献中的经验性结论, 而且给出了一系列新的网站获胜策略.

关键词: 互联网; 强势网站; 渐近稳定性

中图分类号: O174 **文献标识码:** A

Qualitative analysis of a model for competitive web sites

WU Hong, WANG Yuan-shi

(School of Mathematics and Computational Science, Zhongshan University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

Abstract: Among the models of describing web sites' competition in the Internet market, three dimensional Lotka-Volterra model is the simplest to account at the same time for weak competition and strong competition. Unexpected strategies for sites to win are defined by numerical integrations in a previous paper. However, these strategies are not proven and not complete. In this paper, a complete analysis of the model is given and the known strategies are proven by the methods of qualitative analysis of differential equations. Furthermore, a series of new and interesting strategies for sites to win are shown.

Key words: internet; strong web site; asymptotic stability

1 引言(Introduction)

在互联网市场上, 建立新网站需要一定的初始投入, 而一旦网站建成, 后续的投入相对于其广告收入而言, 几乎可以忽略, 如一张网页的制作成本就很低. 因此, 为争夺互联网市场潜在的巨额利润, 不少新网站陆续建立. 但是, 据文献[1, 2]中的有关统计资料, 市场上极少数的网站占有着绝大部分的用户点击率, 而大多数网站的点击率几近于零, 即互联网市场存在霸主(Winner-Take-All)现象. 这里, 网站的用户点击率指单位时间内访问该网站的用户数. 由于点击率与网站的广告收入密切相关, 故点击率太低的网站难以在互联网市场生存. 因此, 对大多数网站而言, 重要的是如何能在竞争激烈的市场上生存下来, 即如何保证自己的点击率不趋于零.

2000 年, Adamic 和 Huberman^[3]引入 n 维 Lotka-Volterra 模型描述互联网网站竞争系统. 对该模型的数值计算表明, 当网站竞争激烈时, 市场上必定出现霸主现象. 2001 年, Lopez 等^[4]用与文献[3]相同的

模型研究 3 个网站组成的竞争系统, 数值计算表明, 二个初始点击率较低的小网站能通过相互协作与点击率较高的大网站相抗衡. 由此, 文献[4]给出一系列有趣的小网站战胜大网站的策略. 文献[4]中的模型如下:

$$\begin{cases} x_1' = x_1(b - bx_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \\ x_2' = x_2(b - a_{21}x_1 - bx_2 - a_{23}x_3), \\ x_3' = x_3(b - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - bx_3). \end{cases} \quad (1)$$

其中: 变量 x_i 为网站 i 的用户点击率, 变量 $x_i' = dx_i/dt$ 表示 x_i 的变化率; 参数 b 为网站点击率的固有增长率, 它反映了网站对用户的吸引力, $b > 0$; 参数 $a_{ij}(i \neq j)$ 表示网站 j 对网站 i 的竞争强度: a_{ij} 越大, 则因网站 j 的存在而导致网站 i 的用户流失数越大. 假定网站间的相互作用具有对称性, 即有 $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij} > 0$.

在模型(1)描述的 3 网站竞争系统中, 如果网站 i 与网站 j 的竞争很激烈, 即它们提供相同的服务,

则访问了网站 j 的用户不会再去访问网站 i , 同理, 访问了网站 i 的用户也不会再去访问网站 j . 如果网站 i 与网站 j 的竞争较为温和, 即它们提供的服务具有一定的互补性, 则访问了网站 j 的用户, 其中一部分会再去访问网站 i , 同理, 访问了网站 i 的用户, 其中一部分也会再去访问网站 j . 由文献[3]知, 激烈的竞争将导致初始点击率较高的网站成为霸主, 而其他网站灭绝. 因此, 初始点击率较低的小网站应采取恰当的策略, 方能在市场上生存.

定义 1^[4] 称系统(1)中的网站 i 与网站 j 属强竞争, 如果 $a_{ij} > b$. 称网站 i 与网站 j 属弱竞争, 如果 $a_{ij} < b$.

定义 2^[4] 系统(1)中的强势网站是指在初始时刻点击率最高的网站, 其他网站则称为弱势网站; 称某网站为霸主, 如果其他网站均灭绝, 只有它独存.

本文关心的问题是: 在一个由 3 个网站组成的系统中, 弱势网站应如何选择竞争策略, 以求能在市场上持久生存. 文献[4]通过对系统(1)的大量的数值计算, 给出两个弱势网站相互弱竞争从而战胜强势网站的一系列策略, 但其所得结论是经验性的, 未得到严格的证明, 也不够完整. 本文用微分方程定性理论的方法, 对系统(1)进行了彻底的分析, 不仅严格证明了已有文献中的经验性结论, 而且给出了一系列新的网站获胜策略.

2 模型的可投影性(Projection of the model)

由于三维空间中的定性研究比较困难, 在本节利用系统(1)的可投影性, 将其投影至二维平面, 并对该平面系统进行初步的分析.

因坐标平面为系统(1)的不变曲面, 故本文以下均假设 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, 并记 $\text{int } \mathbb{R}_+^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_i > 0, 1 \leq i \leq 3\}$.

引理 1^[5] 系统(1)在 $\mathbb{R}_+^3 \setminus \{0\}$ 中的轨线均收敛于一均衡子流形 Σ , Σ 通过径向投影映射同胚于单位单纯形 $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) : \sum_{i=1}^3 x_i = 1, x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3\}$.

由引理 1 知, 系统(1)的解必收敛于一个二维子流形. 进一步, 有

引理 2 系统(1)在 $\text{int } \mathbb{R}_+^3$ 中的轨线, 能通过径向投影映射投影到平面 $\pi_1 = \{x \in \text{int } \mathbb{R}_+^3 : x_1 =$

1}, 投影后的系统为

$$\begin{cases} x'_2 = \\ x_2[(b - a_{12}) + (a_{12} - b)x_2 + (a_{13} - a_{23})x_3], \\ x'_3 = \\ x_3[(b - a_{13}) + (a_{12} - a_{23})x_2 + (a_{13} - b)x_3]. \end{cases} \quad (2)$$

证 令 $z_i(x) = \frac{x_i}{x_1}, i = 2, 3$, 则系统(1)变为

$$\frac{dz_i}{d\tau} \Big|_{(1)} = x_1 z_i \left(\sum_{j=2}^3 (a_{1j} - a_{ij}) z_j + (a_{11} - a_{i1}) \right), i = 2, 3.$$

其中 $a_{kk} = b, k \in \{1, 2, 3\}$. 作代换 $d\tau = x_1 dt$, 再由 $a_{ji} = a_{ij}$, 得到系统(2). 证毕.

由引理 1 与引理 2 知, 系统(1)的全局定性性态取决于系统(2)的全局定性性态, 故以下考虑系统(2). 记直线 $l_1: (b - a_{21}) + (a_{12} - b)x_2 + (a_{13} - a_{23})x_3 = 0$, 其斜率 $k_1 = (b - a_{12})/(a_{13} - a_{23})$; 记直线 $l_2: (b - a_{13}) + (a_{12} - a_{23})x_2 + (a_{13} - b)x_3 = 0$, 其斜率 $k_2 = (a_{23} - a_{12})/(a_{13} - b)$; 记直线 $l: x_3 = x_2 + 1$. 若 $a_{13} - a_{23} - b + a_{12} \neq 0$, 则直线 l 与 l_1 相交于 $(\beta, \beta + 1)$, 其中 $\beta = -(b - a_{12} + a_{13} - a_{23})/(a_{13} - a_{23} - b + a_{12})$.

系统(2)可能的平衡点为 $O_1(0, 0), P_2(0, 1), P_3(1, 0), P_4(p_{41}, p_{42})$, 其中

$$p_{41} = \frac{(b - a_{13})(b - a_{12} - a_{13} + a_{23})}{(b - a_{23})(b - a_{23} + a_{13} - a_{12})},$$

$$p_{42} = \frac{(b - a_{12})(b - a_{13} + a_{12} - a_{23})}{(b - a_{23})(b - a_{23} + a_{13} - a_{12})}.$$

为讨论系统(2)平衡点的局部稳定性, 下面计算其在各平衡点处 Jacobi 矩阵的特征根. 系统(2)在 O_1 处的 Jacobi 矩阵的特征根为: $b - a_{12}, b - a_{13}$; 在 P_2 处的特征根为: $-b + a_{13}, b + a_{13} - a_{23} - a_{12}$; 在 P_3 处的特征根为: $-b + a_{12}, b - a_{13} - a_{23} + a_{12}$; 在 P_4 处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} (a_{12} - b)P_{41} & (a_{13} - a_{23})P_{41} \\ (a_{12} - a_{23})P_{42} & (a_{13} - b)P_{42} \end{pmatrix}.$$

为分析系统(2)的全局定性性态, 考虑其在无穷远处的平衡点. 记 $x_2 = \frac{1}{z}, x_3 = \frac{u}{z}$ ^[6], 式(2)变为

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -z[(a_{12} - b) + (b - a_{12})z + (a_{13} - a_{23})u], \\ \frac{du}{d\tau} = u[(b - a_{23}) + (a_{12} - a_{13})z + (a_{23} - b)u]. \end{cases} \quad (3)$$

其中 $d\tau = \frac{dt}{z}$, 则 $O_2(0,0), P_1(0,1)$ 为系统(3)的平衡点. O_2 对应于系统(2)沿 x_2 轴的无穷远点. 系统(3)在 O_2 处的 Jacobi 矩阵的特征根为 $b - a_{12}, b - a_{23}$; 在 P_1 处的特征根为 $b - a_{12} + a_{23} - a_{13}, a_{23} - b$.

考虑系统(2)沿 x_3 轴的无穷远点. 令 $x_3 = \frac{1}{z}$, $x_2 = \frac{u}{z}$, 式(2)变为

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\tau} = -z[(a_{13} - b) + (b - a_{13})z + (a_{12} - a_{23})u], \\ \frac{du}{d\tau} = u[(b - a_{23}) + (a_{13} - a_{12})z + (a_{23} - b)u]. \end{cases} \quad (4)$$

其中 $d\tau = \frac{dt}{z}$. 则 $O_3(0,0)$ 是系统(4)的平衡点, 对应于系统(2)沿 x_3 轴的无穷远点. 系统(4)在 O_3 处的 Jacobi 矩阵的特征根为 $b - a_{13}, b - a_{23}$.

3 主要结论及证明 (Main results and their proofs)

本节分析系统(2)的全局定性性态, 并将有关结论推广至更一般的情形, 这些结论将在第4节中用于网站竞争策略分析.

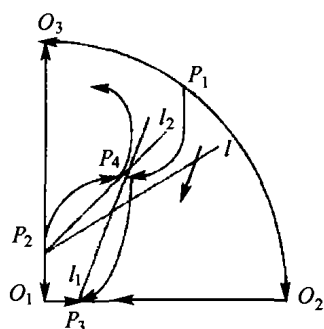
考虑由两个弱势网站与一个强势网站组成的竞争系统. 分两种情形来考虑其竞争关系: 一种是两个弱势网站之间为弱竞争, 但它们与强势网站之间为强竞争; 另一种是3个网站之间均为强竞争.

首先考虑两个弱势网站之间为弱竞争, 但它们与强势网站之间为强竞争的情形. 设网站3为强势网站, 有

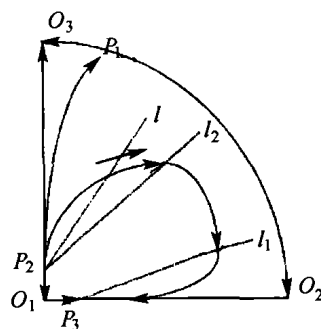
定理1 设 $a_{12} < b, a_{13} > a_{23} > b$.

i) 若 $\frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} > 1$, 则图1(a)为系统(2)的全局定性图.

ii) 若 $\frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} \leq 1$, 则图1(b)为系统(2)的全局定性图.



(a) l_1 与 l_2 相交的情形



(b) l_1 与 l_2 不相交的情形

图1 两个弱势网站之间弱竞争, 但与强势网站进行强竞争时的全局定性图

Fig. 1 Dynamics of two small collaborating sites competing strongly with the strong site

证 i) 由 $\frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} > 1$ 知 $\beta > 0$, 由系统(2)在平衡点处 Jacobi 矩阵的特征根知, O_1, O_2, P_4 为鞍点, P_3, O_3 为稳定结点, P_1, P_2 为不稳定结点. 由 $k_1 > k_2 > 1$, 知 π_1 被 l_1 和 l_2 分为4个区域, 见图1(a).

在 l 上, 当 $0 < x_2 < \beta$ 时, $x'_2 > 0, x'_3 < 0$; 当 $x_2 > \beta$ 时, $x'_2 < 0, x'_3 < 0, \frac{dx_3}{dx_2} = \frac{x'_3}{x'_2} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - \beta} > 1$. 于是从 l 出发的解当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于 P_3 . 因此存在系统(2)的解, 其初值 $(x_2(0), x_3(0))$ 满足 $x_3(0) > x_2(0) + 1$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 趋于 P_3 . 因此系统(2)的全局定性图如图1(a)所示.

ii) 由 $\frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} \leq 1$ 知 $P_4 \notin \pi_1$. 由系统(2)在平衡点处 Jacobi 矩阵的特征根知, O_1, O_2 为鞍点, P_3, O_3 为稳定结点, P_2 为不稳定结点. 当 $\frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} < 1$ 时, P_1 为鞍点. 由文献[6]知当 $\frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} = 1$ 时, P_1 为鞍结点, 且当 $z > 0, u > 0$ 时, P_1 为鞍点. 由 $0 < k_1 < k_2 < 1$, 知 π_1 被 l_1 和 l_2 分为3个区域, 见图1(b).

在 l 上, $x'_2 > 0, x'_3 > 0, \frac{dx_3}{dx_2} = \frac{x'_3}{x'_2} < 1$. 于是系统(2)的解 $(x_2(t), x_3(t))$, 若满足 $x_3(0) = x_2(0) + 1$, 则必有 $x_3(t) \leq x_2(t) + 1$, 其中 $t > 0$. 因此从 l 上出发的解当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 必趋于 P_3 . 事实上, 设有系统(2)的解 $(x_2^0(t), x_3^0(t))$, 其初值满足 $x_3^0(0) = x_2^0(0) + 1$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 P_1 . 因 P_1 为鞍点, 系统(2)的任一解 $(x_2(t), x_3(t))$ 若初值满足 $x_3(0) = x_2(0) + 1$ 及 $x_2(0) > x_2^2(0)$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于 O_3 . 即 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_3(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_2(t)}{x_3(t)} = 0$.

故存在 $T > 0$, 使得当 $t > T$ 时, $\frac{x_3(t)}{x_2(t)} > 2$, 这与当 $t > 0$ 时 $x_3(t) \leq x_2(t) + 1$ 矛盾. 故存在系统(2)的解其初值满足 $x_3(0) > x_2(0) + 1$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于 P_3 .

因此系统(2)的全局定性图如图 1(b)所示.

证毕.

推论 1 设 $a_{12} < b, a_{13} > a_{23} > b$, 系统(2)的解若初值满足 $x_2(0) + 1 \geq x_3(0)$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 必趋于 P_3 . 又存在系统(2)的解, 其初值满足 $x_3(0) > x_2(0) + 1$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 P_3 .

类似于定理 1 的证明, 有

定理 2 设 $a_{12} < b, a_{13} = a_{23} > b$, 则图 1(a) 为系统(2)的全局定性图. 若系统(2)解的初值满足 $x_2(0) + 1 \geq x_3(0)$, 则该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于 P_3 . 又存在系统(2)的解, 其初值满足 $x_3(0) > x_2(0) + 1$, 该解当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于 P_3 .

考虑 3 个网站之间均为强竞争的情形. 类似于定理 1 的证明, 有

定理 3 设 $a_{12} = a_{13} = a_{23} > b$, 则 P_4 为系统(2)的平衡点.

i) 若 $x_2(0) < 1, x_3(0) < 1$, 则初值为 $(x_2(0), x_3(0))$ 的系统(2)的解 $(x_2(t), x_3(t))$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于 O_1 ;

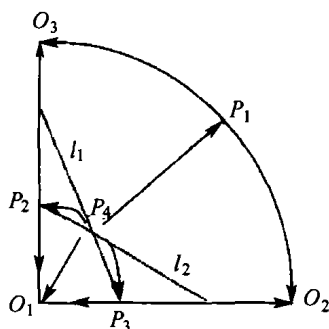
ii) 若 $x_2(0) = 1, x_3(0) < 1$, 则初值为 $(x_2(0), x_3(0))$ 的系统(2)的解, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时必趋于 P_3 .

定理 3 表明, 在等强度的强竞争中, 强势网站将成为霸主.

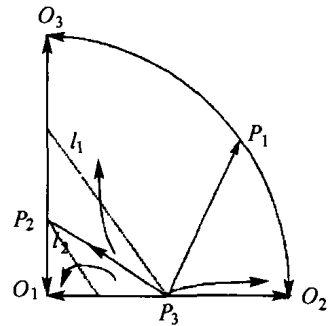
定理 4 设 $a_{12} \geq a_{13} \geq a_{23} > b, a_{12} > a_{23}$.

i) 若 $\frac{a_{13} - b}{a_{12} - a_{23}} > 1$, 则图 2(a) 为系统(2)的全局定性图;

ii) 若 $\frac{a_{13} - b}{a_{12} - a_{23}} \leq 1$, 则图 2(b) 为系统(2)的全局定性图.



(a) l_1 与 l_2 相交的情形



(b) l_1 与 l_2 不相交的情形

图 2 3 个网站之间均为强竞争时的全局定性图

Fig. 2 Dynamics of three strongly competing sites

考虑更一般的系统

$$x'_i = x_i(b - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

其中: $x_i \geq 0, b > 0, a_{ij} > 0, i, j = 1, 2, 3$.

类似于定义 1, 称网站 i 与网站 j 属强竞争, 如果 $a_{ij} > a_{ji}$; 称网站 i 与网站 j 属弱竞争, 如果 $a_{ij} < a_{ji}$.

完全类似于引理 1 的证明, 可证该系统在 $\text{int } \mathbb{R}_+^3$ 中的轨线, 能通过径向投影映射投影到平面 $\pi_1 = \{x \in \text{int } \mathbb{R}_+^3 : x_1 = 1\}$, 投影后的系统为

$$\begin{cases} x'_2 = x_2[(a_{11} - a_{21}) + (a_{12} - a_{22})x_2 + (a_{13} - a_{23})x_3], \\ x'_3 = x_3[(a_{11} - a_{31}) + (a_{12} - a_{32})x_2 + (a_{13} - a_{33})x_3]. \end{cases} \quad (6)$$

以下定理 5 与定理 6 的证明, 完全类似于定理 1 的证明, 故只叙述结论. 考虑两个弱势网站之间为弱竞争, 但它们与强势网站之间为强竞争的情形. 设网站 3 为强势网站, 有

定理 5 设 $a_{ij} < a_{ji}, a_{i3} > a_{33}, a_{3i} > a_{ii}, i \neq j, i, j = 1, 2$.

i) 若 $a_{13} < a_{23}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}} \geq \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{23} - a_{13}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 1(b)拓扑等价;

ii) 若 $a_{13} < a_{23}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}} \geq \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{23} - a_{13}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 1(a)拓扑等价;

iii) 若 $a_{13} \geq a_{23}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{13} - a_{23}} > \frac{a_{32} - a_{12}}{a_{13} - a_{33}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 1(a)拓扑等价;

iv) 若 $a_{13} > a_{23}, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{13} - a_{23}} \leq \frac{a_{32} - a_{12}}{a_{13} - a_{33}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 1(b)拓扑等价.

考虑 3 个网站之间均为强竞争的情形, 有

定理 6 设 $a_{ij} > a_{ji}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$.

i) 若 $a_{13} > a_{23}, a_{12} \leq a_{32}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}} \geq$

$\frac{a_{21} - a_{11}}{a_{13} - a_{23}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 2(b)拓扑等价;

ii) 若 $a_{13} > a_{23}, a_{12} \leq a_{32}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}} <$

$\frac{a_{21} - a_{11}}{a_{13} - a_{23}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 2(a)拓扑等价;

iii) 若 $a_{13} > a_{23}, a_{12} > a_{32}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}} < \frac{a_{21} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 2(a)拓扑等价;

iv) 若 $a_{13} > a_{23}, a_{12} > a_{32}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{13} - a_{33}} \geq \frac{a_{21} - a_{11}}{a_{13} - a_{23}}, \frac{a_{31} - a_{11}}{a_{12} - a_{32}} \geq \frac{a_{21} - a_{11}}{a_{12} - a_{22}}$, 则系统(6)的全局定性图与图 2(b)拓扑等价.

注 1 由网站 2 与网站 3 的对称性知, 定理 6 给出了 3 网站之间为强竞争时系统(6)所有可能的轨线拓扑结构.

4 网站竞争策略分析 (Strategies for competitive web sites)

在本节, 根据系统(2)的全局定性性态, 以及系统(1)与系统(2)的影射关系, 给出系统(1)中网站竞争策略的分析.

系统(1)与系统(2)的解之间的关系如下: 记 $Z_3 = \{1, 2, 3\}$ 为三元循环群. 记 $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ 为系统(1)的解, 其初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$, 则 $(y_2(t), y_3(t)) = (\frac{x_2(t)}{x_1(t)}, \frac{x_3(t)}{x_1(t)})$ 为系统(2)的解, 其初值为 $(y_2(0), y_3(0)) = (\frac{x_2(0)}{x_1(0)}, \frac{x_3(0)}{x_1(0)})$. 故 $x_1(0) + x_2(0) < x_3(0)$ 当且仅当 $y_2(0) + 1 < y_3(0)$. 不等式 $x_1(0) + x_2(0) < x_3(0)$ 意味着网站 1 与网站 2 的初值之和小于网站 3 的初值.

若系统(2)的解 $(y_2(t), y_3(t)) = (\frac{x_2(t)}{x_1(t)}, \frac{x_3(t)}{x_1(t)})$ 趋于 O_i , 则有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_j(t) = 0, j = i + 1, i + 2, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 1$, 即网站 i 为霸主, $i, j \in Z_3$.

若系统(2)的解 $(y_2(t), y_3(t)) = (\frac{x_2(t)}{x_1(t)}, \frac{x_3(t)}{x_1(t)})$ 趋于 P_i , 则有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_j(t) = \frac{b}{b + a_{i+1, i+2}}, j = i + 1, i + 2, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$, 即网站 i 灭绝, 网站 $i + 1$, 网站 $i + 2$ 获胜, $i, j \in Z_3$.

由定理 1~4 知, 文献[4]中由数值计算得到的所有策略, 均在本文得到严格证明, 并在定理 5, 6 中推广至一般情形:

1) 定理 1, 2 讨论了两个弱势网站之间弱竞争, 但与强势网站进行强竞争的情形. 当两个弱势网站的初值之和小于强势网站时, 弱势网站通过采取恰当策略能战胜强势网站;

2) 定理 3, 4 讨论了 3 个网站之间均为强竞争的情形. 定理 3 分析了等强度的 3 网站强竞争情形, 结果显示强势网站获胜. 定理 4 分析了非等强度的 3 网站强竞争情形, 结果显示强势网站获胜概率较大, 但并非总能获胜.

由定理 1~6 知, 本文给出弱势网站获胜的新策略, 给出文献[4]未能发现的强势网站获胜的策略, 并将有关结论在定理 5, 6 中推广至一般情形:

1) 在两个弱势网站之间弱竞争, 但与强势网站进行强竞争的情形, 当两个弱势网站的初值之和小于强势网站的初值时, 定理 1, 2 表明强势网站灭绝, 弱势网站获胜. 文献[4]指出只有当弱势网站之间的竞争强度足够弱时, 弱势网站方能获胜. 由定理 1, 2 知, 这个条件可以不要.

2) 在两个弱势网站之间弱竞争, 但与强势网站进行强竞争的情形, 当两个弱势网站的初值之和小于强势网站的初值时, 对已知的初值, 定理 1, 2 给出了弱势网站获胜的策略选择范围; 对已知的策略, 定理 1, 2 给出了弱势网站获胜的初值选择范围. 文献[4]未能给出这些范围.

3) 在两个弱势网站之间弱竞争, 但与强势网站进行强竞争的情形, 文献[4]发现难于给出强势网站获胜的策略, 见文献[4]图 5 及其文字说明. 本文定理 1, 2 则给出了强势网站获胜的策略, 即只要下列条件之一成立即可 (假定网站 3 为强势网站):

a) $a_{12} < b, a_{13} > a_{23} > b, \frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} > 1, x_3(0) > p_{42}x_1(0), x_2(0) \leq p_{41}x_1(0);$

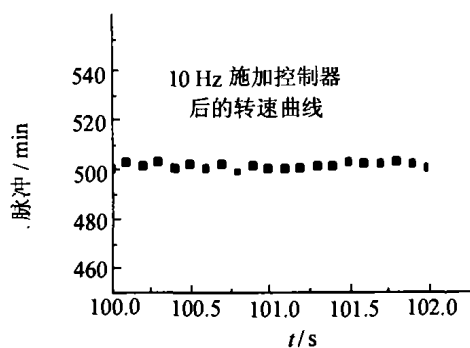
b) $a_{12} < b, a_{13} > a_{23} > b, \frac{a_{23} - a_{12}}{a_{13} - b} > 1, x_3(0) > [(b - a_{13})x_1(0) + (a_{12} - a_{23})x_2(0)] / (b - a_{13}), x_2(0) > p_{41}x_1(0).$

4) 在 3 个网站之间均为强竞争且竞争强度不相等的情形, 文献[4]发现难于给出强势网站获胜的策略, 见文献[4]图 9 及其文字说明. 本文定理 4 则给出了强势网站获胜的策略, 即只要它能恰当控制与不同弱势网站之间的竞争强度 (假定网站 3 为强势网站):

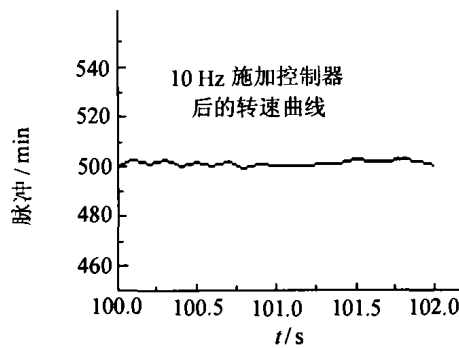
$a_{12} \geq a_{13} \geq a_{23} > b, a_{12} > a_{23},$

$\frac{a_{13} - b}{a_{12} - a_{23}} > 1, x_3(0) > x_2(0) + x_1(0).$

(下转第 228 页)



(e) 施加控制器后的效果



(f) 曲线(e)的数据处理

图1 10 Hz, 15 kW 电机空载稳定运行速度振荡、控制效果曲线

Fig. 1 Speed fluctuating curve and controlling results without any Loads

参考文献(References):

- [1] ORTEGA R, NICKLASSON P J, ESPINOSA G. On speed control of induction motors [J]. *Automatica*, 1996, 41(3): 455 - 460.
- [2] 黄松清. 基于矢量变换的交流传动系统稳定性函数寻找方法[J]. *电工技术学报*, 2002, 17(2): 17 - 23.
(HUANG Songqing. A novel approach of Lyapunov function for induction motor based on transvector and two-order system [J]. *Trans on China Electrotechnical Society*, 2002, 17(2): 17 - 23.)
- [3] SCHULTZ D G. The variable gradient method for generating Lyapunov functions [J]. *Proc of AIEE Trans on Power Transforming*, 1962, 2: 81 - 89.
- [4] MUTOH N, UEDA A, SAKAI K, et al. Stabilizing control methods

for suppressing oscillations of induction motors driven by PWM inverters [C] // *Proc of IEEE Conf on Power Electronic and System Control*. Kyoto, Japan: IEEE Press, 1985: 639 - 646.

- [5] KOGA K, YUKUHASHI H, UEDA R, et al. Stability problem in induction motor drive system [C] // *Proc of IEEE Conf on Industrial Application System*. Toyo, Japan: [s. n.], 1988.

作者简介:

黄松清 (1965—), 男, 在西南交通大学电气工程系铁道电气化专业获学士学位, 在东南大学电气工程系电机及控制专业获硕士学位, 东南大学自动控制系博士研究生, 现在安徽工业大学电气信息学院工作, 研究方向为运动系统性能及稳定性、电力电子装置控制策略、反馈控制系统、非线性控制, E-mail: songqinghuang@263.net.

(上接第222页)

此外, 由本文的分析知, 文献[7]中的一个结论不正确. 文献[7]讨论了类似于系统(1)的生态模型. 由文献[7]知, 若 $b = 1, a_{12} < 1, a_{21} < 1, a_{13} > 1, a_{31} > 1, a_{23} > 1, a_{32} > 1$, 则系统(1)存在正平衡点 (见 Theorem 2.1(39)), $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_3(t) = 0$, 而且或者 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 1$, 或者 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 1$ (见 Theorem 3.4(1)).

由本文定理 1-ii) 及定理 5, 知该结论不正确. 举例如下: 设 $b = 1, a_{12} = a_{21} = 0.9, a_{13} = a_{31} = 1.3, a_{23} = a_{32} = 1.1$, 则平衡点为 $(-\frac{5}{68}, \frac{45}{68}, \frac{25}{68})$, 它不是正平衡点; 设 $b = 1, a_{12} = a_{21} < 1, a_{13} = a_{31} > 1, a_{23} = a_{32} > 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_3(t) = 0$, 但网站 1 或网站 2 均持久生存, 不可能有网站 1 或网站 2 的灭绝.

参考文献(References):

- [1] ADAMIC L A, HUBERMAN B A. Power-law distribution of the worldwide web [J]. *Science*, 2000, 287(8): 2115.
- [2] ADAMIC L A, HUBERMAN B A. The nature of markets on the world wide web [J]. *Quarterly J of Electronic Commerce*, 2000,

34(1): 5 - 12.

- [3] MAURER S M, HUBERMAN B A. Competitive dynamics of web sites [J]. *Quarterly J of Electronic Commerce*, 2001, 35(3): 245 - 257.
- [4] LOPEZ L, SANJUAN A F. Defining strategies to win in the Internet market [J]. *Physica A*, 2001, 301(2): 512 - 534.
- [5] HIRSCH M W. Systems of differential equations that are competitive or cooperative III: Competing species [J]. *Nonlinearity*, 1988, 32(1): 51 - 71.
- [6] ZHANG Zifeng, DING Tongren, HUANG Wenzhao, et al. *Qualitative Theory of Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [7] ZHANG Xin'an, CHEN Lansun. The global dynamic behavior of the competitive systems of three species [J]. *J of Mathematical Analysis and Its Applications*, 2000, 245(3): 124 - 141.

作者简介:

吴红 (1966—), 女, 中山大学科学计算与计算机应用系副研究员, 1991 年在中山大学计算机科学系研究生毕业, 研究方向为网络计算、软件工程, E-mail: zsuwh@163.com;

王远世 (1964—), 男, 中山大学数学系副教授, 2001 年在中山大学数学系获博士学位, 2003 年香港浸会大学计算机科学系博士后出站, 研究方向为常微分方程稳定性理论及其应用, E-mail: mcswws@zsu.edu.cn.