文章编号：1000-8152(2005)02-0321-04

一类时滞神经网络系统的指数稳定性

余昭旭[1,2]，吴惕华[3]
（1.华东理工大学 自动化系，上海 200237；2.上海交通大学 自动化系，上海 200030；
3.河北省科学院 自动化研究所，河北 石家庄 050081）

摘要：利用矩阵测度研究了一类时滞神经网络系统的指数稳定性，给出保证神经网络系统指数稳定的充分条件.输出函数不需要满足Lipschitz条件，且也不要求它们可微或严格单调递增.在关联矩阵不对称的情况下，所得到的结论仍然成立.最后一个数值例子验证了判据的有效性.

关键词：神经网络；时滞；指数稳定性；范数；矩阵测度
中图分类号：TP183 **文献标识码**：A

On the exponential stability of neural networks systems with time delays

YU Zhao-xu[1,2], WU Ti-hua[3]
(1.Department of Automation, East China University of Science & Technology, Shanghai 200237, China;
2.Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China;
3.Institute of Automation, Academy of Science of Hebei Province, Shijiazhuang Hebei 050081, China)

Abstract: The exponential stability of Hopfield-type neural networks with time delays is analyzed by using the method of matrix measure, and sufficient conditions are obtained for general exponential stabilities. The system admits a unique equilibrium in which the output functions do not satisfy the Lipschitz conditions and neither requires them to be differential or strictly monotonously increasing. All the results still hold without assuming any symmetry of the connection matrix. Finally a numeric example is presented to verify the validity of these criteria.

Key words: neural networks; time delays; exponential stability; norm; matrix measure

1 引言(Introduction)

神经网络主要用于联想记忆(模式识别)或求解优化问题.关于神经网络系统稳定性和振荡性等基础问题的定性分析，对其广泛应用具有十分重要的意义.而且由于延迟的存在，使得神经网络的稳定性问题变得更为复杂，因此对时滞神经网络稳定性问题的研究一直受到许多研究人员的关注[1~7].文献[5~7]利用Lyapunov泛函方法和一些其他的分析技巧，研究了一类具常数时滞的神经网络系统的稳定性问题，所考虑的输出函数满足Lipschitz条件.但实际上还存在许多输出函数是不满足Lipschitz条件的有界单调非减函数.文献[1]给出了输出函数不需要满足Lipschitz条件的时滞神经网络系统渐近稳定的充分条件.另外文献[8]利用矩阵测度研究了多时滞系统的稳定性问题.本文在输出函数不需要满足Lipschitz条件的一般化情况下，利用矩阵测度研究了一类时滞神经网络的指数稳定性，给出了时滞神经网络系统指数稳定的充分条件.最后以一个数值例子说明了所给出判据的有效性.

2 问题的描述与准备(Problem statement and preliminaries)

考虑由如下微分方程描述的时滞神经网络：

$$\dot{x}_i = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\tau_j)) + I_i. \qquad (1)$$

其中：$c_i > 0(i=1,2,\cdots,n)$为常数，n对应于神经网络中神经元的个数，x_i对应于t时刻第i个神经元的状态向量，τ_j为传递时滞，并且满足$\tau_j > 0$；$f_j(x_j(t))$和$g_j(x_j(t-\tau_j))$分别描述的是t时刻和第$t-\tau_j$时刻第j个神经元的输出.a_{ij}, b_{ij}, c_i, I_i都为常数；a_{ij}为时刻t神经元j和i的突触强度，b_{ij}为$t-\tau_j$

收稿日期：2003-07-04；收修改稿日期：2004-03-09.
基金项目：河北省自然科学基金资助项目(602623).

时刻神经元 j 和 i 的突触强度，I_i 为第 i 个神经元的输入. 初始条件 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}} = \varphi(t), -\tau \leqslant t \leqslant 0, \tau = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\{\tau_j\}$, $\varphi(t)$ 是 $[-\tau, 0]$ 上的 n 维初始向量函数，并且有 $|\varphi(t)| = \sup\limits_{-\tau \leqslant t \leqslant 0}\{\|\varphi(t)\|\}$.

如果向量 $x^*(t) = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 满足如下方程

$$c_i x_i^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j^*) + I_i,$$

则称它为系统(1)的平衡点.

对 $i = 1,2,\cdots,n$，如果 $x = x^*$ 是方程(1)的平衡点，则令 $y_i = x_i - x_i^*, i = 1,2,\cdots,n$，可得

$$\dot{y}_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(f_j(x_j^* + y_j(t)) - f_j(x_j^*)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(g_j(x_j^* + y_j(t - \tau_j)) - g_j(x_j^*)). \tag{2}$$

为了证明系统(1)的平衡点 x^* 的指数稳定性，只需要证明系统(2)的零解 $y^* = [0,0,\cdots,0]$ 的指数稳定性.

首先定义下面两个函数

$$\Phi_i(y_i) = f_i(x_i^* + y_i) - f_i(x_i^*),$$

$$\Gamma_i(y_i) = g_i(x_i^* + y_i) - g_i(x_i^*),$$

并对函数作出如下假设：

H) 对每个 $i = 1,2,\cdots,n$，函数 Φ_i, Γ_i 都满足 $y_i\Phi_i(y_i) > 0\ (y_i \neq 0)$, $y_i\Gamma_i(y_i) > 0\ (y_i \neq 0)$，且存在正常数 p_i 和 $q_i(i = 1,2,\cdots,n)$，使得

$$p_i = \sup_{y_i \neq 0} \frac{\Phi_i(y_i)}{y_i},\quad q_i = \sup_{y_i \neq 0} \frac{\Gamma_i(y_i)}{y_i}, \tag{3}$$

从而系统(2)可得

$$\dot{y}_i(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Phi_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\Gamma_j(y_j(t - \tau_j)). \tag{4}$$

下面再引入一个引理：

引理[9] 设 $P(t)$ 是在区间 $[t_0 - \tau, +\infty)$ 上的非负连续函数，且在区间 $[t_0, +\infty)$ 上满足不等式 $\dot{P}(t) \leqslant -aP(t) + bP_t$，其中 $a > 0, \tau \geqslant 0, b \geqslant 0$ 均是常数，$P_t = \sup\limits_{-\tau \leqslant \theta \leqslant 0}\{P(t + \theta)\}$，当 $b < a$ 时，存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $P(t) \leqslant P_{t_0} \mathrm{e}^{-\varepsilon(t - t_0)}, t \geqslant t_0$.

3 平衡点的存在唯一性(Existence and uniqueness of equilibrium point)

在这一节，首先研究系统(1)平衡点存在唯一性，并通过定理1给出平衡点存在唯一的充分条件.

定理 1 如果存在 $\lambda_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 满足

$$\lambda_i c_i - p_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |a_{ji}| - q_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |b_{ji}| > 0, \tag{5}$$

对所有的 $i = 1,2,\cdots$ 都成立，那么系统(1)存在唯一平衡点 x^*.

证 存在性. 显然 $y^* = [0,0,\cdots,0]$ 为系统(2)的平衡点，所以对于系统(1)来说至少存在一个平衡点 x^*.

下面证唯一性. 首先不妨设向量函数 $H(x) = -Cx + Af(x) + Bg(x) + I$，其中 $C = \mathrm{diag}[-c_1, \cdots, -c_n]$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$. $H(x) - H(y)$ 的元素构成如下：

$$h_i(x_i) - h_i(y_i) = -c_i(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(f_j(x_j) - f_j(y_j)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(g_j(x_j) - g_j(y_j)). \tag{6}$$

如果存在对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ 都有 $H(x) \neq H(y)$，那么可证得系统(1)的平衡点唯一.

令 $s_i = \mathrm{sgn}(x_i - y_i)$，其中 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ 为符号函数. 在式(6)左右同时乘上 $s_i\lambda_i$，以及利用式(3)，那么有

$$s_i\lambda_i(h_i(x_i) - h_i(y_i)) = -s_i\lambda_i c_i(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^{n} s_i\lambda_i a_{ij}(f_j(x_j) - f_j(y_j)) + \sum_{j=1}^{n} s_i\lambda_i b_{ij}(g_j(x_j) - g_j(y_j)),$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} s_i\lambda_i(h_i(x_i) - h_i(y_i)) = \\
&\sum_{i=1}^{n}\{-s_i\lambda_i c_i(x_i - y_i) + \sum_{j=1}^{n} s_i\lambda_i a_{ij}(f_j(x_j) - f_j(y_j)) + \\
&\sum_{j=1}^{n} s_i\lambda_i b_{ij}(g_j(x_j) - g_j(y_j))\} \leqslant \\
&-\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i c_i |x_i - y_i| - \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||f_j(x_j) - f_j(y_j)|\lambda_i - \\
&\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}||g_j(x_j) - g_j(y_j)|\lambda_i\} = \\
&-\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i c_i |x_i - y_i| - \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}||f_i(x_i) - f_i(y_i)|\lambda_j - \\
&\sum_{j=1}^{n} |b_{ji}||g_i(x_i) - g_i(y_i)|\lambda_j\} \leqslant \\
&-\sum_{i=1}^{n}\{\lambda_i c_i - \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|p_i\lambda_j - \sum_{j=1}^{n} |b_{ji}|q_i\lambda_j\}|x_i - y_i|.
\end{aligned} \tag{7}$$

由式(7)可得 $\sum_{i=1}^{n} s_i\lambda_i(h_i(x_i)-h_i(y_i))<0$.

这表明至少存在一个指标 i 使得 $h_i(x_i)\neq h_i(y_i)$,从而有 $H(x)\neq H(y)$,因此平衡点的唯一性得证.

4 时滞神经网络的指数稳定性(Exponential stability of neural networks with delays)

令

$$y(t)=[y(t),\cdots,y_n(t)]^{\mathrm{T}},$$
$$\Phi(y)=[\Phi_1(y_1),\cdots,\Phi_n(y_n)]^{\mathrm{T}},$$
$$\Gamma(y_\tau)=[\Gamma_1(y_1(t-\tau_1)),\cdots,\Gamma_n(y_n(t-\tau_n))]^{\mathrm{T}},$$
$$P=\mathrm{diag}[p_1,\cdots,p_n],\ Q=\mathrm{diag}[q_1,\cdots,q_n],$$

则系统(4)可写为

$$\dot{y}(t)=Cy(t)+A\Phi(y)+B\Gamma(y_\tau).\qquad(8)$$

下面再介绍矩阵测度的概念,一个实方阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{n\times n}$ 的测度定义如下:

$$\mu(A(t))\triangleq\lim_{h\to0}\frac{\|I+hA(t)\|-I}{h},\ I\text{为单位矩阵}.$$

当上式的范数分别是矩阵范数

$$\|A\|_1=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,$$
$$\|A\|_2=[\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)]^{\frac{1}{2}},$$
$$\|A\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$
$$\|A\|_\omega=\max_j\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{\omega_j}|a_{ij}|,$$

可计算出相应的矩阵测度为

$$\mu_1(A)=\max_j\{a_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}|a_{ij}|,$$
$$\mu_2(A)=\frac{1}{2}\lambda_{\max}\{A^{\mathrm{T}}+A\},$$
$$\mu_\infty(A)=\max_i\{a_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|,$$
$$\mu_\omega(A)=\max_j\{a_{jj}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{\omega_i}{\omega_j}|a_{ij}|\}.$$

其中:A^{T}表示A的转置,$\lambda_{\max}(B)$表示B的最大特征值,$\|\cdot\|_.$与$\mu_.(\cdot)$对应,“$\cdot$” $=1,2,\infty,\omega$.

考虑式(8)描述的系统,$|\cdot|_.$为向量的模,$\|\cdot\|_.$是$|\cdot|_.$相对应的诱导范数,$\mu_.(\cdot)$是它们相对应的矩阵测度.定义

$$\frac{\mathrm{d}|x(t)|_.}{\mathrm{d}t}=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{\varepsilon}(|x(t+\varepsilon)|_.-|x(t)|_.),$$

则当 $t>0$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}|y(t)|_.}{\mathrm{d}t}-\mu_.(C)|y(t)|_.-$$
$$\|A\|_.\|P\|_.|y(t)|_.-\|B\|_.\|Q\|_.|y_\tau|_.\leqslant$$
$$\frac{\mathrm{d}|y(t)|_.}{\mathrm{d}t}-\mu_.(C)|y(t)|_.$$
$$-\|A\|_.|\Phi(y)|_.-\|B\|_.|\Gamma(y_\tau)|_.\leqslant$$
$$\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{\varepsilon}[|y(t+\varepsilon)|_.-\|I+\varepsilon C\|_.|y(t)|_.-$$
$$\varepsilon\|A\|_.|\Phi(y)|_.-\varepsilon\|B\|_.|\Phi(y_\tau|)_.]\leqslant$$
$$\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{\varepsilon}|[y(t+\varepsilon)-y(t)-$$
$$\varepsilon Cy(t)-\varepsilon A\Phi(y)-\varepsilon B\Gamma(y_\tau)]|.$$

由于系统(8)成立,故上式右边为零,因此有

$$\frac{\mathrm{d}|y(t)|_.}{\mathrm{d}t}\leqslant(\mu_.(C)+\|A\|_.\|P\|_.)|y(t)|_.+$$
$$\|B\|_.\|Q\|_.|y_\tau|_..$$

由引理及上面的讨论可得下面的定理:

定理2 对系统(4),满足假设H)的函数 Φ_i 和 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 有下面不等式成立:

$$\|A\|_.\|P\|_.+\|B\|_.\|Q\|_.<-\mu_.(C),\quad(9)$$

那么系统(8)的零解全局指数稳定,即系统(1)的平衡点全局指数稳定.

注1 假设H)弱于Lipschitz条件,如果f_i和g_i都是Lipschitz函数,那么p_i和q_i都是各自的Lipschitz常数,因此条件H)包括f_i和g_i都是Lipschitz函数的情形;如果f_i和g_i都不满足Lipschitz条件,而满足假设H),也能得到平衡点的稳定性;因此本文在假设H)下比在Lipschitz条件下得到的结论应用更为广泛.

注2 取 $\lambda_i=1,i=1,2,\cdots,n$,由式(9)可以保证式(5)的成立,即式(9)成立,系统(1)存在唯一平衡点.

注3 只需判断式(9)就可以验证神经网络的指数稳定性,且有多种矩阵测度可以随不同的需要而选用,因此本文的结果具有相当广的适用性.

5 数值例子(Numerical example)

考虑时滞神经网络

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-4x_1(t)-f_1(x_1(t))+1/2f_2(x_2(t))-\\ \qquad g_1(x_1(t-1/2))+1/4g_2(x_2(t-1/4))+I_1,\\ \dot{x}_2(t)=-3x_2(t)+1/2f_1(x_1(t))+1/4f_2(x_2(t))+\\ \qquad 1/2g_1(x_1(t-1/2))-1/3g_2(x_2(t-1/4))+I_2.\end{cases}\qquad(10)$$

其中 I_1 和 I_2 是保证式(10)至少存在一个平衡点的网络输入.f_1 和 f_2 为采样脉冲指数加权时间平均:

$f_i(t) = \int_{-\infty}^{t} x_i(s) e^{s-t} ds, i = 1,2.$

如果在时刻 t 到了一个脉冲,则 x_1 和 x_2 等于1,否则为0. $g_1(\cdot)$ 和 $g_2(\cdot)$ 都为如下形式的函数 $S(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$. 容易得到 $0 \leqslant \dot{S} \leqslant 1/4$, 那么 $p_i = 1, q_i = 1/4, i = 1,2; c_1 = 4, c_2 = 3, a_{11} = -1, a_{12} = 1/2, a_{21} = 1/2, a_{22} = 1/4, b_{11} = -1, b_{12} = 1/4, b_{21} = 1/2, b_{22} = -1/3; \tau_1 = 1/2, \tau_2 = 1/4$; 并且容易验证H)和取"·" = 2 时的矩阵测度有条件(9)满足,由定理可以得证系统(10)指数稳定,尽管 $f_i(t)(i = 1,2)$ 并不满足 Lipschitz 条件.

6 结论(Conclusion)

利用矩阵测度详细的研究了具有时滞的神经网络指数稳定性问题,并给出了系统指数稳定的判据,其中输出函数并不需要满足 Lipschitz 条件,也并不要求它们可微或严格单调递增,因此本文方法得到了比其他方法更具有一般性的结果,最后以一个数值例子说明了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] FENG Chunhua, REJEAN P. On the stability analysis of delayed neural networks systems [J]. *Neural Networks*, 2001, 14(9): 1181 - 1188.

[2] CHEN Tianping. Global exponential stability of delayed Hopfield neural networks [J]. *Neural Networks*, 2001, 14(8): 977 - 980.

[3] PENG Jigen, QIAO Hong, XU Zongben. A new approach to stability of neural networks with time-varying delays [J]. *Neural Networks*, 2002, 15(1), 95 - 103.

[4] WANG Lin, ZOU Xingfu. Exponential stability of Cohen-Grossberg neural networks [J]. *Neural Networks*, 2002, 15(3): 415 - 422.

[5] SUN Changyin, SONG Shiji, FENG Chunbo. On global robust exponential stability of interval neural networks with delays [J]. *Neural Processing Letters*, 2003, 17(1): 107 - 115.

[6] LU Hongtao. On stability of nonlinear continuous-time neural networks with delays [J]. *Neural Networks*, 2000, 13(10): 1135 - 1143.

[7] CAO Jinde, WANG Jun. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time varying delays [J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, 50(1): 34 - 44.

[8] 孙继涛,邓飞其,刘永清,等. 具多时滞的不确定多变量反馈系统的鲁棒稳定化[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 103 - 104.
(SUN Jitao, DENG Feiqi, LIU Yongqing, et al. Robust stabilization of uncertain multivariable feedback systems with multiple time delays [J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 103 - 104.)

[9] 钟守铭,黄廷祝. 具有多时滞的不确定多变量反馈系统的鲁棒稳定化[J]. 自动化学报, 1998, 24(6): 837 - 839.
(ZHONG Shouming, HUANG Tingzhu. Robust stabilization of uncertain multivariable feedback systems with multiple time-delays [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1998, 24(6): 837 - 839.)

作者简介:

余昭旭 (1978—),男,在读博士研究生,研究方向为时滞系统, E-mail: yzx132@sjtu.edu.cn;

吴惕华 (1939—),男,教授,博士生导师,研究方向为过程控制与优化, E-mail: wuhas@heinfo.net.