文章编号：1000－8152(2005)02－0273－04

双头垄断市场中广告模型的混沌动态特性

齐 洁，汪定伟
（东北大学 信息科学与工程学院，辽宁 沈阳 110004）

摘要：提出了一个二维离散动态广告模型，描述了两强垄断的市场中，由广告竞争引起市场份额的动态变化．在一定的参数下，对称的动态模型在二维相空间中将发生混沌同步，采用横向 Lyapunov 指数判定了模型的同步稳定性．定义了使模型具有经济意义的可行集，通过理论分析和数值仿真相结合的方法得到可行集的边界．通过对模型的同胚变换可得到：如果对角线上的混沌吸引子在垂直于对角线方向上局部稳定，那么它在可行集的范围内也全局稳定．

关键词：广告模型；混沌同步；吸引子；可行集
中图分类号：F713，O415 **文献标识码**：A

Chaotic dynamic properties for an advertising model in duopoly market

QI Jie，WANG Ding-wei
（School of Information Science and Engineering，Northeastern University，Shenyang Liaoning 110004，China）

Abstract：A two-dimensional discrete dynamic model of advertising is proposed describing the dynamics of the market share due to the advertising interaction in the duopoly market．Chaotic synchronization occurs in two-dimensional phase space under some parameters and its stability has been determined by transverse Lyapunov exponents．The feasible set is defined in which the variables' economic senses exist and boundaries of the feasible set can be obtained by using combined methods of theoretical analysis and numerical calculation．Based on the homeomorphous transformation for the model，it can be concluded that if the chaotic attractor for the diagonal is stable for the transverse small perturbation in neighborhood，it should be globally stable in the whole feasible set．

Key words：advertising model；chaotic synchronization；attractor；feasible set

1 引言(Introduction)

在广告决策选择过程中，广告费用与营销效益关系，是最为关注的重要内容．许多学者为此进行了研究，如最早的 Vidale-Wolfe 广告销售反应模型和 Nerlove-Arrow 广告资本股模型[1～3]．另外，一些学者对广告模型中可能出现的复杂性态进行了研究，如 Feichtinger[4]证明了在一个广告扩散模型中最优广告投入量将产生具有混沌动态特性的状态量变化；Luhta[5]研究了在一定的广告投入策略下，广告资本股模型的商誉是混沌变化的．他们的模型都是针对市场中的一个企业，而没有考虑在广告的作用下，企业在市场中的动态博弈．厂商在营销实践中，已将广告看作是重要的促销手段，因而广告竞争也成为市场竞争的重要形式，所以研究在竞争情况下的广告投入模型更具现实意义．本文针对 Chintagunta 和 Vilcassim[6]的模型提出了一个以 V-W 模型为基础的广告竞争模型，描述了市场随时间的动态演变，并相应不同的控制参数，分析了模型的动态特性．这对认识市场结构的演变和采取相应的对策具有较为重要的意义．

2 模型的描述(Model description)

Chintagunta 和 Vilcassim 运用 Lanchester 的战斗模型来表示竞争双方市场份额的动态变化，本文采用相同的思想，用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示在第 t 个周期购买企业 1，2 的商品的顾客占潜在顾客总人口的比率，$0 < x(t), y(t) < 1$．由于一个顾客有可能同时购买两个企业的商品，因此允许出现 $x(t) + y(t) > 1$ 的情况．在 Chintagunta 的模型中，没有考虑随时间变化，由于顾客喜好的改变或其他原因，企业销售衰减的现象，而本文模型考虑了这个因素，每周

收稿日期：2002－12－03；收修改稿日期：2004－11－08．
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60084003，70171056)．

期企业有 $(1-a_i)$ 的销售衰减率.

模型描述如下:

$$\begin{cases} x(t+1)=a_1x(t)+k_1u_1(t)(1-x(t))-\\ \qquad k_2u_2(t)x(t),\\ y(t+1)=a_2y(t)+k_2u_2(t)(1-y(t))-\\ \qquad k_1u_1(t)y(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $t=0,1,\cdots,T-1$,考虑在 T 个周期中模型随时间的动态演变; $k_i(i=1,2)$ 为企业 i 的广告效果参数, a_i 是在下一周期企业 i 的顾客保持率.参数的取值范围是

$$0<k_1,k_2,a_1,a_2<1. \tag{2}$$

$u_i(t+1)$ 表示企业 i 采用的广告投入策略 $(i=1,2)$,这里直接采用实际中经常运用的广告策略——销售百分比法[7],

$$\begin{aligned} u_1(t+1)&=\eta_1pBx(t)+\lambda_1pBy(t),\\ u_2(t+1)&=\eta_2pBx(t)+\lambda_2pBy(t). \end{aligned} \tag{3}$$

其中: B 表示商品覆盖区域的潜在顾客总人数, p 是商品价格, η_i 表示企业 i 的广告投入占自己销售额的百分比,而 λ_i 强调了广告投入量将相应对手的销售额作增量调整,即当对手的销售额增加时,本企业的广告就要加强.为表示方便,令

$$\begin{aligned} h_1&=\eta_1pB,\ h_2=\eta_2pB,\\ j_1&=\lambda_1pB,\ j_2=\lambda_2pB. \end{aligned} \tag{4}$$

这4个参数分别表示两个企业针对自己和对手销售额的广告投入强度.加入广告控制量可得映射

$$\begin{cases} x(t+1)=\\ a_1x(t)+k_1(h_1x(t)+j_1y(t))(1-x(t))-\\ k_2(h_2y(t)+j_2x(t))x(t),\\ y(t+1)=\\ a_2y(t)+k_2(h_2y(t)+j_2x(t))(1-y(t))-\\ k_1(h_1x(t)+j_1y(t))y(t). \end{cases} \tag{5}$$

3 同步不变集上吸引子的横向稳定性 (Transverse stability of attractor in synchronized invariant set)

如果两个竞争者的特性参数相同,并且采用相同的广告策略参数,则得到一个对称的二维映射.

$$\begin{cases} x(t+1)=\\ ax(t)+k(hx(t)+jy(t))(1-x(t))-\\ k(hy(t)+jx(t))x(t),\\ y(t+1)=\\ ay(t)+k(hy(t)+jx(t))(1-y(t))-\\ k(hx(t)+jy(t))y(t). \end{cases} \tag{6}$$

映射(6)关于对角线对称,并且有下面的关于不变集[8]的定理:

定理 1 定义系统变量有经济意义的取值范围为可行解域: $D=[0,1]\times[0,1]$.那么映射(6)在可行解域 $(x,y)\in D$ 中的不变集是 $y=x$ 和 $x+y=1+\dfrac{a-1}{k(h+j)}$.

将二维空间的对角线称为同步不变集,并记为 $\Delta=\{(x,x),x\in\mathbb{R}\}$.如果将状态变量限制在 Δ 上,那么,可以由一个一维映射 $f=T_\Delta:\Delta\to\Delta$ 决定映射(6)在对角线上的动态特性:

$$f(x)=[a+k(h+j)]x-2k(h+j)x^2. \tag{7}$$

映射(7)拓扑共轭于标准的 Logistic 映射[8].用 Jocobian 矩阵的方法求出横向 Lyapunov 指数[9,10],判定对角线上吸引子 A_s 的横向稳定性,

$$L_\perp=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{\tau}\ln|a+kh-kj-2k(h+j)x(t)|. \tag{8}$$

取 $x(0)\in A_s$,且为非周期的点,其中 $x(t)$ 是映射(7)的迭代值.

如果 $L_\perp<0$, A_s 具有不变集邻域的横向稳定性.固定参数 $a=0.7,k=0.5,h=4$,通过数值计算可以作出 $L_\perp$ 随 j 的变化曲线(图 1(b))和参数 j 的分岔混沌图(图 1(a)).从图 1 (b)中看到 $L_\perp$ 在参数 j 取值范围中一直小于零.所以,在参数 $a=0.7$, $k=0.5,h=4$ 固定的情况下,当 $a+k(h+j)\leqslant 4$ 时, A_s 对于垂直于同步不变集方向的扰动横向稳定(讨论控制参数 h 和 j 参数的单位:考虑人口总数 B 为50,单位:百万;商品价格 p 是0.2,单位:元; $0<\eta_i,\lambda_i<1$ 是正参数,因而参数 h 和 j 的单位为百万元).

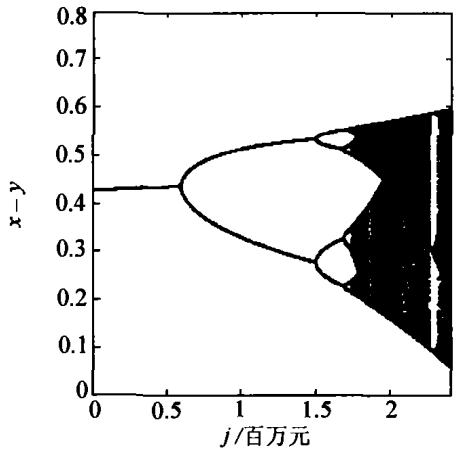

图 1(a) 参数 j 的分岔图

Fig. 1(a) Bifurcation diagram for parameter j

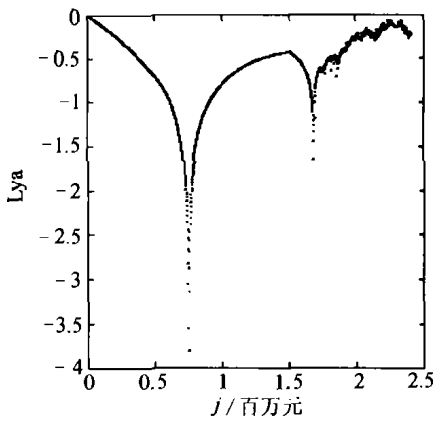

图 1(b)　$L_\perp$ 随 j 变化的曲线

Fig. 1(b)　Curve of $L_\perp$ with the variance of j

4　可行集与可行集中的吸引子(Feasible set and the attractor in the feasible set)

如果对于所有的 $t > 0, T^t(x,y) \in D$ 都成立,则点(x,y) 称为可行点,同时由此可行点出发的轨道称为可行轨道. 可行点的集合就定义为可行集[11],用 F 表示,F 的边界记为 ∂F. 可行轨道有可能收敛于稳定的固定点、一维的不变集,或是 F 集内的复杂吸引子. 下面分别对可行集和可行集中的初始点最终收敛于什么样的吸引子进行讨论.

不变集 $x + y = 1 + \frac{a-1}{k(h+j)}$ 与 x, y 轴的交点分别是 $N_x(0, 1 + \frac{a-1}{k(h+j)})$ 和 $N_y(1 + \frac{a-1}{k(h+j)}, 0)$. 设 ω_1 是 x 轴上 N_x 到原点的线段,ω_2 是 y 轴上 N_y 到原点的线段. 那么下面的定理给出可行集的边界 ∂F.

定理 2　若 $a + k(h + j) \leqslant 4$,ω_1 和 ω_2 的定义如上述所示,则

$$\partial F \subseteq \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x,y) \mid T^{-n}(\omega_1)\text{and}(x,y) \in D\}\right) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{(x,y) \mid T^{-n}(\omega_2)\text{and}(x,y) \in D\}\right). \tag{9}$$

其中的 T^{-n} 是指映射 T 的第 n 阶原象(证明与文献[12]类似).

另外,也可以用数值仿真的方法得到可行集的大致范围. 在平面 $(0,1) \times (0,1)$ 中取 500×500 个点,对每个点计算其迭代 10^4 步的轨道是否可行,记下不可行点,在图中标出. 例如图 2,取参数 $a = 0.7, k = 0.5, h = 4, j = 2$,可以得到 $(0,1) \times (0,1)$ 中的可行集是图中的白色区域,而黑色区域是不可行点,并画出了可行集的吸引子 A_s.

通过同胚变换 $z_\parallel = (x + y)/2, z_\perp = (y - x)/2$,将系统(6)变换它的拓扑共轭系统为

$$\begin{aligned} &z_\parallel(t+1) = \\ &-2(kh + kj)z_\parallel^2(t) + (a + kh + kj)z_\parallel(t), \\ &z_\perp(t+1) = \\ &[-2(kh + kj)z_\parallel(t) + a + kh - kj]z_\perp(t). \end{aligned} \tag{10}$$

$z_\parallel$ 表示系统(6)平行于对角线方向的动态变化,而 $z_\perp$ 表示垂直于对角线方向的动态变化. 由式(10),可知系统(6)在 Δ 上的动态特性与垂直于 Δ 的动态趋势无关,且 $z_\perp$ 是线性变化的,所以它要么收敛到同步不变集上,要么发散到无穷远,而它的收敛性由

$$\left|\prod_{t=0}^{\infty}[-2(kh + kj)z_\parallel(t) + a - kh - kj]\right| \tag{11}$$

决定,如果式(11)小于 1,可行集中的初始点收敛到同步不变集上,此时不变集上的吸引子也是二维可行集的吸引子. 而关于式(11)的是否小于 1 的判定等价于横向 Lyapunov 指数正负性的判定,根据在第 3 部分中得到结果,可行集 F 出发的点将最终收敛于同步吸引子 As.

对可行集的研究可以得到,企业初期的对企业后期的市场顾客比率的影响. 不可行点有两种解释:1) 某个企业初期就在市场中占有难以撼动的优势(市场顾客比率很大),另一企业即使实力与之相当也难以进入市场,由于模型假设企业总在市场中,所以表现出来的就是其中一家企业的市场顾客比率为负;2) 同时购买两家企业商品的顾客占绝大多数,竞争失去了意义,在这样的情况下竞争模型失效.

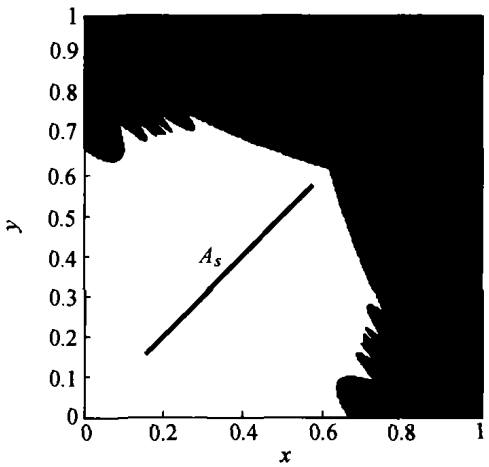

图 2　可行集与可行集的吸引子

Fig. 2　Feasible set and the attractor for the feasible set

5　结论(Conclusion)

通过上述分析可知:广告投入与销售量之间存在复杂的动态关系,当控制参数较小,广告投入不大

时,两个企业的市场份额各自有稳定的平衡点,当广告投入增加,广告竞争加剧后,两个企业的市场份额就呈现复杂的动态特性,出现周期循环,继而呈现混沌状态.在对称的市场结构中,若企业的初始状态在可行集内,企业的动态销售量是混沌同步的,这表明它们的广告竞争难以分出胜负,如果引起广告战,则只会导致市场份额的剧烈震荡(状态轨迹在图2所示的吸引子内稠密).显然应避免出现这样的结果,此时应采取适量广告投入的策略,用来宣传产品,扩大顾客群.

参考文献(References):

[1] 席酉民,陆晓鸣.广告的动态最优控制模型[J].系统工程理论与实践,1998,19(8):11 - 18.
(XI Youmin, LU Xiaoming. Dynamic optimal control models in advertising[J]. *J of System Engineering Theory and Practice*, 1998, 19(8):11 - 18.)

[2] NERLOVE M, ARROW K J. Optimal advertising policy under dynamic conditions [J]. *Economica*, 1962, 29(2): 129 - 142.

[3] VIDALE M L, WOLFE H B. An operations research study of sales response to advertising [J]. *Operations Research*, 1957, 5(3): 370 - 381.

[4] FEICHTINGER G, NOVAK A. Optimal pulsing in an advertising diffusion mode [J]. *Optimal Control Applications and Methods*, 1994, 15(4): 267 - 276.

[5] LUHTA I, VIRTANNEN I. Non-linear advertising capital model with time delayed feedback between advertising and stock of goodwill [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1996, 12(11): 2083 - 2104.

[6] CHINTAGUNTA P, VILCASSIM N J. An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly [J]. *Management Science*, 1992, 38(9): 1230 - 1244.

[7] 张纪康.广告经济学实用教程[M].上海:上海远东出版社,1998:157 - 178.
(ZHANG Jikang. *The Utility Tutorial of Advertising Economics* [M]. Shanghai: Shanghai Far East Publishing Company, 1998: 157 - 178.)

[8] 盛昭瀚,马军海.非线性系统分析引论[M].北京:科学出版社,2001:44 - 57.
(SHENG Zhaohan, MA Junhai. *Theory Nonlinear Dynamic Systems Analysis* [M]. Beijing: Science Press, 2001: 44 - 57.)

[9] NAGAI Y, LAI Y C. Characterization of blowout bifurcation by unstable periodic orbits [J]. *Physical Review E*, 1997, 55(2): 1251 - 1254.

[10] KIM Sang-Yoon, LIM W, KIM Y. New ridding bifurcation in asymmetric dynamical Systems [J]. *Progress of Theoretical Physics*, 2001, 105(2): 187 - 196.

[11] BISCHI G I, GARDINI L, KOPEL M. Analysis of global bifurcations in a market share attraction model [J]. *J of Economic Dynamics & Control*, 2000, 24(5 ~ 7): 855 - 879.

[12] BISCHI G I, STEFANINI L, GARDINI L. Synchronization, intermittency and critical curves in a duopoly game [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1998, 44(6): 559 - 585.

作者简介:

齐 洁 (1978—) 女,东北大学博士研究生,研究方向为复杂性科学在建模及优化中的应用、电子商务中的广告建模与优化等,E-mail: briskjie@163.com;

汪定伟 (1948—) 男,教授,博士生导师,研究方向为计算机集成制造系统(CIMS)、生产存储控制、大系统优化与控制、智能化优化,软计算方法.