第 22 卷第 3 期
2005 年 6 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol.22 No.3
Jun. 2005

文章编号: 1000 - 8152(2005)03 - 0359 - 05

线性离散周期系统满意估计

刘世前[1], 王远钢[2], 盛安冬[2], 郭　治[2]

(1. 清华大学 计算机系 智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084;
2. 南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094)

摘要: 针对线性离散周期系统的状态估计问题, 运用提升原理提取期望极点指标, 同时期望估计误差系统满足稳态误差方差/H_∞混合指标, 采用代数 Riccati 矩阵不等式法与数值递推算法对误差系统进行了上述指标的满意估计设计, 并根据满意控制的基本理论将上述满意估计问题转化为线性矩阵不等式(LMI)的线性规划问题, 从而运用 LMI 技术求解并设计了可行的满意估计, 数值算例验证了相关算法.

关键词: 周期系统; 极点配置; 方差估计; H_∞; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Satisfactory estimation of linear discrete periodic systems

LIU Shi-qian[1], WANG Yuan-gang[2], SHENG An-dong[2], GUO Zhi[2]

(1. The State Key Laboratory of Intelligent Technology and System, Department of Computer, Tsinghua University, Beijing 100084, China;
2. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China)

Abstract: The state estimation is studied for linear discrete-time periodic systems. Regional pole index for the periodic estimation error system is brought up through lifting technique and the other indices of steady state error covariance and H-infinity for the periodic error systems are required at the same time. On the basis of satisfactory control theory, a satisfactory estimator for the periodic error system with the above three requirements can be designed by using algebra Riccati matrix inequality and numerical recursion algorithm and this problem of satisfactory estimation can be converted into linear programming problems by linear matrix inequalities (LMI) technique and then a feasible satisfactory estimating sketch is achieved by using LMI tool. Finally a numeric example checks the above sketch and approach.

Key words: periodic system; pole placement; covariance estimation; H-infinity; linear matrix inequalities

1　引言(Introduction)

满意估计至今还局限于线性时不变随机系统范畴, 如何将其拓展到线性时变系统是有意义的; 周期系统作为一种特殊的时变系统, 已有不少成果[1,2], 但大都是针对单指标进行讨论的, 而多指标的满意估计目前尚未研究. 文中针对一类线性离散周期系统, 研究满足期望极点指标, 稳态误差方差指标与 H_∞ 指标的满意估计问题. 首先采用提升法[1]将线性周期估计误差系统提升为时不变系统并提出期望极点指标, 利用提升系统与周期系统特征矩阵之间的关系及时不变系统的极点配置理论将区域极点指标转化为估计误差系统的不等式约束问题, 同时利用协方差配置理论[3]及 H_∞ 控制理论[4]对周期系统进行与极点相容的稳态方差配置及 H_∞ 鲁棒估计, 并利用 LMI 技术求解可行的满意估计方案.

2　问题描述(Problem fomulation)

若被观测采样系统可描述为如下离散线性 N——周期系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \boldsymbol{A}(k)x(k) + \boldsymbol{E}(k)w(k), \\ y(k) = \boldsymbol{C}(k)x(k) + v(k). \end{cases} \tag{1}$$

式中 $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ 为系统状态向量, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ 为测量输出, $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ 为模型噪声, $v(k) \in \mathbb{R}^{n_v}$ 为测量噪声; $\boldsymbol{A}(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\boldsymbol{C}(k) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $\boldsymbol{E}(k) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ 为分段连续、有界实矩阵, 且满足

$$\boldsymbol{A}(k+N) = \boldsymbol{A}(k),$$
$$\boldsymbol{C}(k+N) = \boldsymbol{C}(k),$$
$$\boldsymbol{E}(k+N) = \boldsymbol{E}(k).$$

对于周期系统(1), 假设

H_1) $(\boldsymbol{A}(\cdot), \boldsymbol{C}(\cdot))$ 可观测, $(\boldsymbol{A}(\cdot), \boldsymbol{E}(\cdot))$ 可扰.

收稿日期: 2003 - 06 - 23; 收修改稿日期: 2004 - 06 - 14.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174028); 国家十五兵器预研基金资助项目(BZJ040202).

希望设计如下形式的周期滤波器:

$$\hat{x}(k+1)=\boldsymbol{A}(k)\hat{x}(k)+\boldsymbol{F}(k)[y(k)-\boldsymbol{C}(k)\hat{x}(k)]. \tag{2}$$

其中: $\hat{x}(k)\in\mathbb{R}^{n_x}$; $\boldsymbol{F}(k+N)=\boldsymbol{F}(k)$, $\boldsymbol{F}(k)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$;

于是有估计误差系统

$$\begin{cases}\tilde{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_c(k)\tilde{x}(k)+\tilde{\boldsymbol{E}}(k)\tilde{w}(k),\\ z(k)=\boldsymbol{L}(k)\tilde{x}(k).\end{cases} \tag{3}$$

其中

$\tilde{x}(k)=x(k)-\hat{x}(k)$, $\tilde{w}(k)=[w(k)^{\mathrm T}\ \ v(k)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$,

$\boldsymbol{A}_c(k)=\boldsymbol{A}(k)-\boldsymbol{F}(k)\boldsymbol{C}(k)$, $\tilde{\boldsymbol{E}}(k)=[\boldsymbol{E}(k)\ \ 0]$,

$\boldsymbol{L}(k+N)=\boldsymbol{L}(k)$, $\boldsymbol{L}(k)\in\mathbb{R}^{n_z\times n_x}$.

为了引入极点指标,这里运用文献[1]中的提升法,可得提升误差系统

$$\begin{cases}\breve{x}(m+1)=\hat{\boldsymbol{A}}\breve{x}(m)+\hat{\boldsymbol{E}}_1\breve{w}(m),\\ \breve{z}(m)=\hat{\boldsymbol{C}}\breve{x}(m)+\hat{\boldsymbol{E}}_2\breve{w}(m).\end{cases} \tag{4}$$

其中 $\breve{x}(m)=\tilde{x}(mN)$, $m=1,2,\cdots$,

$\breve{w}(m)=[\tilde{w}_m(0)^{\mathrm T}\ \ \tilde{w}_m(1)^{\mathrm T}\ \ \cdots\ \ \tilde{w}_m(N-1)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$,

$\breve{z}(m)=[z_m(0)^{\mathrm T}\ \ z_m(1)^{\mathrm T}\ \ \cdots\ \ z_m(N-1)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$,

$\tilde{w}_m(j)=\tilde{w}(mN+j)$, $z_m(j)=z(mN+j)$,

$\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_c(N-1)\cdots\boldsymbol{A}_c(0)$, $\hat{\boldsymbol{E}}_2=[e_2(i,j)]$,

$$\hat{\boldsymbol{E}}_1=[\boldsymbol{A}(N-1)\cdots\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{E}(0)|\cdots|\ \boldsymbol{A}(N-1)\boldsymbol{E}(N-2)|\boldsymbol{E}(N-1)],$$

$$e_2(i,j)=\begin{cases}0, & i\leqslant j,\\ \boldsymbol{L}(i-1)\boldsymbol{E}(j-1), & i=j+1,\\ \boldsymbol{L}(i-1)\boldsymbol{A}(i-2)\cdots\boldsymbol{A}(j)\boldsymbol{E}(j-1), & i>j+1,\end{cases}$$

$$\hat{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}(0)\\ \boldsymbol{L}(1)\boldsymbol{A}(0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{L}(N-1)\boldsymbol{A}(N-2)\cdots\boldsymbol{A}(0)\end{bmatrix}.$$

当待定 $\boldsymbol{F}(i)(i=0,1,\cdots,N-1)$ 为周期序列增益时,线性周期误差系统(3)提升为线性时不变系统(4).

为使误差系统具有良好的动态特性和鲁棒性,要求设计的滤波器保证:

a) 提升误差系统(4)极点集 $\Lambda(\hat{\boldsymbol{A}})\subseteq D(0,r)$,其中 $D(0,r)$ 表示复平面上以(0,0)为圆心,半径为 $r(0<r<1)$ 的开圆盘;

b) 若将模型噪声 $w(k)$, $v(k)$ 均被视为一个高斯白噪声过程,其均值为零,强度分别为 $\boldsymbol{W}(i)>0$, $\boldsymbol{V}(i)>0$,且初始状态 $x(0)$, $w(k)$, $v(k)$ 互不相关,要求估计误差 $\tilde{x}(k)$ 稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}(i)$ 满足 $[\boldsymbol{X}(i)]_{jj}\leqslant\sigma_j^2(i)$,式中 $\sigma_j^2(i)$ 为给定的稳态误差方差上界,$[\boldsymbol{X}(i)]_{jj}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}(i)$ 的第 j 个对角元素,$(i=0,1,\cdots,N-1,\ j=0,1,\cdots,n_x)$;

c) 若将模型噪声 $w(k)$, $v(k)$ 视为平方可加的干扰信号,误差系统(3)满足 H_∞ 指标

$$\|J(\tilde{w},\boldsymbol{F},x_0,x_{N-1})\|_\infty=\inf_m\Big[\sup_{0\neq(w,x_0)\in(l_2[0,N-1],\mathbb{R}^{n_x})}\left\{\frac{\|z\|^2_{2,[mN,N-1+mN]}+\|x_{mN+N-1}\|^2_{Q_U}}{\|\tilde{w}\|^2_{2,[mN,N-1+mN]}+\|x_{mN}\|^2}\right\}^{1/2}\Big]<\gamma. \tag{5}$$

其中 $J(w,\boldsymbol{F},x_0,x_{N-1})$ 表示系统(3)对外部干扰 $w(k)$ 抑制水平, $\gamma>0$ 为给定常量, $\|\cdot\|^2_{2,[mN,mN+N-1]}$ 表示变量[·]在 m 周期 $[mN,mN+N-1]$ 上的 L_2 范数, x_{mN}, x_{mN+N-1} 分别为第 m 周期的初值与终值, $\boldsymbol{Q}_U$ 为加权正定矩阵.

3 与极点指标相容的方差上界指标设计 (Design of upper error-variance consistent with desired poles)

引理 1 对于线性离散 N——周期系统(3)当 $\tilde{w}(k)\equiv 0$ 时,系统稳定当且仅当存在对称矩阵 $\boldsymbol{P}(i)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ 满足下述周期 Lyapunov 方程:

$$\boldsymbol{A}_c^{\mathrm T}(i)\boldsymbol{P}(i+1)\boldsymbol{A}_c(i)-\boldsymbol{P}(i)+\boldsymbol{C}^{\mathrm T}(i)\boldsymbol{C}(i)=0. \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{P}(i)=\boldsymbol{P}^{\mathrm T}(i)\geqslant 0,\ \boldsymbol{P}(i+N)=\boldsymbol{P}(i),\quad i=0,1,\cdots,N-1.$$

引理 2[6] 对于线性时不变离散系统

$$x(k+1)=\boldsymbol{A}x(k)+\boldsymbol{E}w(k), \tag{7}$$

如果关于 Q 变量的不等式组

$$\boldsymbol{AQA}^{\mathrm T}-r^2\boldsymbol{Q}<0, \tag{8}$$

$$-\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{AQA}^{\mathrm T}+\boldsymbol{EWE}^{\mathrm T}<0 \tag{9}$$

有正定对称解,则系统(7)满足极点约束 $\Lambda(\boldsymbol{A})\subset D(0,r)$ 且稳态状态方差 $\boldsymbol{X}<\boldsymbol{Q}$.

引理 3[4] 给定指标 γ,对于线性时变系统(3),假设系统初始状态未知,如果存在有界时变正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}(i)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 Riccati 不等式

$$-\boldsymbol{Q}(i+1)+\boldsymbol{A}_c(i)\boldsymbol{Q}(i)\boldsymbol{A}_c^{\mathrm T}(i)+\boldsymbol{A}_c(i)\boldsymbol{Q}(i)\boldsymbol{L}^{\mathrm T}(i)\cdot[\gamma^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(i)\boldsymbol{Q}(i)\boldsymbol{L}^{\mathrm T}(i)]^{-1}\boldsymbol{L}(i)\boldsymbol{Q}(i)\boldsymbol{A}_c^{\mathrm T}(i)+\tilde{\boldsymbol{E}}(i)\tilde{\boldsymbol{E}}^{\mathrm T}(i)<0, \tag{10}$$

且

$$\boldsymbol{Q}(N-1)=\boldsymbol{Q}_U,$$

$$\boldsymbol{I}-\gamma^{-2}\boldsymbol{L}(i)\boldsymbol{Q}(i)\boldsymbol{L}^{\mathrm T}(i)>0,\ i=0,1,2,\cdots,N-1,$$

则此系统渐近稳定且满足指标 c).

误差系统(3)提升后状态转移矩阵

$$\varphi_c(k,k_0)=\begin{cases}A_c(k)A_c(k-1)\cdots A_c(k_0), & k>k_0,\\ I, & k=k_0.\end{cases}$$

不妨假设:

H$_2$) 对于提升误差系统(4),极点指标开圆盘 $D(0,r)$ 含 $\Lambda(\hat{A})$ 的不可观特征值,且误差系统的特征矩阵 $\varphi_c(N-1,0)$ 为单值矩阵;

H$_3$) $X(i)\geqslant E(i)W(i)E^{\mathrm{T}}(i)>0$.

显然,当滤波增益 $F(k)$ 为时不变周期序列时,$\varphi_c(k_0+N-1,k_0)$ 的特征值与 k_0 无关,而特征多项式

$$\lambda I-\hat{A}=\lambda I-A_c(N-1)\cdots A_c(0) \tag{11}$$

参考引理 2,对于时不变提升误差系统(4),如果不等式

$$\hat{A}Q(0)\hat{A}^{\mathrm{T}}-r^2Q(0)<0 \tag{12}$$

有正定解 $Q(0)\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$,则条件 $\Lambda(\hat{A})\subseteq D(0,r)$ 必然满足.

根据假设 H$_2$)可知 $\varphi_c(N-1,0)$ 为单值矩阵,若特征矩阵 $\varphi_c(N-1,0)$ 的极点为 $\lambda_{i,j}(i=0,1,\cdots,N-1,j=1,2,\cdots,l)$,欲使积 $\lambda_{0,j}\times\lambda_{1,i}\times\cdots\times\lambda_{N-1,j}\in D(0,r)(0<r<1)$,只须 $\{\lambda_{0,j},\lambda_{1,i},\cdots,\lambda_{N-1,j}\}\in D(0,r)$,根据引理 2 可得满足极点指标约束 a)的充分条件是

$$(A(i)-F(i)C(i))Q(i)(A(i)-F(i)C(i))^{\mathrm{T}}-r^2Q(i+1)<0. \tag{13}$$

又当误差系统(3)渐近稳定时,其稳态误差方差 $X(i)$ 满足

$$A_c(i)X(i)A_c^{\mathrm{T}}(i)-X(i+1)+\tilde{E}(i)\widetilde{W}(i)\tilde{E}(i)^{\mathrm{T}}=0,\quad i=0,1,2,\cdots,N-1. \tag{14}$$

其中 $X(i)=\lim\limits_{m\to\infty}\mathrm{E}\{\tilde{x}(mN+i)\tilde{x}^{\mathrm{T}}(mN+i)\}$,$\mathrm{E}\{\cdot\}$ 表示数学期望,$\widetilde{W}(i)=\mathrm{diag}\{W(i),v(i)\}$,$W(i)$ 为模型噪声 $w(k)$ 的强度,$V(i)$ 为测量噪声 $v(k)$ 的强度.

根据引理 2 及上述分析有如下结论.

定理 1　假设 H$_1$) ~ H$_3$)成立,系统(1)存在周期滤波增益 $F(i)$ 使约束 a)成立的充分条件是矩阵变量 $Q(i)$,$F(i)$ 的不等式组(13)及

$$A_c(i)Q(i)A_c^{\mathrm{T}}(i)-Q(i+1)+\tilde{E}(i)\widetilde{W}(i)\tilde{E}(i)^{\mathrm{T}}<0 \tag{15}$$

有解;又若 $(Q(i),F(i))$ 上述不等式的解,则滤波增益阵 $F(i)$ 相应的误差系统(3) 的稳态协方差阵 $X(i)$ 与 $Q(i)$ 之间必满足关系 $Q(i)>X(i)$.

证　根据引理 1,欲使误差系统(3)稳定,必须

$$A_c^{\mathrm{T}}(i)P(i+1)A_c(i)-P(i)<0 \tag{16}$$

存在可行解;根据文献[2]可知,在假设 H$_2$)条件下不等式(16)的对偶不等式(Dual inequality)

$$A_c(i)Q(i)A_c^{\mathrm{T}}(i)-Q(i+1)<0 \tag{17}$$

也存在周期正定对称解 $Q(i)$;

在不等式(13)约束下,不等式(12)显然也成立,再根据引理 2 可知,时不变提升误差系统(4)满足约束 a),可得定理的充分性.　证毕.

记 $R(i)=Q^{-1}(i)$,$S(i)=R(i+1)F(i)$,利用 Schur 补引理,可得定理 1 的如下 LMI 形式.

推论 1　对于线性周期系统(1),假设 H$_1$) ~ H$_3$)成立,存在周期滤波增益 $F(i)$ 使约束 a)成立的充分条件是矩阵变量 $R(i)$,$F(i)$ 的以下 LMI 组

$$\begin{bmatrix}-rR(i+1) & \Psi(i)\\ \Psi(i)^{\mathrm{T}} & -rR(i)\end{bmatrix}<0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}-R(i+1) & \Psi(i) & R(i+1)\tilde{E}(i)\\ \Psi(i)^{\mathrm{T}} & -R(i) & 0\\ \tilde{E}(i)^{\mathrm{T}}R(i+1) & 0 & -\widetilde{W}^{-1}(i)\end{bmatrix}<0 \tag{19}$$

有解;而若 $(R(i),S(i))$ 是上述不等式组的任一解,则 $F(i):=R^{-1}(i+1)S(i)$ 作为滤波增益必使误差系统(3)满足约束 a),而误差系统的稳态状态方差 $X(i)$ 满足 $X(i)<Q(i)$,其中

$$R^{-1}(i)=Q(i),$$
$$\Psi(i)=R(i+1)A(i)-S(i)C(i),$$
$$i=0,1,\cdots,N-1.$$

假设条件 H$_2$)成立,可知极点指标 $D(0,r)$ 在周期状态滤波下是可配置的,根据定理 1 知式(13),(15)总有可行解,从而 LMI 组式(18),(19)有解,故可以求解极值问题

$$\max\{\mathrm{tr}\,R(i)\}:(R(i),S(i))\text{ 满足 LMI 组式(18),(19).} \tag{20}$$

记相应极大阵对为$(R_m(i),S_m(i))$,滤波增益 $F_m(i):=R_m^{-1}(i+1)S_m$ 对应的误差系统(3) 的稳态协方差阵记为 $X_{\mathrm{L}}(i)$,由推论 1 得式(20) 中 $R_m(i)\leqslant X_{\mathrm{L}}^{-1}(i)$ 且 $[R_m(i)]_{jj}<[X_{\mathrm{L}}^{-1}(i)]_{jj}$.

参考文献[7]的推论 1,利用矩阵 $Q(i)$ 的正伸缩性可知方差指标 b)的下确界如下:

推论 2　对于系统(1)假设 H$_1$)成立,极点指标 $D(0,r)$ 满足条件 H$_2$),则满足 $\sigma_j^2(i)>[R_m^{-1}(i)]_{jj}$ 的方差上界指标 $\sigma_j^2(i)(j=1,2,\cdots,n_x,i=0,1,\cdots,N-1.)$ 都与区域极点指标 $D(0,r)$ 相容.

4　与极点/状态误差方差指标相容的 H$_\infty$ 上界指标及满意滤波设计(Design of upper H-infinity consistent with pole and error-variance indices and its satisfying filter)

根据引理 3,对于误差系统(3),当差分 Riccati

不等式(13)有正定解 $Q(i)>0$ 时误差系统(3)渐近稳定且满足约束c).

利用矩阵逆的反演公式可将式(10)改写为

$$-Q(i+1)+A_c(i)(Q^{-1}(i)-\gamma^{-2}L^{\mathrm{T}}(i)L(i))^{-1}\cdot A_c^{\mathrm{T}}(i)+\tilde{E}(i)\tilde{E}^{\mathrm{T}}(i)<0. \tag{21}$$

由于 $R(i)=Q^{-1}(i)$,将式(21)左、右分别乘以 $R(i+1)$, $R^{\mathrm{T}}(i+1)$, 利用Schur补引理可将式(21)转换为

$$\begin{bmatrix} -R(i+1) & R(i+1)A(i)-S(i)C(i) & R(i+1)\tilde{E}(i) \\ * & \alpha^{-1}L^{\mathrm{T}}(i)L(i)-R(i) & 0 \\ * & * & -I \end{bmatrix}<0. \tag{22}$$

其中 $\alpha=\gamma^2$, “$*$”表示对称元素.

从而对于误差系统,约束c)可表示为LMI(22).

根据推论1,假设对于系统(1)给定极点指标满足条件 H_2), 稳态误差方差指标满足 $\sigma_j^2(i)>[X_L(i)]_{jj}$,记 $(R_0(i),S_0(i),\alpha_0)$ 为约束

$$\min\{\mathrm{tr}\,\alpha\}:\gamma,R,S \text{ 满足 LMIs (18),(19) 及(22)} \tag{23}$$

下相应的极小点,而 $\gamma_0=\sqrt{\alpha_0}$, 于是参考推论2,有如下结论,它刻划了周期滤波下误差系统(3)的 H_∞ 指标与相容极点指标和稳态方差相容的上界.

定理2 对于线性周期系统(1),假设条件 H_1), H_3)成立,给定的极点指标满足条件 H_2),稳态方差指标满足 $\sigma_j^2(i)>[X_L(i)]_{jj}$, 则所有满足 H_∞ 指标 $\gamma>\gamma_0$ 都与极点指标 $D(0,r)$ 和方差上界指标 $\sigma_j^2(i)$ 相容.

由 $(Q_0(i),S_0(i),\alpha_0)$ 的定义知,LMI组(18),(19)及(22)存在一个解系列 $(Q_m(i),S_m(i),\alpha_m(i))(m=1,2,\cdots)$,使得由此生成的反馈增益阵列 $F_m(i)$ 收敛于 $F_0(i)$, 系统(3)传递函数 H_∞ 范数 $\|H_{z\bar{w}}(z)\|_\infty$ 显然是反馈增益 $F_m(i)$ 的连续函数[8]. 因而当 $\gamma>\gamma_0$ 时,由极限的保号性知,存在充分大整数 n, 使得 $F_n(i)$ 相应的 $\|H_{z\bar{w}}(z)\|_\infty$ 满足 $\|H_{z\bar{w}}(z)\|_\infty<\sqrt{\alpha_n}<\gamma$. 而 $F_n(i)$ 是LMI组(18),(19)及(22)的一个解 $(Q_n(i),S_n(i),\alpha_n(i))$ 生成的,故 $F_n(i)$ 为使约束a)~c)相容的周期反馈增益.

5 数值算例(Numerical example)

取系统(1)中系数矩阵和白噪声 $w(k)$ 的协方差如下

$$A(0)=\begin{bmatrix}0.5 & 1\\ 0 & -0.2\end{bmatrix},\ A(1)=\begin{bmatrix}1 & 0.4\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

$$C(0)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ C(1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$E(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ E(1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$L(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ L(1)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$W(i)=V(i)=I, i=1,2$,极点区域 $D(0,r)=D(0,0.9)$,稳态状态方差指标 $\sigma^2(0)=\mathrm{diag}\{4.5,4.5\}$, $\sigma^2(1)=\mathrm{diag}\{20,3.0\}$, H_∞ 指标 $\gamma=2.0$.

易验证矩阵 $(A(\cdot),C(\cdot))$ 可观测,给定的极点指标为 $D(0,1)$, 周期状态滤波下是可配置的.于是根据推论1,在约束LMI组(18),(19)下由 $\max\{\mathrm{tr}\,R(i)\}$ 求得

$$Q_L(0)=\begin{bmatrix}3.7149 & -3.7149\\ -3.7149 & 3.7149\end{bmatrix},$$

$$Q_L(1)=\begin{bmatrix}0.8000 & -0.0000\\ -0.0000 & 0.8000\end{bmatrix}.$$

相应稳态状态方差

$$X_L(0)=\begin{bmatrix}1.2495 & -1.2495\\ -1.2495 & 1.2495\end{bmatrix},$$

$$X_L(1)=\begin{bmatrix}1.2500 & 0.0000\\ 0.0000 & 1.2500\end{bmatrix}$$

易知 $\sigma_j^2(i)>[Q_L(i)]_{jj}$,故满足极点、方差指标约束的滤波增益 $F(i)$ 存在,于是根据定理2极值问题(23)有意义,得 $\gamma_0=1.25$,因而满足 $\gamma>\gamma_0$, $\sigma_j^2(i)>[Q_L(i)]_{jj}$ 的指标都与极点指标 $D(0,0.9)$ 相容.

现假设对系统给定的约束:极点 $D(0,1)$, 状态方差指标

$\sigma^2(0)=\mathrm{diag}\{4.5,4.5\}$, $\sigma^2(1)=\mathrm{diag}\{20,3.0\}$, H_∞ 上界指标 $\gamma=2.0$. 根据定理2,求取一个满足所有约束的滤波增益矩阵.根据定理2在约束LMIs(18),(19)及(22)下可得一组可行的滤波增益及相应稳态方差

$$F(0)=\begin{bmatrix}0.5000 & 0.0000\\ -0.0000 & -0.2000\end{bmatrix},$$

$$X(0)=\begin{bmatrix}1.0000 & -0.0000\\ -0.0000 & 1.0000\end{bmatrix},$$

$$F(1)=\begin{bmatrix}0.1220 & -0.1968\\ -0.0314 & 0.1580\end{bmatrix},$$

$$X(1)=\begin{bmatrix}16.0826 & 1.0248\\ 1.4859 & 0.3233\end{bmatrix}.$$

相应误差提升系统的极点0.1469,0.0044,传递函数 H_∞ 范数 $\|H_{z\bar{w}}(z)\|_\infty=1.5732$.

显然,所求滤波增益 $F(\cdot)$ 满足指标约束a)~c).

参考文献(References):

[1] MEYER R A, BURRUS C S. A unified analysis of multirate and periodically time-varying digital filters [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1975, 22(3): 162 - 168.

[2] VARGA A, DOOREN P V. Computational methods for periodic systems an overview [C]// BITTANTI S, COLANERI P. *Preprints of IFAC workshop on periodic Control Systems*. Karlsruhe, Germany: Karlsruhe Press, 2001, 171 - 176.

[3] HOTZ A F, SKELTON R E. A covariance control theory [J]. *Int J Control*, 1987, 46(1): 13 - 32.

[4] XIE Lihua, De SOUZA C E, WANG Youyi. Robust control of discrete time uncertain dynamical systems [J]. *Automatica*. 1993, 29 (4): 1133 - 1137.

[5] WANG Zidong, GUO Zhi, ULBEHAUEN M. Robust H_2/H_∞ state estimation for systems with error variance constraints: continue-time [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1061 - 1065.

[6] 王远钢,夏璇.离散控制系统中圆形极点与方差上界约束的相容性[J].南昌航空工业学院学报,1999.13(4):13 - 16.
(WANG Yuangang, XIA Xuan. Consistency of circular pole and upper state-variance constrainets for discrete-time control systems [J]. *J of Nanchang Aviation Industry College*, 1999, 13(4): 13 - 16.)

[7] 王远钢,郭治.状态反馈中圆形极点与状态方差约束的相容性[J].自动化学报,2001,27(2):207 - 213.
(WANG Yuangang, GUO Zhi. Consistency of circular pole and state variance constraints in state-feedback control [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(2): 207 - 213.)

[8] 黄琳.系统与控制理论中的线性代数[M].北京:科学出版社,1984.
(HUANG Lin. *Linear Algebra of System and Control Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1984.)

作者简介:

刘世前　(1971—),男,1996 年 7 月于西安石油大学,2003 年 12 月于南京理工大学获控制科学与工程博士学位,现为清华大学计算机系智能技术与系统国家重点实验室博士后,主要研究方向为飞行控制、火力控制与信号处理,E-mail: lius1001@tom.com;

王远钢　(1966—),男,2001 年 1 月毕业于南京理工大学自动化系,获博士学位,现为南京理工大学自动化系副教授,主要研究方向为满意控制与满意估计;

盛安冬　(1965—),男,1990 年 12 月毕业于哈尔滨工业大学飞行器控制、制导与仿真专业,获博士学位,1995 年 10 月日本千叶工业大学访问学者,现为南京理工大学自动化系教授,博士生导师,主要从事导航与制导、火力控制研究;

郭　治　(1937—),男,1961 年毕业于哈尔滨军事工程学院指挥仪系,现为南京理工大学自动化系教授,博士生导师,国务院学位委员会学科评议组成员,中国兵工学会理事,长期从事控制理论及运用技术的教学与研究工作,目前主要研究方向为满意控制、火力控制.